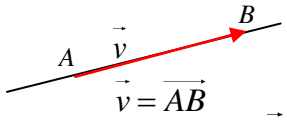
حلول الأنشطة و تمارين الكتاب المدرسي

الدرس و حلول الأنشطة :

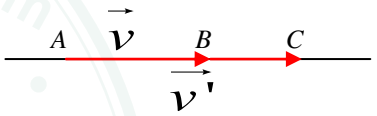
I) الأشعة والحساب الشعاعي

1 - مفهوم الشعاع :

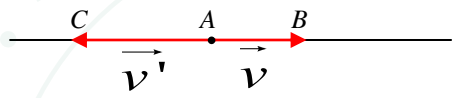
تعريف : A ، B نقطتان من المستوي. نقول أن الثنائية $(A\ ,\ B)$ تعين **شعاعا** نرمز له بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{v}$.



- إذا كانت النقطة A منطبقة على B فإن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يصبح معدوما ونكتب $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=\vec{0}$
- يسمى طول القطعة المستقيمة $[AB]$ **طويلة** الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ونكتب $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=AB$.
- إذا كان $\overrightarrow{AB}$ شعاعا غير معدوم فإن **منحى** الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو منحى المستقيم (AB).
- إذا كان للشعاعين $\vec{v}$ و $\vec{v'}$ نفس المنحى ، وبوضع $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v'}=\overrightarrow{AC}$ فإنه :
  - ✓ يكون للشعاعين $\vec{v}$ و $\vec{v'}$ **نفس الاتجاه** إذا كانت النقطة C تنتمي إلى نصف المستقيم $[AB)$.
  - ✓ يكون للشعاعين $\vec{v}$ و $\vec{v'}$ **اتجاهان متعاكسان** إذا كانت النقطة A تنتمي إلى القطعة المستقيمة $[BC]$.



$\vec{v}$ و $\vec{v'}$ لهما نفس الاتجاه



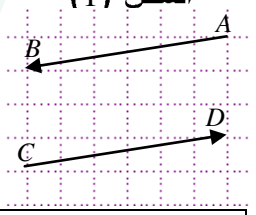
$\vec{v}$ و $\vec{v'}$ لهما اتجاهان متعاكسان

ليس للشعاع المعدوم منحى.

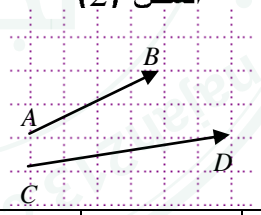
نشاط 1 : (تساوي شعاعين)

أ) لاحظ الأشكال الأربعة الآتية ، ثم أنقل الجدول أدناه وأكمله بنعم أم لا.

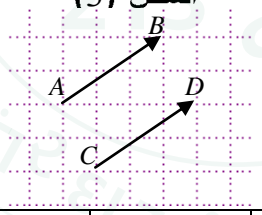
الشكل (1)



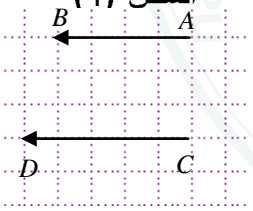
الشكل (2)



الشكل (3)



الشكل (4)



هل للشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$	الشكل (1)	الشكل (2)	الشكل (3)	الشكل (4)
نفس المنحى				
نفس الاتجاه				
نفس الطويلة				

ب) في أي شكل لدينا : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

حل النشاط :

أ) لاحظ الأشكال الأربعة الآتية ، ثم أنقل الجدول أدناه وأكمله بنعم أم لا.

هل للشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$	الشكل (1)	الشكل (2)	الشكل (3)	الشكل (4)
نفس المنحى	نعم	لا	نعم	نعم

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

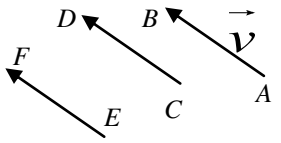
نفس الاتجاه	لا	لا	نعم	نعم
نفس الطويلة	نعم	لا	نعم	لا

ب) في أي شكل لدينا : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ (الجواب الشكل 3)

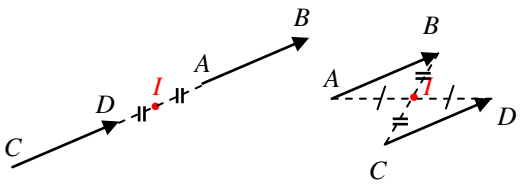
2 – تساوي شعاعين :

تعريف : نقول عن شعاعين أنهما متساويان إذا كان لهما نفس المنحى ، نفس الاتجاه و نفس الطويلة.

مثال :



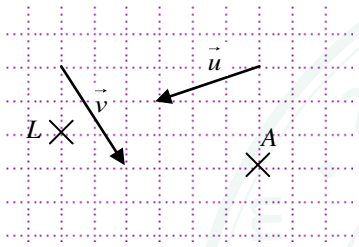
$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$



نتيجة : من أجل كل أربع نقط A ، B ، C ، D من المستوي لدينا : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ **معناه** $[AD]$ و $[BC]$ لهما نفس المنتصف.

نشاط 2 : (مجموع شعاعين)

أ) أنقل الشكل المجاور على ورقة مسطرة ، وعلم النقطتين B ، C حيث : $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$.



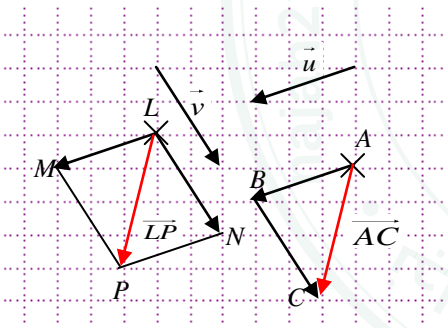
ب)ماذا يمثل الشعاع الناتج $\overrightarrow{AC}$ بالنسبة إلى الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ؟

ج) علم النقطتين M ، N حيث : $\overrightarrow{LM}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{LN}=\vec{v}$ ،

ثم أنشئ النقطة P بحيث يكون الرباعي $LMPN$ متوازي أضلاع.

د)قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{LP}$.

ه)ماذا يمثل الشعاع الناتج $\overrightarrow{LP}$ بالنسبة إلى الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ؟



حل النشاط :

لدينا : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ ومنه : $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

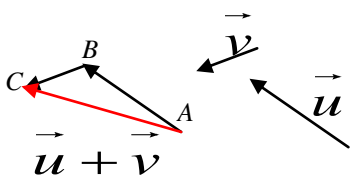
لدينا : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{NP}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{LN}=\vec{v}$

ومنه : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{LN}=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{LN}=\overrightarrow{LP}$

إذن : $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{LP}$

3 – مجموع شعاعين :

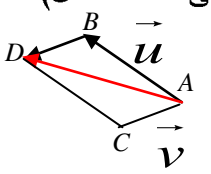
تعريف : مجموع الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو الشعاع الذي نرمز له بالرمز $\vec{u}+\vec{v}$



والمعرف كما يأتي :إذا كانت A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي حيث : $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$ فإن : $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

نتائج :

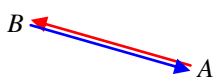
- من أجل كل ثلاث نقط A ، B ، C من المستوي فإن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (هذه العلاقة تسمى علاقة شال).
- إذا كان $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ فإن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ حيث : $ABDC$ متوازي أضلاع



- إذا كان الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع فإن $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

4 – الشعاعان المتعاكسان :

من أجل كل نقطتين A ، B من المستوي فإن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

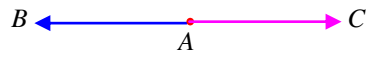


فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

تعريف : نقول عن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ أنهما متعاكسان ونكتب : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

نتائج :

- $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA}\right\|$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ **تعني** $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعاكسان



- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ **تعني** A منتصف $[BC]$.
- إذا كان $AB = AC$ و A ، B ، C ليست في استقامية فإن : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ (أي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير متعاكسين)

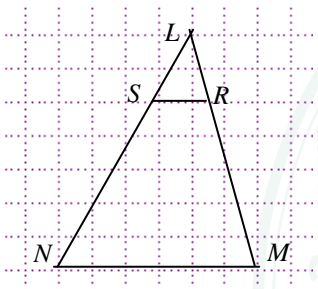
نشاط 3 : (جداء شعاع بعدد حقيقي)

1) علم نقطتين متمايزتين A و C ثم أنشئ النقطة B منتصف القطعة $[AC]$.

أ) قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$.

ب) قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، من حيث المنحى والاتجاه والطويلة.

ج) عبر عن $\overrightarrow{AC}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ ثم عبر عن $\overrightarrow{AB}$ بدلالة $\overrightarrow{AC}$.



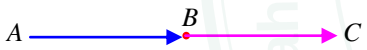
2) في الشكل المقابل ، المثلثان LSR و LNM متشابهان ومعامل التكبير هو $\frac{7}{2}$.

أ) قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{SR}$ ، من حيث المنحى والاتجاه والطويلة.

ب) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{SR}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{MN}$.

حل النشاط :

1) A و C ثم أنشئ النقطة B منتصف القطعة $[AC]$.

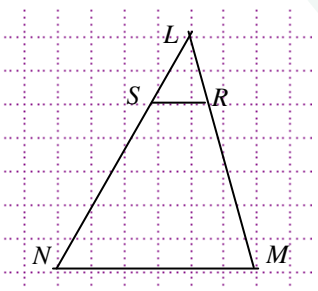


إذن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما نفس المنحى ونفس الاتجاه ولكن طويلتيهما مختلفتين . ولدينا $AC = 2\,AB$.

ومنه : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

2) لدينا : المثلثان LSR و LNM متشابهان ومعامل التكبير هو $\frac{7}{2}$.



إذن : $\frac{MN}{SR} = \frac{7}{2}$ ومنه $SR = \frac{2}{7}MN$

الشعاعان $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{SR}$ لهما نفس المنحى واتجاهان متعاكسان وطويلتان مختلفتان.

$\overrightarrow{SR} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{MN}$.

5 - جداء شعاع بعدد حقيقي :

تعريف : $\vec{u}$ شعاع غير معدوم من المستوي ، و k عدد حقيقي غير معدوم.

جداء الشعاع $\vec{u}$ بالعدد k هو الشعاع الذي نرمز له بالرمز $k.\vec{u}$ والمعرف كما يأتي :

- الشعاعان $\vec{u}$ و $k.\vec{u}$ لهما نفس المنحى.

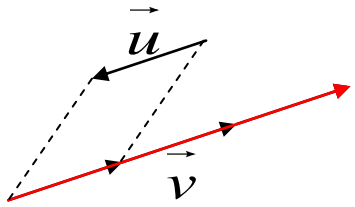
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

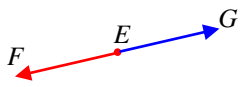
- الشعاعان $\vec{u}$ و $k.\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه إذا كان k موجب تماما و لهما اتجاهان متعاكسان إذا كان k سالب تماما.
- طويلة الشعاع $k.\vec{u}$ تساوي جداء طويلة $\vec{u}$ بالعدد $|k|$ أي : $\|k.\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$

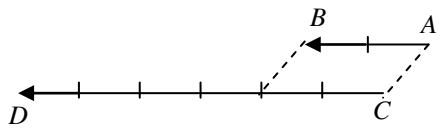
ملاحظة : عندما يكون $\vec{u} = \vec{0}$ أو $k = 0$ نقبل اصطلاحا أن $k.\vec{u} = \vec{0}$

أمثلة :

$\overrightarrow{CD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{EG}$ $\quad$ $\vec{v} = -3\vec{u}$







خواص :

1. $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
2. $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.
3. $k(k'\vec{u}) = kk'\vec{u}$.
4. $1\vec{u} = \vec{u}$.
5. $k\vec{u} = \vec{0}$ يكافئ (يعني) [$k = 0$ أو $\vec{u} = \vec{0}$].

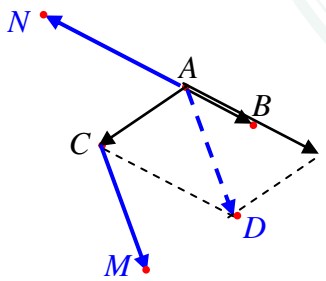
تطبيق : 34 صفحة 274

A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية .

أ- أنشئ النقطتين N ، M المعرفتين بالعلاقتين الآتيتين على الترتيب :

$\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

ب- بين أن النقطة C منتصف $[MN]$.



الحل :

أ- نضع $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ وننشئ النقطة M حيث : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AD}$

ب- لدينا : $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$ ومنه : $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC}$

إذن : $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$ وبالتالي : النقطة C منتصف $[MN]$.

نشاط 4 :

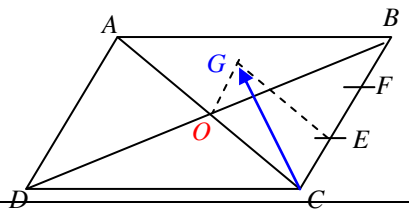
أ) أرسم متوازي أضلاع $ABCD$ مركزه النقطة O ، وعلم النقطتين E ، F من $[BC]$ حيث : $CE = EF = FB$

ب) أنشئ النقطة G حيث : $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE}$.

ج) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{AF}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{AG}$. ماذا يمكن أن نقول عن النقط A ، G ، F ؟

حل النشاط :

أ) $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه النقطة O ،



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

لدينا E ، F من $[BC]$ حيث : $CE = EF = FB$

ب) إنشاء النقطة G حيث : $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE}$.

ج) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{AF}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{AG}$.

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$ ومنه $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{CE}$ إذن : $\overrightarrow{AF} = 2(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OG})$ أي : $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AG}$

ماذا يمكن أن نقول عن النقط A ، G ، F ؟

$\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AG}$ ومنه $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{AG}$ أي : $(AF) // (AG)$ وبالتالي : النقط A ، G ، F في استقامية.

6 – توازي شعاعين :

تعريف : نقول عن شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أنهما **مرتبطين خطيا** إذا كان أحدهما يساوي **جداء الآخر بعدد حقيقي**.

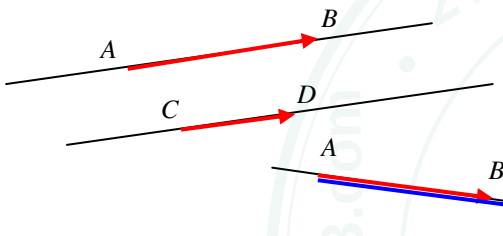
أي إذا وجد عدد حقيقي k حيث $\vec{v} = k.\vec{u}$.

ملاحظة : الشعاع المعدوم مرتبط خطيا مع أي شعاع . لأنه من أجل كل شعاع $\vec{u}$ من المستوي لدينا : $\vec{0} = 0.\vec{u}$

نتيجة : يكون الشعاعان غير المعدومين **مرتبطين خطيا** إذا وفقط إذا كان لهما **نفس المنحى**.

7 – التوازي والاستقامية :

مبرهنة 1 : يكون المستقيمان (AB) و (CD) **متوازيين** إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ **مرتبطين خطيا**.



مبرهنة 2 : تكون النقط A ، B ، C في **استقامية** إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ **مرتبطين خطيا**.

تمرين 45 صفحة 275

A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية .

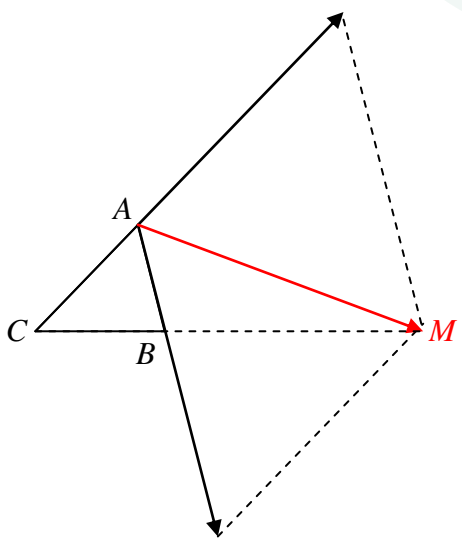
أ- أنشئ النقطة M المعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

ب- بين أن النقط C ، B ، M في استقامية .

(إرشاد : عبر عن الشعاع $\overrightarrow{CM}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$)

الحل :

أ- أنشئ النقطة M المعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$



ب- بين أن النقط C ، B ، M في استقامية .

$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ معناه $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

ومعناه $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ يكافئ $\overrightarrow{CM} = 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$

أي : $\overrightarrow{CM} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA})$ يكافئ $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CB}$

وبالتالي $(CM) // (CB)$

وبما أن للمستقيمين نقطة مشتركة C فإن النقط C ، B ، M في استقامية .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

II) المعلم في المستوي

نشاط :

O ، I ، J ثلاث نقط متمايزة من المستوي وليست في استقامية.

$\vec{i}$ و $\vec{j}$ شعاعان من المستوي حيث $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$

أ) بين أن الشعاعان $\vec{i}$ و $\vec{j}$ غير مرتبطين خطيا.ماذا تسمى الثلاثية $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ ؟

ب) A نقطة من المستقيم (OI) و B نقطة من المستقيم (OJ) حيث $\overrightarrow{OA}=3\,\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=5\,\vec{j}$

أنشئ النقطة M حيث $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. ماذا تمثل الثنائية $(5\ ;\ 3)$ بالنسبة إلى النقطة M وبالنسبة إلى الشعاع $\overrightarrow{OM}$ ؟

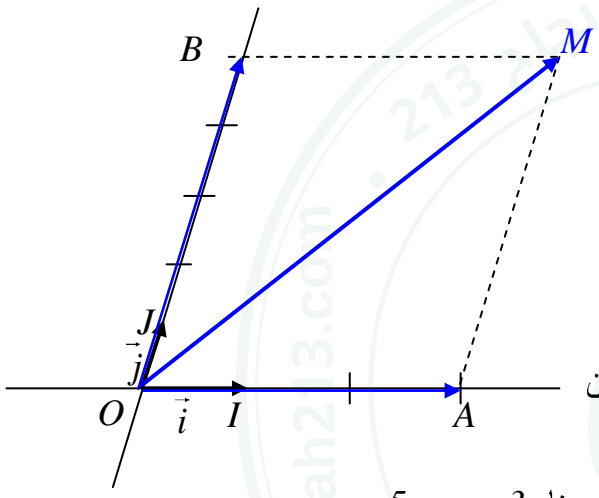
ج) $\vec{u}$ شعاع من المستوي حيث $\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$ عين العددين الحقيقيين x و y بحيث يكون $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$.

حل النشاط :

أ) لدينا النقط O ، I ، J متمايزة إذن الشعاعان $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ غير معدومين .

وبما أن هذه النقط ليست في استقامية فإن الشعاعان $\vec{i}$ و $\vec{j}$ غير مرتبطين خطيا

الثلاثية $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ تسمى معلما للمستوي.

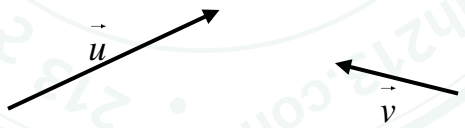


ب) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ ومنه : $\overrightarrow{OM}=3\vec{i}+5\vec{j}$

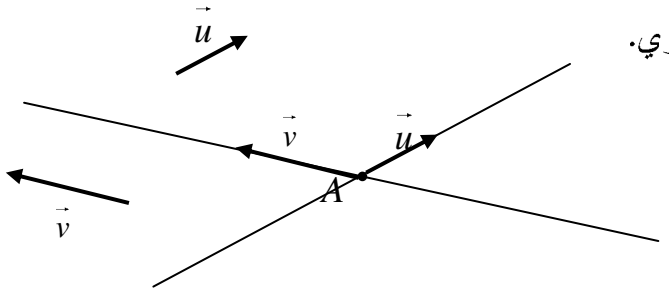
الثنائية $(5\ ;\ 3)$ هي إحداثيتي النقطة M وتمثل المركبتين السلميتين للشعاع $\overrightarrow{OM}$

ج) $\overrightarrow{OM}=3\vec{i}+5\vec{j}$ و $\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$ إذن $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ معناه $x=3$ و $y=5$

تعريف 1 : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من المستوي. نقول عن الثنائية $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ أنها أساس للمستوي إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا (غير متوازيين و غير معدومين)



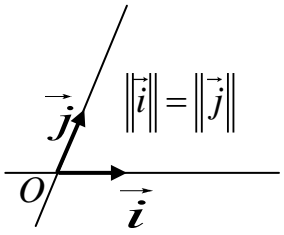
تعريف 2 : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من المستوي و A نقطة منه . نقول عن الثلاثية $(A\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ أنها معلما للمستوي إذا كانت $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ أساسا للمستوي.



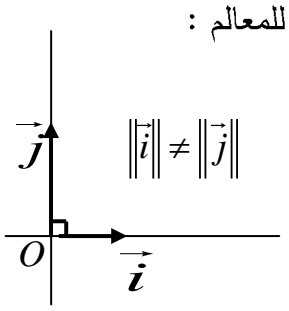
- النقطة A تسمى مبدأ المعلم
- المحور $(A\ ;\ \vec{u})$ يسمى محور الفواصل ؛ المحور $(A\ ;\ \vec{v})$ يسمى محور التراتيب .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

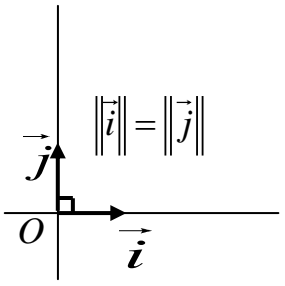
ملاحظة : توجد ثلاث أنواع خاصة للمعالم :



$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ معلم متجانس



$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ معلم متعامد



$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس

مبرهنة 1 : $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ معلم للمستوي.

من أجل كل نقطة M من المستوي توجد ثنائية وحيدة $(x\ ;\ y)$ من الأعداد الحقيقية بحيث $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

ملاحظة :

إذا كانت $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ فإن الثنائية $(x\ ;\ y)$ تسمى إحداثيا النقطة M في المعلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ ونكتب $M(x\ ;\ y)$ ، العدد الحقيقي x يسمى فاصلة النقطة M والعدد الحقيقي y يسمى ترتيبها.

ونكتب كذلك $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ والثنائية $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ تسمى المركبتين السلّميتين للشعاع $\overrightarrow{OM}$ في الأساس $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$

العدد الحقيقي x يسمى المركبة الأولى للشعاع $\overrightarrow{OM}$ العدد الحقيقي x يسمى المركبة الثانية له.

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ **تعني** $M(x\ ;\ y)$ في المعلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ **ومعناه** $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ في الأساس $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$

تمرين 61 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. $ABCD$ متوازي أضلاع ، النقطة A' نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة D ، النقطة M منتصف $[CD]$.

أ) بين لماذا يمكن اعتبار $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ معلما للمستوي ؟

ب) عين إحداثيي كل من النقط A ، B ، C ، D ، M ، A' في هذا المعلم.

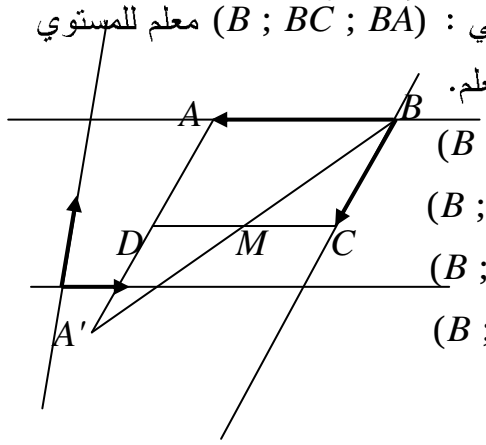
ج) بين باستعمال الإحداثيات المحصل عليها أن النقطة M هي منتصف $[BA']$.

الحل :

أ) بين لماذا يمكن اعتبار $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ معلما للمستوي ؟

لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع إذن النقط الأربعة متمايزة و (BC) لا يوازي (BA) ومنه الشعاعان $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA}$ غير مرتبطين خطيا أي الثنائية $(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ تشكل أساسا للمستوي وبالتالي : $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ معلم للمستوي

ب) عين إحداثيي كل من النقط A ، B ، C ، D ، M ، A' في هذا المعلم.



لدينا : $\overrightarrow{BA} = 0\overrightarrow{BC} + 1\overrightarrow{BA}$ ومنه : $A(0\ ;\ 1)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BB} = 0\overrightarrow{BC} + 0\overrightarrow{BA}$ ومنه : $B(0\ ;\ 0)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BC} = 1\overrightarrow{BC} + 0\overrightarrow{BA}$ ومنه : $C(1\ ;\ 0)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BD} = 1\overrightarrow{BC} + 1\overrightarrow{BA}$ ومنه : $D(1\ ;\ 1)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

لدينا : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

ومنه : $M(1\ ;\ \frac{1}{2})$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ ومنه : $A'(2\ ;\ 1)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

ج) بين باستعمال الإحداثيات المحصل عليها أن النقطة M هي منتصف $[BA']$.

نفرض أن : M' منتصف $[BA']$ إذن : $M'(\frac{0+2}{2}\ ;\ \frac{0+1}{2})$ ومنه : $M'(1\ ;\ \frac{1}{2})$

إذن M' منطبقة على M ومنه النقطة M هي منتصف $[BA']$.

نتائج : ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ شعاعان من المستوي و k عدد حقيقي.

1. $\vec{u} = \vec{v}$ يكافئ $x = x'$ و $y = y'$
2. $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$
3. $k.\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$

مبرهنة 2 : (إحداثيي منتصف قطعة)

$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ معلم للمستوي و $A(x_A\ ;\ y_A)$ ، $B(x_B\ ;\ y_B)$ نقطتان منه.

إحداثيا النقطة M منتصف $[AB]$ هما $\left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

مبرهنة 3 : (مركبتا شعاع)

$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ معلم للمستوي . و $A(x_A\ ;\ y_A)$ ، $B(x_B\ ;\ y_B)$ نقطتان منه.

مركبتا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$

مبرهنة 4 : (شرط الارتباط الخطي لشعاعين)

$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ معلم للمستوي ، $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ شعاعان من المستوي

يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا إذا وفقط إذا كان $x\,y' - x'\,y = 0$.

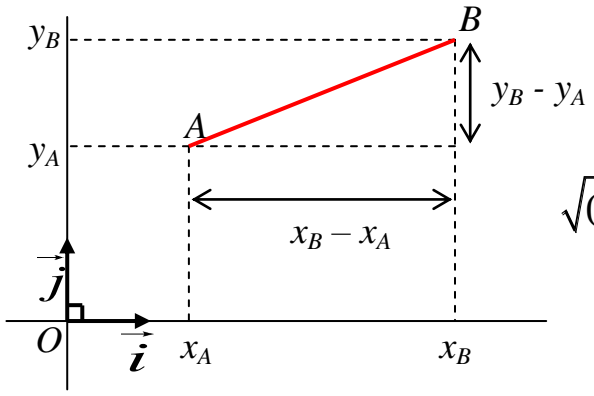
مبرهنة 5 : (المسافة بين نقطتين)

$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي .

و $A(x_A\ ;\ y_A)$ ، $B(x_B\ ;\ y_B)$ نقطتان منه.

المسافة بين النقطتين A و B هي : $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

ولدينا : $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$



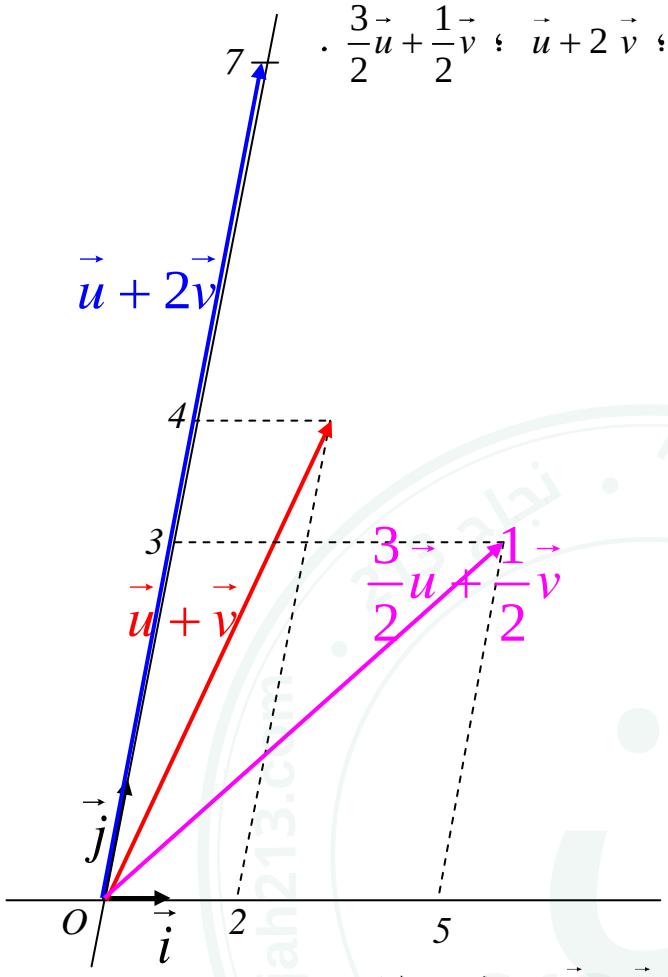
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

تمرين : 50 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. ليكن $\vec{u}=4\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{v}=-2\vec{i}+3\vec{j}$

أ) أحسب مركبتي كل من الأشعة الآتية : $\vec{u}+\vec{v}$ ؛ $\vec{u}+2\vec{v}$ ؛ $\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

ب) أرسم ممثلا مبدأه O لكل من الأشعة السابقة .



الحل :

أ) أحسب مركبتي كل من الأشعة الآتية :

$\vec{u}+\vec{v}$ ؛ $\vec{u}+2\vec{v}$ ؛ $\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

$\vec{u}+\vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}$ ومنه : $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

$\vec{u}+2\vec{v}=7\vec{j}$ ومنه : $\vec{u}+2\vec{v}\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$

$\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}=5\vec{i}+3\vec{j}$ ومنه : $\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

ب) أرسم ممثلا مبدأه O لكل من الأشعة السابقة .

تمرين : 56 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

عين في كل مما يأتي العدد x بحيث يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا.

أ) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x+1\\6\end{pmatrix}$ ب) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\-5\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}2-x\\1\end{pmatrix}$ ج) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\x\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\27\end{pmatrix}$

الحل :

أ) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x+1\\6\end{pmatrix}$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $1\times 6-2(x+1)=0$ معناه $x=2$

ب) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\-5\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}2-x\\1\end{pmatrix}$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $x-(-5)(2-x)=0$ معناه $x=\frac{5}{2}$

ج) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\x\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\27\end{pmatrix}$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $x^2=81$ يكافئ أن $x=-9$ أو $x=9$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

III) معادلة مستقيم

نشاط 1 : ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. لنعلم النقطتين $A(-2\ ;\ 3)$ ، $B(3\ ;\ -4)$.

1) بين أن الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\14\end{pmatrix}$ مرتبط خطيا مع الشعاع $\overrightarrow{AB}$. ماذا يعتبر الشعاع $\vec{u}$ بالنسبة للمستقيم (AB) .

2) $M(x\ ;\ y)$ نقطة من المستوي ، عين علاقة بين x و y بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا.

3) $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ شعاع من المستوي ، عين مجموعة النقط N بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AN}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا.

باعتبار $(x\ ;\ y)$ إحداثيتي النقطة N أكتب علاقة بين x و y في هذه الحالة ، ثم أكتب y بدلالة x .

4) $\vec{W}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ شعاع غير معدوم من المستوي ، أكتب علاقة بين x و y لمجموعة النقط $L(x\ ;\ y)$ بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{BL}$ و $\vec{W}$ مرتبطين خطيا.

حل النشاط :

1) بين أن الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\14\end{pmatrix}$ مرتبط خطيا مع الشعاع $\overrightarrow{AB}$. ماذا يعتبر الشعاع $\vec{u}$ بالنسبة للمستقيم (AB) .

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3+2\\-4-3\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$ ومنه : $\vec{u}=-2\overrightarrow{AB}$ إذن : $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا.

$\vec{u}$ هو شعاع التوجيه المستقيم (AB) .

2) $M(x\ ;\ y)$ نقطة من المستوي ، عين علاقة بين x و y بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا.

لدينا : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$ ؛ $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا معناه : $-7(x+2)=5(y-3)$

ويكافئ أن : $7x+5y-1=0$. تسمى المعادلة الديكارتية للمستقيم (AB) .

3) $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ شعاع من المستوي ، عين مجموعة النقط N بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AN}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا.

مجموعة النقط N هي المستقيم الذي يشمل النقطة A ويوازي منحى الشعاع $\vec{v}$.

باعتبار $(x\ ;\ y)$ إحداثيتي النقطة N أكتب علاقة بين x و y في هذه الحالة ، ثم أكتب y بدلالة x .

لدينا : $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AN}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه أن : $3(x+2)=2(y-3)$

ويكافئ أ ن : $3x-2y+12=0$ أي : $2y=3x+12$ ومعناه أن : $y=\frac{3}{2}x+4$

4) $\vec{W}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ شعاع غير معدوم من المستوي ، أكتب علاقة بين x و y لمجموعة النقط $L(x\ ;\ y)$ بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{BL}$ و $\vec{W}$ مرتبطين خطيا.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

لدينا : $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}x-3\\y+4\end{pmatrix}$ و $\vec{W}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BL}$ و $\vec{W}$ مرتبطان خطيا معناه أن : $\beta(x-3)=\alpha(y+4)$

ويكافئ $\beta x-\alpha y-4\alpha-3\beta=0$

1. التعريف :

$\vec{v}$ شعاع غير معدوم من المستوي ، مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا ، هي مستقيم (Δ) يوازي منحى $\vec{v}$.

كل شعاع غير معدوم منحاه المستقيم (Δ) يسمى شعاع التوجيه للمستقيم (Δ).

ملاحظات :

- إذا كان $\vec{v}$ شعاع التوجيه المستقيم (Δ) فإن من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم k ، $k.\vec{v}$ هو أيضا شعاع التوجيه للمستقيم (Δ). (لمستقيم عدد غير منته من أشعة التوجيه)
- يعرف مستقيم بإعطاء نقطتين منه أو بإعطاء نقطة منه وأحد أشعة توجيهه.

مثال : A و B نقطتان متمايزتان من المستوي ، مجموعة النفط M بحيث يكون $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا هي المستقيم (AB) شعاع توجيهه كل شعاع $k.\overrightarrow{AB}$ حيث $k\in\mathbb{R}^*$

2. معادلة مستقيم :

مبرهنة : ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

- كل مستقيم له معادلة من الشكل $ax+by+c=0$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية معلومة و x ، y متغيرين حقيقيين ؛ شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$
- a ، b ، c أعداد حقيقية معلومة حيث : $a\neq0$ أو $b\neq0$.

مجموعة النقط $M(x\,;y)$ التي إحداثياتها $(x\,;y)$ تحقق المعادلة : $ax+by+c=0$ هي مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

تعريف : العلاقة $ax+by+c=0$ حيث : $a\neq0$ أو $b\neq0$ تسمى المعادلة الديكارتية لمستقيم.

إذا كان $b\neq0$ فالمعادلة تصبح من الشكل $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ وتسمى المعادلة المبسطة ، العدد $-\frac{a}{b}$ يسمى معامل التوجيه للمستقيم.

ملاحظات :

01. إذا كان $b=0$ فإن $a\neq0$ والمعادلة الديكارتية للمستقيم تكون من الشكل : $ax+c=0$ أي : $x=-\frac{c}{a}$

شعاع التوجيه لهذا المستقيم هو $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$ ولدينا : $\vec{u}=a.\vec{i}$ معناه أن هذا المستقيم يوازي حامل محور التراتيب.

نتيجة :

يكون مستقيم موازيا لحامل محور التراتيب إذا وفقط إذا كانت له معادلة من الشكل $x=a$ حيث a ثابت حقيقي.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

02. إذا كان $b \neq 0$ لدينا شعاع توجيهه المستقيم هو $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ و ولدينا : $\vec{u} = -b\vec{v}$ حيث $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{a}{b}\end{pmatrix}$

نتيجة : $y = \alpha x + \beta$ معادلة للمستقيم (Δ) معناه أن $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\alpha\end{pmatrix}$ هو شعاع التوجيه للمستقيم (Δ)

03. إذا كان المعلم متعامد ومتجانس معامل التوجيه لمستقيم يدعى كذلك ميل هذا المستقيم

تمرين 68 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$.

(D) مستقيم معادلته $3x-5y=7$ ، أوجد شعاع توجيه للمستقيم (D) ، وعين معامل توجيهه.

الحل :

شعاع التوجيه المستقيم (D) هو $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ ومعامل توجيهه : $\frac{3}{5}$ يمكن أن نعتبر $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه .

تمرين 70 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$.

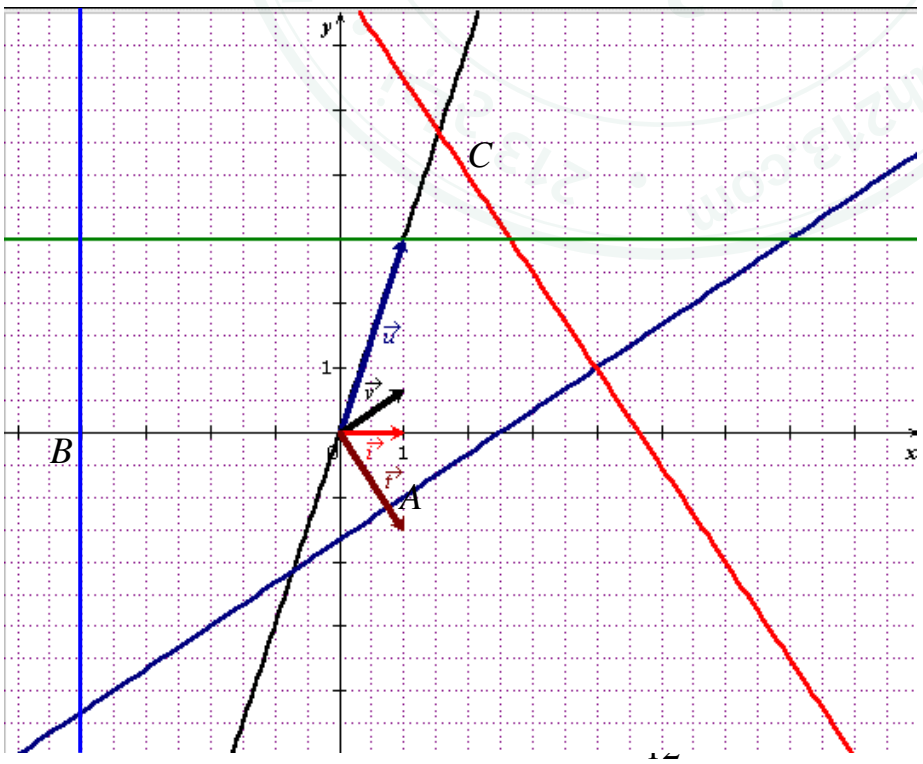
(D) مستقيم معادلته $3x=-7$ ، أوجد شعاع توجيه للمستقيم (D) ، هل للمستقيم (D) معامل توجيه ؟

الحل :

شعاع التوجيه المستقيم (D) هو $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ و يمكن أن نعتبر $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه .

المستقيم (D) يوازي حامل محور التراتيب ليس له معامل توجيه.

تمرين 71 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$. أرسم المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) ، (D_4) ، (D_5) حيث: $(D_1): y = 3x$ ؛ $(D_2): y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ ؛ $(D_3): x = -4$ ؛ $(D_4): y = -\frac{3}{2}x + 7$ ؛



$(D_5): y = 3$

الحل :

$(D_1): y = 3x$

شعاع توجيهه : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

ويشمل النقطة $O(0\ ;\ 0)$

$(D_2): y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

شعاع توجيهه : $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

ويشمل النقطة $A(1\ ;\ -1)$

$(D_3): x = -4$

شعاع توجيهه : $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $B(-4\ ;\ 0)$

(D_4) : $y=-\frac{3}{2}x+7$ شعاع توجيهه : $\vec{t}\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $C(2\ ;\ 4)$

(D_5) : $y=3$ شعاع توجيهه : $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $D(0\ ;\ 3)$

تمرين 73 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

لتكن النقطة $A(3\ ;\ -2)$ والشعاع $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$.

جد معادلة للمستقيم الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}$ شعاع توجيه له .

الحل :

الطريقة 1 : لتكن $M(x\ ;\ y)$ نقطة من المستوي . لدينا : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y+2\end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$M\in(AB)$ معناه أن : $(x-3)=2(y+2)$ - ومعناه أن : $x+2y+1=0$.

الطريقة 2 : معادلة المستقيم هي من الشكل $ax+by+c=0$ شعاع التوجيه $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

ومنه : $b=-2$ و $a=-1$ إذن : $-x-2y+c=0$ - بما أن المستقيم يشمل A فإن : $-3+4+c=0$

ومنه : $c=-1$ إذن : المعادلة هي : $-x-2y-1=0$

الطريقة 3 : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه للمستقيم كذلك $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه لهذا المستقيم ومنه : معادلته هي :

$y=-\frac{1}{2}x+b$ بما أن المستقيم يشمل A فإن : $-2=-\frac{1}{2}\times3+b$ أي : $b=-\frac{1}{2}$ ومنه : $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

تمرين 76 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

أ) جد معادلة للمستقيم (D) الذي معامل توجيهه $-\frac{3}{2}$ ويشمل النقطة $A(-2\ ;\ -3)$.

ب) عين إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل وكذا إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .

الحل :

أ) جد معادلة للمستقيم (D) الذي معامل توجيهه $-\frac{3}{2}$ ويشمل النقطة $A(-2\ ;\ -3)$.

(D) : $y=-\frac{3}{2}x+b$ ولدينا : $A\in(D)$ معناه : $-3=-\frac{3}{2}\times(-2)+b$ أي : $b=-6$

ومنه : (D) : $y=-\frac{3}{2}x-6$

ب) عين إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل وكذا إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل: $(0\ ;\ 4\ -)$ و إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب: $(6-\ ;\ 0)$

3. شرط توازي مستقيمين

نشاط 2 :

1) (D) : $ax+by+c=0$ و (D') : $a'x+b'y+c'=0$. بين أن $(D)\ //\ (D')$ يكافئ : $ab'=a'b$

2) (D) : $y=\alpha x+\beta$ و (D') : $y=\alpha' x+\beta'$. بين أن $(D)\ //\ (D')$ يكافئ : $(\alpha=\alpha')$

حل النشاط :

1) $(D)\ //\ (D')$ معناه : $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا ويكافئ أن : $-ab'=-a'b$ أي: $ab'=a'b$

2) $(D)\ //\ (D')$ معناه : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\alpha\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\alpha'\end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا ويكافئ أن $(\alpha=\alpha')$

مبرهنة 1 : (D) و (D') مستقيمان معادلتاهما $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ على الترتيب. يكون المستقيمان (D) و (D') متوازيين إذا وفقط إذا كان $ab'=a'b$

مبرهنة 2 : (D) و (D') مستقيمان معادلتاهما $y=\alpha x+\beta$ و $y=\alpha' x+\beta'$ على الترتيب.

يكون المستقيمان (D) و (D') متوازيين إذا وفقط إذا كان لهما نفس معامل التوجيه (أي : $\alpha=\alpha'$)

تمرين 75 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. (D) مستقيم معادلته $y=\sqrt{2}x-3$

أكتب معادلة للمستقيم (D') الذي يوازي المستقيم (D) ويقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها 4 .

الحل :

المستقيمان (D) و (D') متوازيان إذن لهما نفس معامل التوجيه $\sqrt{2}$ ومنه: معادلة (D') هي : $y=\sqrt{2}x+b$

إحداثيتي نقطة تقاطع (D') و محور الفواصل هما : $(4\ ;\ 0)$ إذن : $0=\sqrt{2}\times 4+b$ أي : $b=-4\sqrt{2}$

ومنه معادلة (D') هي : $y=\sqrt{2}x-4\sqrt{2}$

تمرين 77 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

بين في كل من الحالتين الآتيتين أن المستقيمين (D) و (D') متوازيان .

أ) (D) : $2x-3y=1$ $\quad$ (D') : $-x+\frac{3}{2}y=0$

ب) (D) : $-3x+7=0$ $\quad$ (D') : $x-\frac{\sqrt{3}}{5}=0$

الحل :

أ) (D) : $2x-3y=1$ $\quad$ (D') : $-x+\frac{3}{2}y=0$

$(D)\ //\ (D')$ يكافئ : $2\times\frac{3}{2}=(-1)\times(-3)$ أي : $3=3$ و هذا صحيح

ب) (D) : $-3x+7=0$ $\quad$ (D') : $x-\frac{\sqrt{3}}{5}=0$

لدينا : $ab'=(-3)\times 0=0$ و $ba'=0\times 1=0$ إذن : $ab'=a'b$ معناه : $(D)\ //\ (D')$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

IV) جملة معادلتين خطيتين لمجهولين :

نشاط 1 : ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$

نعتبر المعادلات : $(E_1) : x+2y=4$ ، $(E_2) : x-y=1$ ، $(E_3) : x+2y=-1$

(D_1) ، (D_2) ، (D_3) مستقيمات معادلاتها (E_1) ، (E_2) ، (E_3) على الترتيب .

أ) ماذا يمثل الحرفين x و y بالنسبة للمعادلات المعطاة ؟

ب) من بين المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) ما هما المستقيمان المتوازيان ؟

ج) من بين المعادلات (E_1) ، (E_2) ، (E_3) ما هي المعادلة التي تحققها الثنائية $(1\ ,\ 2)$ ؟

د) ماذا تعتبر النقطة $A(2\ ,\ 1)$ بالنسبة إلى المستقيمين (D_1) و (D_2) ؟

ه) أرسم المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) .

حل النشاط :

أ) ماذا يمثل الحرفين x و y بالنسبة للمعادلات المعطاة ؟

الحرفان x و y هما مجهولان حقيقيان بالنسبة للمعادلات المعطاة .

ب) من بين المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) ما هما المستقيمان المتوازيان ؟

لدينا : $(D_1) : x+2y=4$ شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

$(D_2) : x-y=1$ شعاع توجيهه $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$(D_3) : x+2y=-1$ شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

(D_1) و (D_3) متوازيان لأن لهما نفس شعاع التوجيه

ولدينا : $1\times1\neq1\times(-2)$ إذن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي : (D_2) لا يوازي (D_1) ولا يوازي (D_3)

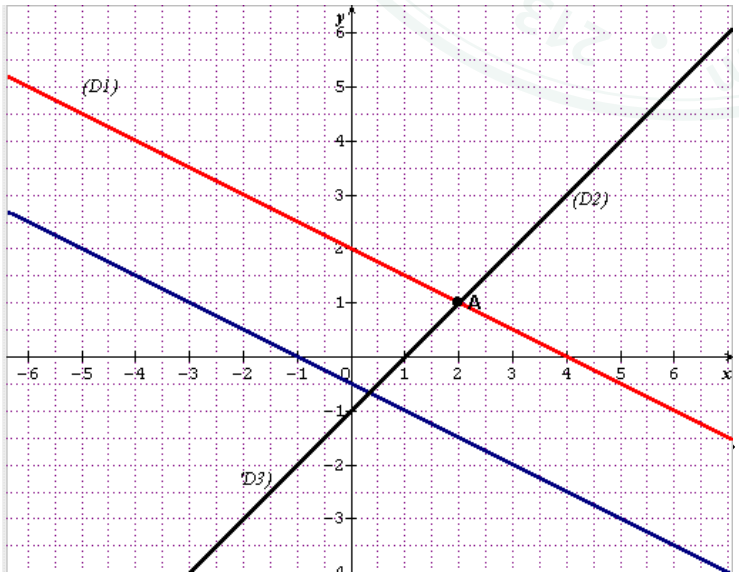
ج) من بين المعادلات (E_1) ، (E_2) ، (E_3) ما هي المعادلة التي تحققها الثنائية $(1\ ,\ 2)$ ؟

$(E_1) : x+2y=4$ ولدينا : $2+2\times1=4$

$(E_2) : x-y=1$ ولدينا : $2-1=1$

$(E_3) : x+2y=-1$ ولدينا : $2+2\times1=4$

إذن الثنائية $(1\ ,\ 2)$ تحقق كل من المعادلتين (E_1) و (E_2) ولا تحقق المعادلة (E_3).



د) ماذا تعتبر النقطة $A(2\ ,\ 1)$ بالنسبة إلى المستقيمين (D_1) و (D_2) ؟

النقطة A هي نقطة تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_2)

ه) رسم المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

تعريف 1 : نسمي معادلة خطية ذات مجهولين كل معادلة من الشكل $ax+by=c$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية معطاة و x ، y مجهولان حقيقيان.

ملاحظات :

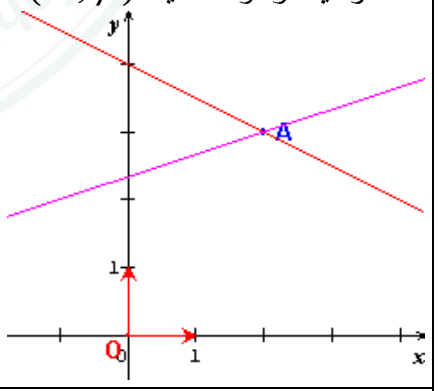
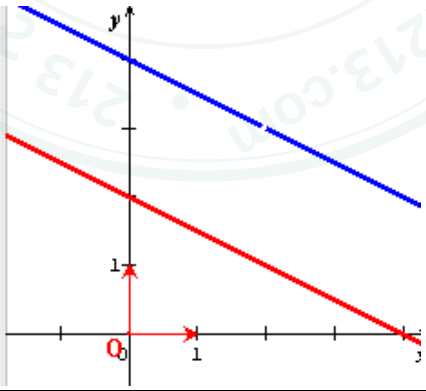
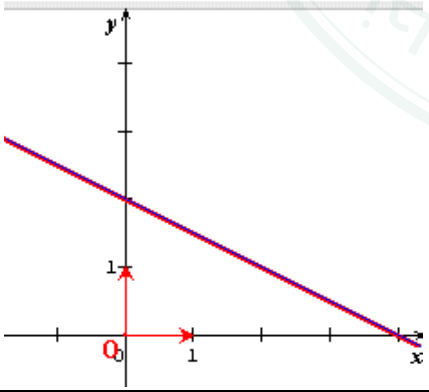
- كل معادلة مستقيم هي معادلة خطية ذات مجهولين حقيقيين
- نرمز إلى $\mathbb{R}^2$ مجموعة الثنائيات من الأعداد الحقيقية . الثنائيات $(x\,;\,y)$ من $\mathbb{R}^2$ التي تحقق معادلة خطية تسمى حلولها.
- إذا كانت $(a\,;\,b)=(0\,;\,0)$ فإن : $\mathbb{R}^2$ هي مجموعة حلول المعادلة في حالة $c=0$ و Φ هي مجموعة حلول المعادلة في حالة $c\neq 0$
- في كل معادلة خطية نعتبر أن $a\neq 0$ أو $b\neq 0$ وتعتبر معادلة مستقيم.

تعريف 2 : نسمي جملة معادلتين خطيتين لمجهولين كل جملة من الشكل $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ حيث a ، b ، c ، a' ، b' ، c' أعداد حقيقية معطاة و x ، y مجهولان حقيقيان.

حل جملة معادلتين خطيتين لمجهولين معناه إيجاد كل الثنائيات $(x\,;\,y)$ من المجموعة $\mathbb{R}^2$ التي تحقق معادلتي الجملة في آن واحد.

ملاحظة : الثنائية $(\alpha\,;\,\beta)$ حل للجملة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ معناه أن النقطة $A(\alpha\,;\,\beta)$ هي نقطة من تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_2) الذين معادلتاهما $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ على الترتيب.

ثلاث حالات ممكنة لحل الجملة (S) : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

(D) و (D') متقاطعان في النقطة $A(\alpha\,;\,\beta)$ إذن الجملة (S) تقبل حلا وحيدا وهو الثنائية $(\alpha\,;\,\beta)$ 	(D) و (D') متوازيان تماما إذن الجملة (S) لا تقبل حلول . 	(D) و (D') منطبقان إذن للجملة (S) ما لا نهاية من حلول . 
في هذه الحالة : $ab'-ba'\neq 0$	في هاتين الحالتين لدينا : $ab'-ba'=0$	
$s=\{(\alpha\,;\,\beta)\}$	$s=\Phi$	$s=\{(x\,;\,y)/\,ax+by=c\}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

مبرهنة : (S) هي الجملة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

$ab'-ba'\neq 0$ معناه أن الجملة (S) تقبل حلا وحيدا

$ab'-ba'=0$ معناه إما الجملة (S) لا تقبل حلول و إما الجملة (S) تقبل ما لانهاية من الحلول.

تعريف 3 : العدد الحقيقي $ab'-ba'$ يسمى محدد الجملة (S) ونرمز له بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

ونكتب : $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-ba'$

تطبيق : 79 صفحة 278

لتكن جملة المعادلتين (S) : $\begin{cases} 3x-y=5 \\ kx+y=11 \end{cases}$ ما هي القيم الممكنة للعدد k بحيث يكون للجملة (S) حل وحيد :

الحل :

$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ k & 1 \end{vmatrix}=3\times 1-(-1)k=k+3$

للجملة (S) حل وحيد يكافئ أن : $k+3\neq 0$ معناه أن : $k\neq -3$ أي : $k\in \mathbb{R}-\{-3\}$

طرق حل جملة معادلتين خطيتين لمجهولين :

تمرين 78 صفحة 278 ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$

في كل مما يأتي حل جملة المعادلتين ، ثم مثل الحل بيانيا :

أ) $\begin{cases} x+y=6 \\ -2x+y=0 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x\sqrt{2}+\frac{1}{2}y=2-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x\sqrt{6}-2y=0 \end{cases}$ ج) $\begin{cases} -7x+11y=43 \\ 6x+y=-16 \end{cases}$ د) $\begin{cases} -x+y=-2 \\ 7x+y=22 \end{cases}$

الحل :

أ) (S) . . . $\begin{cases} x+y=6 \\ -2x+y=0 \end{cases}$

- **طريقة التعويض :** (S) تكافئ : $\begin{cases} y=-x+6 \\ y=2x \end{cases}$ بما أن $2\neq -1$ فللجملة (s) حل وحيد .

و (S) تكافئ : $\begin{cases} 2x=-x+6 \\ y=2x \end{cases}$ ومعناه أن : $\begin{cases} 3x=6 \\ y=2x \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ وبالتالي : $s=\{(2\ ;\ 4)\}$

- **طريقة الجمع :** (S) تكافئ : $\begin{cases} y=-x+6 \\ y=2x \end{cases}$ بطرح طرف من طرف للمعادلتين نجد $3x-6=0$ معناه $x=2$

و (S) تكافئ : $\begin{cases} 2y=-2x+12 \\ y=2x \end{cases}$ بجمع طرف من طرف للمعادلتين نجد $3y=12$

معناه أن : $y=4$ وبالتالي : $s=\{(2\ ;\ 4)\}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

• **طريقة المحدد :** $(S)\ \ldots\ \begin{cases} x+y=6 \\ -2x+y=0 \end{cases}$

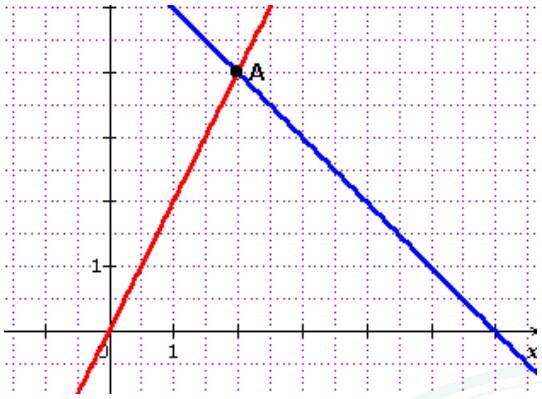
$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 1 - 1(-2) = 3$ ومنه : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ فللجملة (S) حل وحيد $(x\ ;\ y)$ حيث :

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$ و $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{12}{3} = 4$

وبالتالي : $s = \{(2\ ;\ 4)\}$

نضع : (D) : $x+y=6$

و (D') : $-2x+y=0$



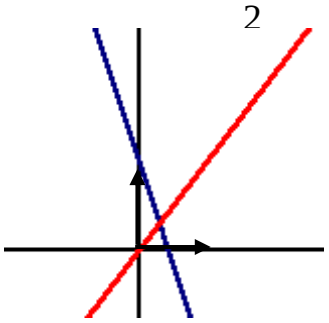
ب) $\begin{cases} x\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}y = 2-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x\sqrt{6}-2y=0 \end{cases}$ لدينا : $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \sqrt{6} & -2 \end{vmatrix} = -2\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{6}}{2} = \dfrac{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}{2}$

المحدد غير معدوم ومنه الجملة تقبل حلا وحيد $(x\ ;\ y)$ حيث :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{\frac{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}{2}} = \frac{2(-4+\sqrt{3})}{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})} = \frac{-\sqrt{2}(4-\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{-(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}(16-8\sqrt{3}+3)}{16-3}$$

$$x = \frac{19\sqrt{2}-8\sqrt{6}}{13}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{6} & 0 \end{vmatrix}}{\frac{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}{2}} = \frac{-2(2\sqrt{6}-\frac{3}{2}\sqrt{2})}{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{6}(4-\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{\sqrt{2}(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}(16-8\sqrt{3}+3)}{16-3}$$



$y = \dfrac{19\sqrt{3}-24}{13}$ وبالتالي : $s = \left\{\left(\dfrac{19\sqrt{2}-8\sqrt{6}}{13}\ ;\ \dfrac{19\sqrt{3}-24}{13}\right)\right\}$.

نضع : (D) : $x\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}y = 2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

و (D') : $x\sqrt{6}-2y=0$

ج) $\begin{cases} -7x+11y=43 \\ 6x+y=-16 \end{cases}$ لدينا : $\begin{vmatrix} -7 & 11 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -7-66 = -73$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

إذن للجملة حل وحيد $(x\ ;\ y)$ حيث :

$$x=\frac{\begin{vmatrix}43 & 11\\ -16 & 1\end{vmatrix}}{-73} \quad \text{و} \quad y=\frac{\begin{vmatrix}-7 & 43\\ 6 & -16\end{vmatrix}}{-73} \quad \text{أي :}$$

$$x=\frac{43+176}{-73}=-\frac{219}{73}=-3 \quad \text{و} \quad y=\frac{112-258}{-73}=\frac{146}{73}=2$$

وبالتالي : $s=\{(-3\ ;\ 2)\}$

نضع : (D) : $-7x+11y=43$ و (D') : $6x+y=-16$

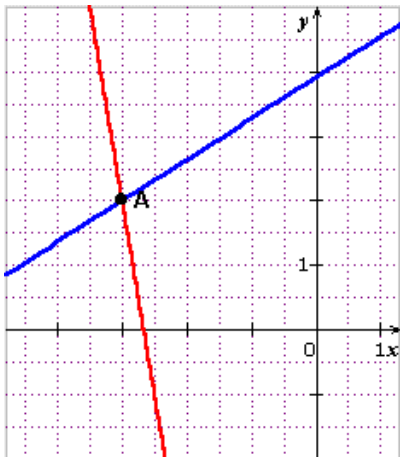
د) $\begin{cases}-x+y=-2\\ 7x+y=22\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}y=x-2\\ y=-7x+22\end{cases}$

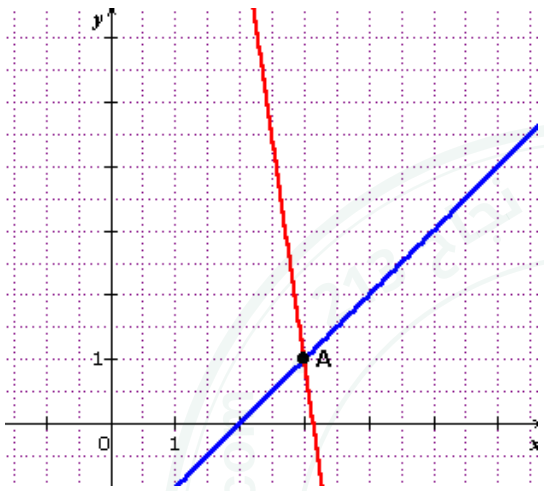
بما أن : $-7\neq 1$ فإن للجملة حل وحيد .

$$\begin{cases}-x+y=-2\\ 7x+y=22\end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases}y=x-2\\ x-2=-7x+22\end{cases}$$

ومعناه أن : $\begin{cases}y=x-2\\ 8x=24\end{cases}$ وتكافئ أن : $\begin{cases}x=3\\ y=3-2\end{cases}$

وبالتالي : $s=\{(3\ ;\ 1)\}$





تمرين 80 صفحة 278

لتكن الجملة (S) : $\begin{cases}x-\frac{1}{2}y=3\\ -6x+3y=k\end{cases}$

أ) بين أن الجملة (S) إما أنها لا تقبل حلا وإما أن لها عددا غير منته من الحلول.

ب) ما هي القيم الممكنة للعدد k بحيث يكون للجملة (S) ما لانهاية من الحلول.

الحل :

أ) $\begin{cases}x-\frac{1}{2}y=3\\ -6x+3y=k\end{cases}$ معناه أن : $\begin{cases}y=2x-6\\ y=2x+\frac{1}{3}k\end{cases}$ بما أن للمعدلتين المختصرين نفس معامل x فإن الجملة (S) إما أنها لا تقبل حلا وإما أن لها عددا غير منته من الحلول.

- طريقة أخرى : $\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -6 & 3\end{vmatrix}=3-3=0$ إذن الجملة (S) إما لا تقبل حلا وإما لها ما لانهاية من الحلول.

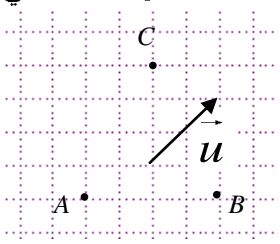
ب) للجملة (S) ما لانهاية من الحلول معناه أن : $\frac{1}{3}k=-6$ أي : $k=-18$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

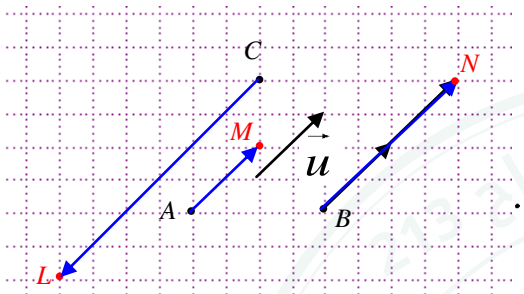
حلول تمارين الكتاب المدرسي

التمرين 27 صفحة 274

أنقل الشكل أدناه ثم علم النقط L ، M ، N المعرفة كما يأتي : $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$ ، $\overrightarrow{BN}=2\vec{u}$ ، $\overrightarrow{LC}=3\vec{u}$.



الحل :



$\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ لهما نفس المنحى ، نفس الاتجاه ونفس الطويلة.

$\overrightarrow{BN}$ و $\vec{u}$ لهما نفس المنحى ، نفس الاتجاه و $BN=2\left\|\vec{u}\right\|$.

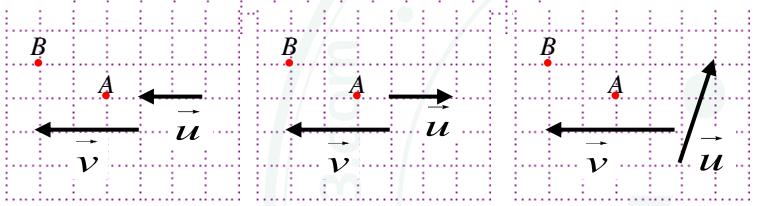
$\overrightarrow{LC}$ و $\vec{u}$ لهما نفس المنحى ، اتجاهان متعاكسان و $CL=3\left\|\vec{u}\right\|$.

التمرين28 صفحة 274

أنقل كلا من الأشكال الآتية على ورقة مسطرة ،

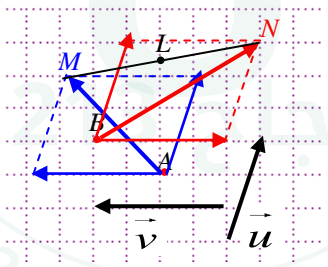
ثم علم النقط M ، N ، L حيث :

$\overrightarrow{AM}=\vec{u}+\vec{v}$ ، $\overrightarrow{BN}=\vec{u}-\vec{v}$ ، $\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{LN}$.



الحل :

الشكل 1 :

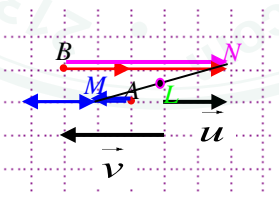


$\overrightarrow{AM}=\vec{u}+\vec{v}$

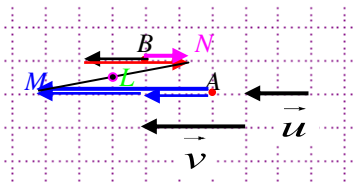
$\overrightarrow{BN}=\vec{u}-\vec{v}$

$\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{LN}$ معناه L منتصف $[MN]$

الشكل 2 :

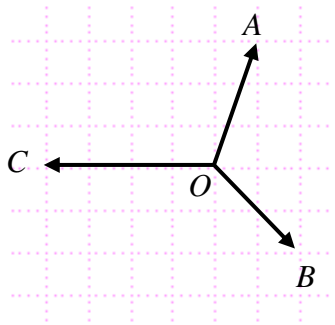


الشكل 3 :



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

التمرين29 صفحة 274

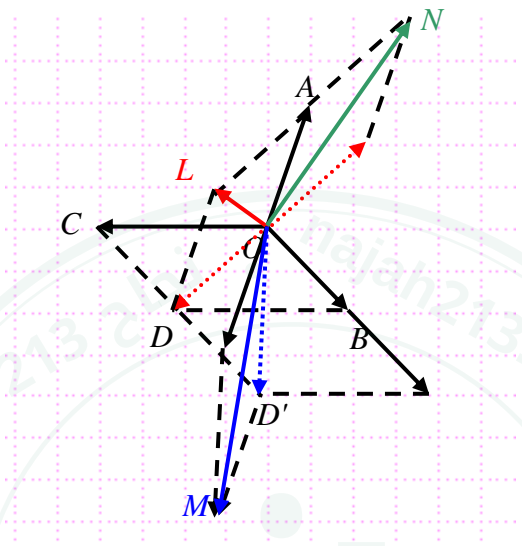


أنقل الشكل أدناه على ورقة مسطرة ، ثم علم النقط L ، M ، N بحيث :

$$\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

الحل :



نضع $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

ومنه : $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}$

نضع : $\overrightarrow{OD'}=2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$$\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD'}$$

$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}$$

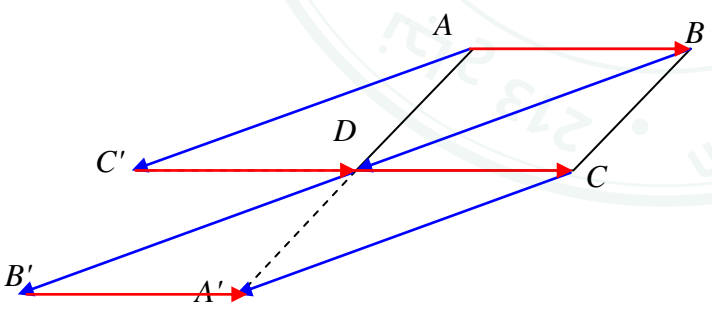
التمرين30 صفحة 274

$ABCD$ متوازي أضلاع ، النقط A' ، B' ، C' نظائر النقط A ، B ، C بالنسبة إلى النقطة D على الترتيب .

أ- ما هي الأشعة التي كل منها يساوي $\overrightarrow{AB}$ ؟

ب- ما هي الأشعة التي كل منها يساوي $\overrightarrow{AC'}$ ؟

الحل :



أ- الأشعة التي كل منها يساوي $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{C'D}=\overrightarrow{B'A'}$$

ب- الأشعة التي كل منها يساوي $\overrightarrow{AC'}$:

$$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{CA'}$$

التمرين31 صفحة 274

ABC مثلث كيفي ، أنشئ النقط D ، E ، F المعرفة كما يأتي :

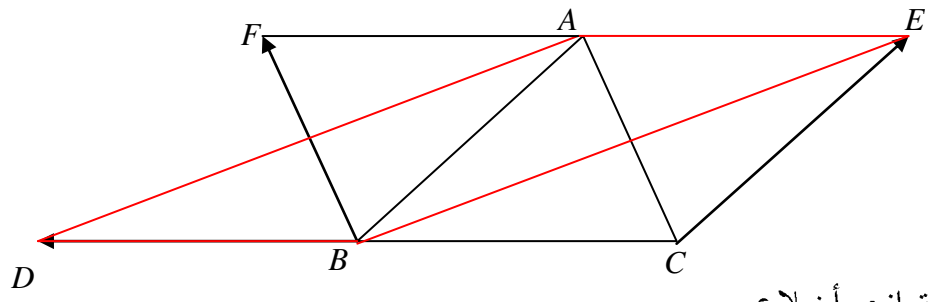
$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}\ ،\ \overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{AB}\ ،\ \overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AC}$$

ت- بين أن الرباعي $AEBD$ متوازي أضلاع .

ث- بين أن النقط E ، A ، F في استقامية .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

الحل :



أ- بين أن الرباعي $AEBD$ متوازي أضلاع .

لدينا : $\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{AB}$ أي : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BA}$ معناه أن الرباعي $ABCE$ متوازي أضلاع ومنه : $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}$

بما أن : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}$ فإن : $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{BD}$ وبالتالي : الرباعي $AEBD$ متوازي أضلاع

ب- بين أن النقط E ، A ، F في استقامية .

لدينا : $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AC}$ أي : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CA}$ معناه أن الرباعي $ACBF$ متوازي أضلاع ومنه : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CB}$

بما أن : $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}$ فإن : $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{AF}$ ومنه الشعاعان لهما نفس المنحى أي : $(EA)//(AF)$

وبين المستقيمين نقطة مشتركة A إذن النقط E ، A ، F في استقامية .

التمرين32 صفحة 274

ليكن $\vec{u}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{BC}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

أ- أكتب كلا من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ على أبسط شكل ممكن .

ب- أحسب $\vec{u}+\vec{v}$

الحل :

أ- أكتب كلا من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ على أبسط شكل ممكن .

$\vec{u}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{BC}$ معناه $\vec{u}=2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$ معناه $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$

$\vec{v}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ معناه $\vec{v}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}$

ب- أحسب $\vec{u}+\vec{v}$

$\vec{u}+\vec{v}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}$ معناه $\vec{u}+\vec{v}=3\overrightarrow{AB}$.

التمرين33 صفحة 274

A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية .

أنشئ النقطتين M ، N المعرفتين بالعلاقتين $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$

الحل :

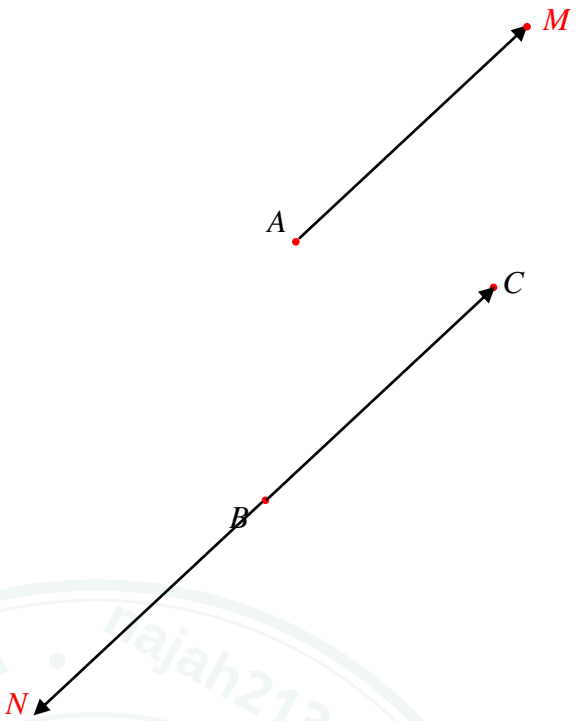
$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ معناه $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

يكافئ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ ومعناه $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$ معناه $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

يكافئ $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}$ ومعناه $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{CB}$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com



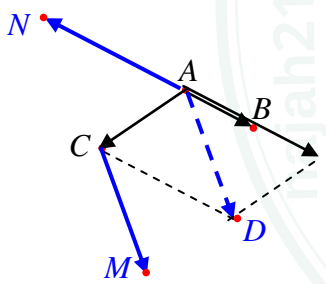
التمرين34 صفحة 274

A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية .

أ- أنشئ النقطتين N ، M المعرفتين بالعلاقتين الآتيتين على الترتيب :

$\overrightarrow{AN}=-2\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

ب- بين أن النقطة C منتصف $[MN]$.



الحل :

أ- نضع $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ وننشئ النقطة M حيث : $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AD}$

ب- لدينا : $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}$ ومنه : $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AC}$

إذن : $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$ وبالتالي : النقطة C منتصف $[MN]$.

التمرين35 صفحة 274

A ، B ، C ، D أربع نقط متمايزة. بين أن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

الحل :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}$ يكافئ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

لأن الشعاعان $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{DB}$ متعاكسان .

التمرين36 صفحة 274

A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي .أي المساويات الآتية تعني أن C منتصف $[AB]$ ؟

أ) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ ب) $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CB}$ ج) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ د) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

الحل :

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ تكافئ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ وتعني أن C منتصف $[AB]$.

$\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CB}$ تكافئ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ وتعني أن C منتصف $[AB]$.

$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$ تكافئ $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ وتعني $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$ تكافئ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ وتعني أن C منتصف $[AB]$

التمرين37 صفحة 274

A ، B نقطتان من المستوي .

أ) بفرض I منتصف $[AB]$. بين أنه من أجل كل نقطة M من المستوي فإن $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

ب) بفرض $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$. بين أن النقطة I هي منتصف $[AB]$.

ج) صغ جملة واحدة ما برهنت على صحته في أ) و ب) .

الحل :

أ) بفرض I منتصف $[AB]$. بين أنه من أجل كل نقطة M من المستوي فإن $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

نفرض I منتصف $[AB]$ معناه $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ ومنه : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}$

ب) بفرض $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$. بين أن النقطة I هي منتصف $[AB]$.

نفرض $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ معناه $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}$ يكافئ $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

وبالتالي النقطة I هي منتصف $[AB]$.

ج) صغ جملة واحدة ما برهنت على صحته في أ) و ب) .

تكون النقطة I منتصف $[AB]$ إذا وفقط إذا كان من أجل كل نقطة M من المستوي : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

التمرين38 صفحة 274

ABC مثلث . G مركز ثقله . A' منتصف $[BC]$.

د) بين أن : $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA'}$

ه) بين أن : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

الحل :

أ) لدينا A' منتصف $[BC]$ إذن : $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$

ومنه : $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'C}=2\overrightarrow{GA'}$

ب) بين أن : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'A}+2\overrightarrow{GA'}=\overrightarrow{A'A}+3\overrightarrow{GA'}$

بما أن G مركز ثقل المثلث ABC فإن : $AA'=3\,GA'$ و الشعاعان $\overrightarrow{GA'}$ و $\overrightarrow{AA'}$ لهما نفس الاتجاه

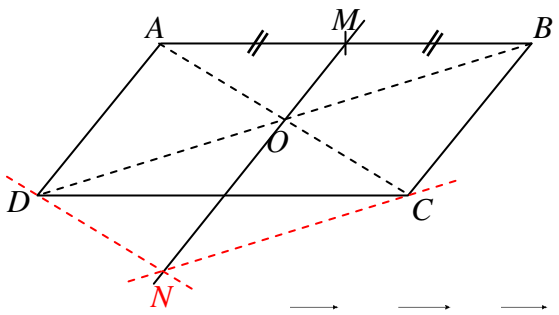
إذن : $\overrightarrow{AA'}=3\overrightarrow{GA'}$ وبالتالي : $\overrightarrow{A'A}+3\overrightarrow{GA'}=\vec{0}$ إذن : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

التمرين39 صفحة 275

$ABCD$ متوازي أضلاع مركزه النقطة O . M منتصف $[AB]$ ، المستقيم الذي يشمل النقطة D ويوازي (AC) يقطع المستقيم الذي يشمل النقطة C ويوازي (BD) في النقطة N . بين أن النقط M ، O ، N في استقامية.

الحل :



باستعمال الأشعة نجد :

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$ وكذلك $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$

إذن : $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$

بما أن : M منتصف $[AB]$ فإن : $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

ومنه: $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

وبما أن : $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه النقطة O فإن : $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}$

ومنه : $2\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=-(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=-\overrightarrow{ON}$

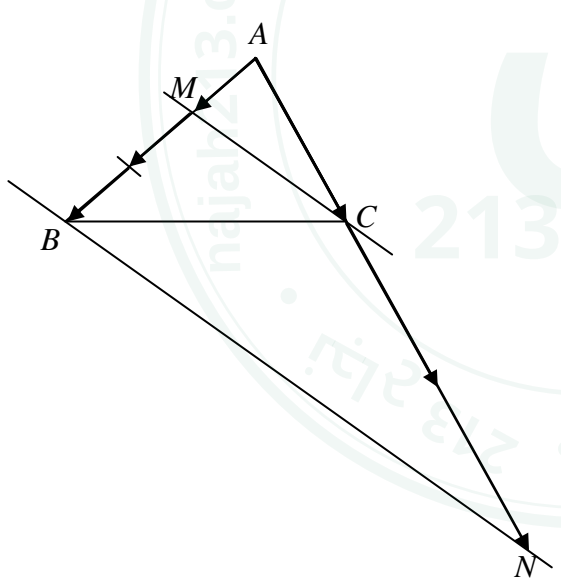
وبالتالي: $\overrightarrow{ON}=-2\overrightarrow{OM}$ ومنه $(OM)\ //\ (ON)$ وللمستقيمين نقطة مشتركة إذن: النقط M ، O ، N في استقامية .

التمرين40 صفحة 275

أرسم مثلثا ABC ، وعلم النقطتين M وN بحيث : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AC}$.

بين أن المستقيمين (CM) و (BN) متوازيان.

الحل :



باستعمال الأشعة نجد :

$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}$

ومنه : $\overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AC}$

إذن : $\overrightarrow{BN}=3(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})$

وبالتالي : $\overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{MC}$

ومنه : الشعاعان $\overrightarrow{BN}$ و $\overrightarrow{MC}$ لهما نفس المنحى

ومنه : المستقيمان (CM) و (BN) متوازيان.

التمرين41 صفحة 275

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين من المستوي ومرتبطان خطيا .

أ) بين أن الشعاعين $2\vec{u}+3\vec{v}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا .

ب) بين أن الشعاعين $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا وذلك من أجل كل عددين حقيقيين α و β .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

الحل :

أ) بين أن الشعاعين $2\vec{u}+3\vec{v}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا .

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين من المستوي ومرتبطان خطيا معناه أنه يوجد عدد حقيقي غير معدوم k حيث :

$\vec{v}=k.\vec{u}$ ومنه : $2\vec{u}+3\vec{v}=2\vec{u}+3k\vec{u}=(2+3k)\vec{u}$

بوضع $(2+3k=k')$ نجد $2\vec{u}+3\vec{v}=k'\vec{u}$ حيث k' عدد حقيقي

وبالتالي : الشعاعان $2\vec{u}+3\vec{v}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا .

ملاحظة : يمكن أن يكون $k'=0$ ويصبح $2\vec{u}+3\vec{v}=\vec{0}$ والشعاع المعدوم مرتبط خطيا مع أي شعاع.

ب) بين أن الشعاعين $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا وذلك من أجل كل عددين حقيقيين α و β .

$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\alpha\vec{u}+\beta k\vec{u}=(\alpha+\beta k)\vec{u}$

بوضع $(\alpha+\beta k=k')$ نجد $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=k'\vec{u}$ حيث k' عدد حقيقي

ومنه : الشعاعان $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا وذلك من أجل كل عددين حقيقيين α و β .

التمرين42 صفحة 275

$[AB]$ قطعة مستقيمة طولها $9\ cm$. C نقطة منها حيث $AC=5\ cm$.

جد العدد الحقيقي x حيث : $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}$

الحل :

لدينا : الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما نفس المنحى ونفس الاتجاه و $AB=9\ cm$ و $AC=5\ cm$

ومنه : $AC=\frac{5}{9}AB$ إذن : $\overrightarrow{AC}=\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}$ وبالتالي : $x=\frac{5}{9}$.

التمرين43 صفحة 275

$[AB]$ قطعة مستقيم .

– بين أنه إذا كانت M تنتمي إلى $[AB]$ فإنه يوجد عدد حقيقي k من $[0\ ;\ 1]$ حيث : $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$

الحل :

لدينا : إذا كانت M تنتمي إلى $[AB]$ فإن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ لهما نفس المنحى ونفس الاتجاه

و $AM\leq AB$ أي : $AM=k\times AB$ حيث k عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $[0\ ;\ 1]$

ومنه $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ حيث k عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $[0\ ;\ 1]$.

التمرين44 صفحة 275

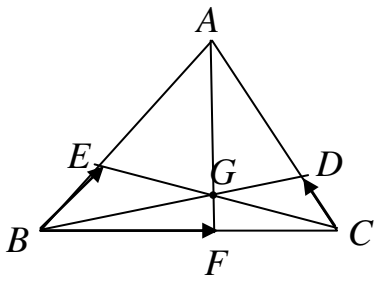
ABC مثلث كيفي . النقط D ، E ، F معرفة كما يأتي : $\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{CA}=4\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

و G منتصف $[CE]$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

– بين أن (DB) و (AF) يتقاطعان في النقطة G . (إرشاد : عبر عن الشعاعين $\overrightarrow{BG}$ ، $\overrightarrow{BD}$ بدلالة $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA}$ وكذلك بالنسبة للشعاعين $\overrightarrow{AG}$ ، $\overrightarrow{AF}$)

الحل :



- $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE})$

ومنه : $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

ومنه : $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

وبالتالي : $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{6}(3\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$ و $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{4}(3\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$ إذن : $4\overrightarrow{BD}=6\overrightarrow{BG}$ أي : $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$

ومنه : الشعاعان $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{BD}$ لهما نفس المنحى وبالتالي النقط B ، D ، G في استقامية.

- $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{6}(-5\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC})$

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{BA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{5}(-5\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC})$

وبالتالي : $6\overrightarrow{AG}=5\overrightarrow{AF}$ أي : $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AF}$

ومنه : $\overrightarrow{AG}$ ، $\overrightarrow{AF}$ لهما نفس المنحى وبالتالي النقط A ، F ، G في استقامية.

خلاصة : النقطة G تنتمي إلى المستقيمين (DB) و (AF) .

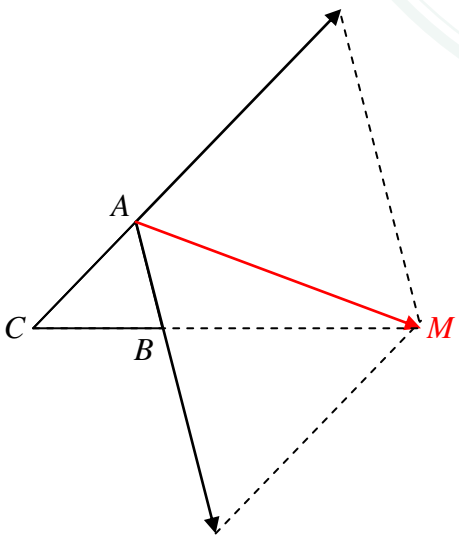
التمرين45 صفحة 275

A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية .

أ- أنشئ النقطة Mالمعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

ب- بين أن النقط C ، B ، M في استقامية .

(إرشاد : عبر عن الشعاع $\overrightarrow{CM}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$)



الحل :

أ- أنشئ النقطة Mالمعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

ب- بين أن النقط C ، B ، M في استقامية .

$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ معناه $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

ومعناه $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ يكافئ $\overrightarrow{CM}=3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

أي : $\overrightarrow{CM}=3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA})$ يكافئ $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CB}$

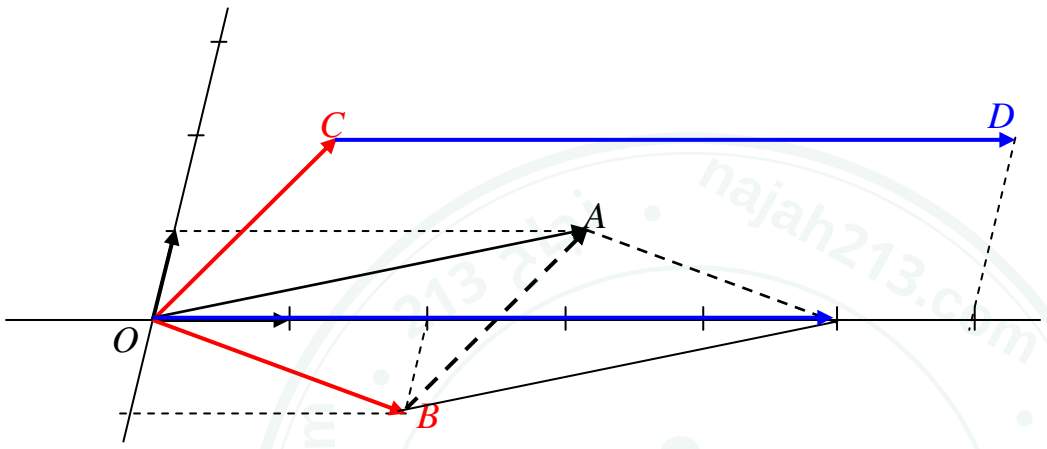
وبالتالي $(CM)\ //\ (CB)$

وبما أن للمستقيمين نقطة مشتركة C فإن النقط C ، B ، M في استقامية .

التمرين 49 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. ليكن $A(3\ ;\ 1)$ ، $\overrightarrow{OB}=2\,\vec{i}-\vec{j}$ ، $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. علم النقط A ، B ، C ، D .

الحل :



التمرين50 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. ليكن $\vec{u}=4\,\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{v}=-2\,\vec{i}+3\,\vec{j}$

أ) أحسب مركبتي كل من الأشعة الآتية : $\vec{u}+\vec{v}$ ؛ $\vec{u}+2\,\vec{v}$ ؛ $\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

ب) أرسم ممثلا مبدأه O لكل من الأشعة السابقة .

الحل :

أ) أحسب مركبتي كل من الأشعة الآتية :

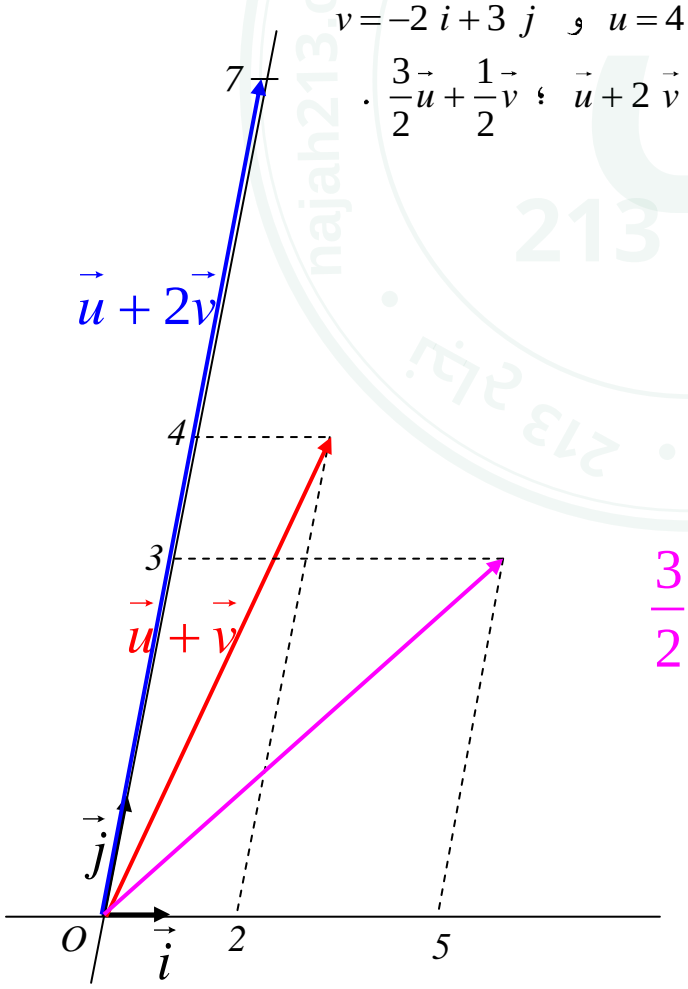
$\vec{u}+\vec{v}$ ؛ $\vec{u}+2\,\vec{v}$ ؛ $\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

$\vec{u}+\vec{v}=2\,\vec{i}+4\,\vec{j}$ ومنه : $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

$\vec{u}+2\,\vec{v}=7\,\vec{j}$ ومنه : $\vec{u}+2\,\vec{v}\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$

$\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}=5\,\vec{i}+3\,\vec{j}$ ومنه : $\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

ب) أرسم ممثلا مبدأه O لكل من الأشعة السابقة .



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

التمرين 51 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

من أجل أية قيمة لعدد x تكون النقط A ، B ، C في استقامية في كل حالة من الحالتين الآتيتين :

أ) $A(x\ ;\ 3)$ ، $B(4\ ;\ 5)$ ، $C(7\ ;\ 6)$

ب) $A(x\ ;\ 5)$ ، $B(x+4\ ;\ 3)$ ، $C(7\ ;\ 1)$

الحل :

أ) $A(x\ ;\ 3)$ ، $B(4\ ;\ 5)$ ، $C(7\ ;\ 6)$

النقط A ، B ، C في استقامية تعني أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطان خطيا

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-x\\5-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}7-4\\6-5\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-x\\2\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

إذن : النقط A ، B ، C في استقامية تعني أن $4-x=6$ أي : $x=-2$

ب) $A(x\ ;\ 5)$ ، $B(x+4\ ;\ 3)$ ، $C(7\ ;\ 1)$

النقط A ، B ، C في استقامية تعني أن الشعاعين $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$ مرتبطان خطيا

لدينا : $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}x-7\\5-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}x+4-7\\3-1\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}x-7\\4\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}x-3\\2\end{pmatrix}$

إذن : النقط A ، B ، C في استقامية تعني أن $2x-14=4x-12$ أي : $2x=-2$ معناه $x=-1$

التمرين 53 صفحة 276

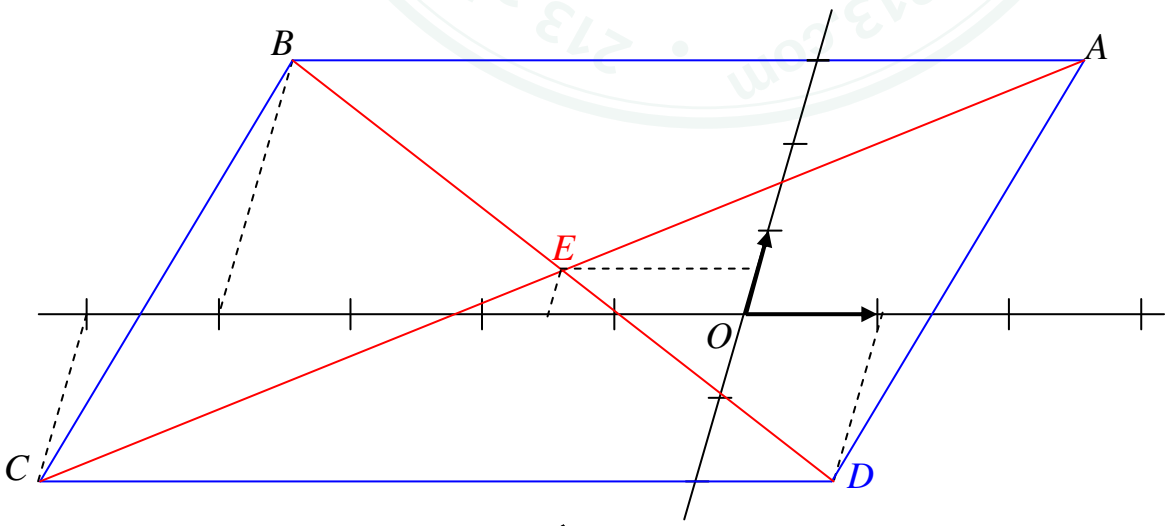
ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. نعتبر النقط $A(2\ ;\ 3)$ ؛ $B(-4\ ;\ 3)$ ؛ $C(-5\ ;\ -2)$.

أ) علم النقط A ، B ، C ، ثم أحسب إحداثيتي النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

ب) أحسب إحداثيتي النقطة E مركز $ABCD$.

الحل :

أ) تعليم النقط A ، B ، C .



حساب إحداثيتي النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع معناه أن $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

نضع $D(x\ ;\ y)$ ومنه : $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\end{pmatrix}$ ولدينا : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5+4\\-2-3\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ يكافئ أن : $\begin{cases}x-2=-1\\y-3=-5\end{cases}$ ومعناه أن : $\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$ أي : $D(1\ ;\ -2)$

ب) حساب إحداثيتي النقطة E مركز $ABCD$.

النقطة E هي منتصف $[AC]$ و منتصف $[BD]$ إذن : $E\left(\frac{2-5}{2}\ ;\ \frac{3-2}{2}\right)$ أي : $E\left(\frac{-3}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

التمرين 54 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. نعتبر النقط $A(0\ ;\ 3)$ ؛ $B(3\ ;\ 0)$ ؛ $C(-1\ ;\ 2)$ ؛ $D(4\ ;\ -4)$.

أ) هل المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان ؟

ب) M نقطة فاصلتها 4 . عين ترتيب M بحيث يكون المستقيمان (AB) و (CM) متوازيين .

الحل :

أ) هل المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان ؟

المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان معناه أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا.

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-0\\0-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4+1\\-4-2\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$

لدينا : $3 \times (-6) = -18$ و $5 \times (-3) = -15$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي :

المستقيمان (AB) و (CD) غير متوازيين .

ب) M نقطة فاصلتها 4 . عين ترتيب M بحيث يكون المستقيمان (AB) و (CM) متوازيين .

المستقيمان (AB) و (CM) متوازيان معناه أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CM}$ مرتبطان خطيا.

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}4+1\\y-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CM}$ مرتبطان خطيا يكافئ أن : $3(y-2) = 5 \times (-3)$ ومعناه أن $3y = -9$ أي : $y = -3$.

التمرين 55 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

بين فيما يأتي أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا ، ثم عبر عن أحدهما بدلالة الآخر .

ج) $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$ و $\vec{v}=(\vec{i}+5\vec{j})+\frac{1}{2}(\vec{i}-\vec{j})$.

د) $\vec{u}=(2-\sqrt{3})\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{v}=\vec{i}+(2+\sqrt{3})\vec{j}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

الحل :

أ) $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$ و $\vec{v}=(\vec{i}+5\vec{j})+\frac{1}{2}(\vec{i}-\vec{j})$.

ب) $\vec{u}=(2-\sqrt{3})\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{v}=\vec{i}+(2+\sqrt{3})\vec{j}$.

التمرين 56 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$.

عين في كل مما يأتي العدد x بحيث يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا.

أ) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x+1\\6\end{pmatrix}$ ب) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\-5\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}2-x\\1\end{pmatrix}$ ج) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\x\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\27\end{pmatrix}$

الحل :

أ) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x+1\\6\end{pmatrix}$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $1\times6-2(x+1)=0$ معناه $x=2$

ب) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\-5\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}2-x\\1\end{pmatrix}$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $x-(-5)(2-x)=0$ معناه $x=\frac{5}{2}$

ج) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\x\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\27\end{pmatrix}$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $x^2=81$ يكافئ أن $x=-9$ أو $x=9$.

التمرين 57 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$. نعتبر النقطتين $A(-3\ ;\ 1)$ ؛ $B(7\ ;\ 6)$. M نقطة فاصلتها 1 .

عين ترتيب النقطة M بحيث تكون النقط A ، M ، B في استقامية .

الحل :

النقط A ، M ، B في استقامية معناه أن الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا

نضع $M(1\ ;\ y)$ ومنه : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}1+3\\y-1\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}4\\y-1\end{pmatrix}$ ولدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7+3\\6-1\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}$

النقط A ، M ، B في استقامية معناه أن : $10(y-1)=5\times4$ ويكافئ $10\,y=30$ يعني أن : $y=3$.

إذن : ترتيب النقطة M هو 3 .

التمرين 58 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$. نعتبر النقطتين $A(-3\ ;\ 1)$ ؛ $B(7\ ;\ 6)$.

أوجد علاقة بين العددين الحقيقيين x و y والتي من أجلها تكون النقطة $M(x\ ;\ y)$ تنتمي إلى المستقيم (AB) .

الحل :

$M\in(AB)$ معناه أن : النقط A ، M ، B في استقامية ومعناه أن الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

لدينا : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-1\end{pmatrix}$ ولدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7+3\\6-1\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}$

$M \in (AB)$ معناه أن : $5(x+3) = 10(y-1)$ ويكافئ $5x + 15 = 10y - 10$

يعني أن : $5x + 25 = 10y$ ويكافئ أن : $x + 5 = 2y$.

التمرين 59 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. $ABCD$ متوازي أضلاع ، النقط E ، F ، G ، H معرفة كما يلي :

$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AE}$ ؛ $\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DF}$ ؛ $\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CG}$ ؛ $\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{BH}$

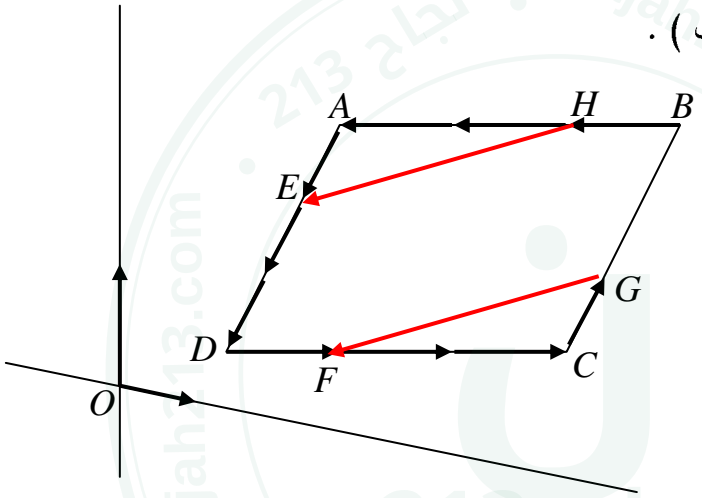
ج) أنجز شكلا مناسبا.

د) بين أن الشعاعين $\overrightarrow{HE}$ و $\overrightarrow{GF}$ متساويان ، واستنتج نوع الرباعي $EFGH$.

ه) عين إحداثيي كل نقطة من النقط E ، F ، G ، H في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ ، ثم تحقق من إجابة الجزء (ب) تحليليا (أي باستعمال الإحداثيات) .

الحل :

أ) أنجز شكلا مناسبا.



ب) بين أن الشعاعين $\overrightarrow{HE}$ و $\overrightarrow{GF}$ متساويان ، واستنتج نوع الرباعي $EFGH$.

$\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GF}$

بما أن : $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{GF}$ فإن : $(HE)\ //\ (GF)$ و $HE = GF$ ومنه الرباعي $EFGH$ هو متوازي أضلاع.

ج) عين إحداثيي كل نقطة من النقط E ، F ، G ، H في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ ، ثم تحقق من إجابة الجزء (ب) تحليليا (أي باستعمال الإحداثيات) .

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$ ومنه : $E(\frac{1}{3}\ ;\ 1)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ ومنه : $F(1\ ;\ \frac{2}{3})$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

$\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ ومنه : $G(\frac{2}{3}\ ;\ 0)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

$\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ ومنه : $H(0\ ;\ \frac{1}{3})$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

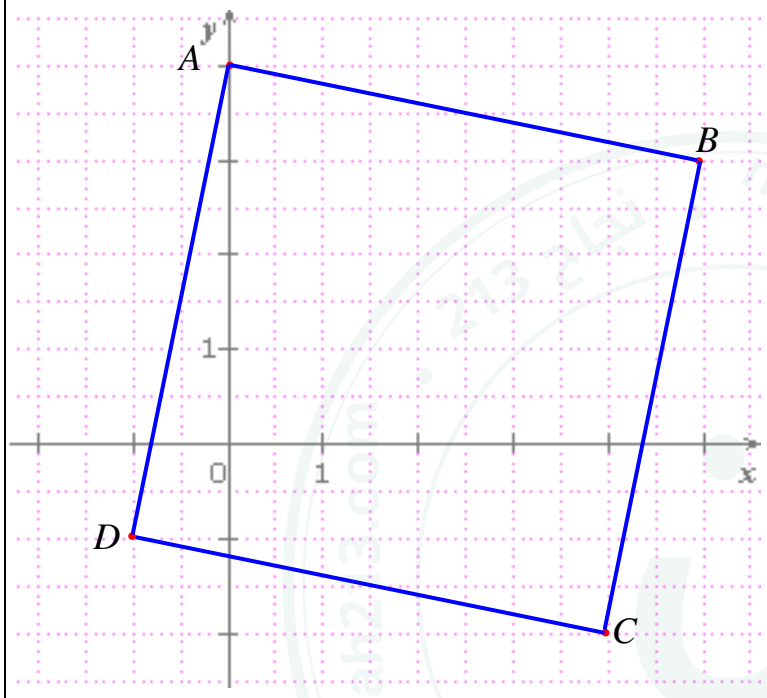
$\overrightarrow{HE}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}-0\\1-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ ومنه : $\overrightarrow{HE}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix}1-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}-0\end{pmatrix}$ ومنه : $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{GF}$.

التمرين 60 صفحة 276

في معلم متعامد ومتجانس $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$ علم النقط $A(0\ ;4)$ ؛ $B(5\ ;3)$ ؛ $C(4\ ;-2)$ ؛ $D(-1\ ;-1)$.

تحقق من أن الرباعي $ABCD$ مربع.

الحل :



لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-0\\3-4\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4-5\\-2-3\end{pmatrix}$ ،

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1-4\\-1+2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-0\\-2-4\end{pmatrix}$ ،

أي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$ ،

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$ ،

لدينا الشعاعان $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ متعاكسان

إذن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

ومنه : الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

لدينا : $AB=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$ و $BC=\sqrt{(-1)^2+(-5)^2}=\sqrt{26}$ إذن $AB=BC$

ومنه : الرباعي $ABCD$ معين.

لدينا : $AC=\sqrt{4^2+(-6)^2}=\sqrt{52}$ و $AB^2+BC^2=26+26=52=AC^2$ وحسب مبرهنة فيثاغورس المثلث ABC قائم في B ومنه : الرباعي $ABCD$ مربع.

التمرين 61 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$. $ABCD$ متوازي أضلاع ، النقطة A' نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة D ، النقطة M منتصف $[CD]$.

أ) بين لماذا يمكن اعتبار $(B\ ;\overrightarrow{BC}\ ;\overrightarrow{BA})$ معلما للمستوي ؟

ب) عين إحداثيي كل من النقط A ، B ، C ، D ، M ، A' في هذا المعلم.

ج) بين باستعمال الإحداثيات المحصل عليها أن النقطة M هي منتصف $[BA']$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

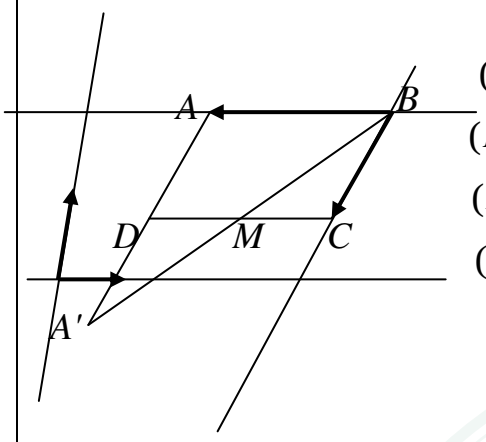
najah213.com · نجاح 213

الحل :

أ) بين لماذا يمكن اعتبار $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ معلما للمستوي ؟

لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع إذن النقط الأربعة متمايزة و (BC) لا يوازي (BA) ومنه الشعاعان $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA}$ غير مرتبطين خطيا أي الثنائية $(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ تشكل أساسا للمستوي وبالتالي : $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ معلم للمستوي

ب) عين إحداثيي كل من النقط A ، B ، C ، D ، M ، A' في هذا المعلم.



لدينا : $\overrightarrow{BA}=0\overrightarrow{BC}+1\overrightarrow{BA}$ ومنه : $A(0\ ;\ 1)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BB}=0\overrightarrow{BC}+0\overrightarrow{BA}$ ومنه : $B(0\ ;\ 0)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BC}=1\overrightarrow{BC}+0\overrightarrow{BA}$ ومنه : $C(1\ ;\ 0)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BD}=1\overrightarrow{BC}+1\overrightarrow{BA}$ ومنه : $D(1\ ;\ 1)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

ومنه : $M(1\ ;\ \frac{1}{2})$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$ ومنه : $A'(2\ ;\ 1)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

ج) بين باستعمال الإحداثيات المحصل عليها أن النقطة M هي منتصف $[BA']$.

نفرض أن : M' منتصف $[BA']$ إذن : $M'(\frac{0+2}{2}\ ;\ \frac{0+1}{2})$ ومنه : $M'(1\ ;\ \frac{1}{2})$

إذن M' منطبقة على M ومنه النقطة M هي منتصف $[BA']$.

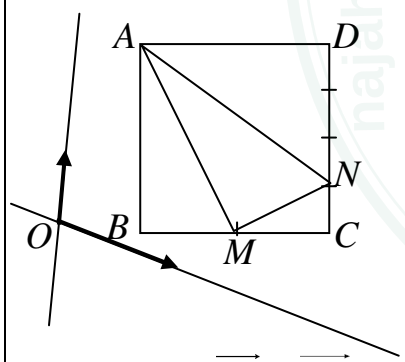
التمرين 62 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. $ABCD$ مربع ،

النقطة M منتصف $[BC]$ والنقطة N معرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{CN}$

أ) بين لماذا يمكن اعتبار $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ معلما متعامدا ومتجانسا للمستوي ؟

ب) بين تحليليا أن المثلث AMN قائما في M .



الحل :

أ) بما أن $ABCD$ مربع فإن النقط A ، B ، C متمايزة وليست في استقامية ومنه : $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي : $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ معلم للمستوي وبما أن $BA = BC$ و $(BA)\perp(BC)$ فإن :

$(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي .

ب) بين تحليليا أن المثلث AMN قائما في M .

في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ لدينا : $A(0\ ;\ 1)$ ؛ $M(\frac{1}{2}\ ;\ 0)$ ؛ $N(1\ ;\ \frac{1}{4})$

$AN^2=(1-0)^2+(\frac{1}{4}-1)^2=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$ $\qquad$ $AM^2=(\frac{1}{2}-0)^2+(0-1)^2=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$MN^2 = (1-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{4}-0)^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{16} = \frac{5}{16}$ $\qquad$ $MN^2 + AM^2 = \frac{5}{16}+\frac{5}{4} = \frac{5+20}{16} = \frac{25}{16}$

ومنه : $MN^2 + AM^2 = AN^2$ إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المثلث AMN قائما في M .

التمرين 68 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

(D) مستقيم معادلته $3x-5y=7$ ، أوجد شعاع توجيه للمستقيم (D) ، وعين معامل توجيهه.

الحل :

شعاع التوجيه المستقيم (D) هو $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ ومعامل توجيهه : $\frac{3}{5}$ يمكن أن نعتبر $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه .

التمرين 69 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

(D') مستقيم معادلته $2x\sqrt{3}+2y=-4$ ، أوجد شعاع توجيه للمستقيم (D') ، وعين معامل توجيهه.

الحل :

شعاع التوجيه المستقيم (D') هو $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\2\sqrt{3}\end{pmatrix}$ ومعامل توجيهه : $-\sqrt{3}$ يمكن أن نعتبر $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه .

التمرين 70 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. (D) مستقيم معادلته $3x=-7$.

– جد شعاع توجيه للمستقيم (D) ، هل للمستقيم (D) معامل توجيه ؟

الحل :

شعاع التوجيه المستقيم (D) هو $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ و يمكن أن نعتبر $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه .

المستقيم (D) يوازي حامل محور التراتيب ليس له معامل توجيه.

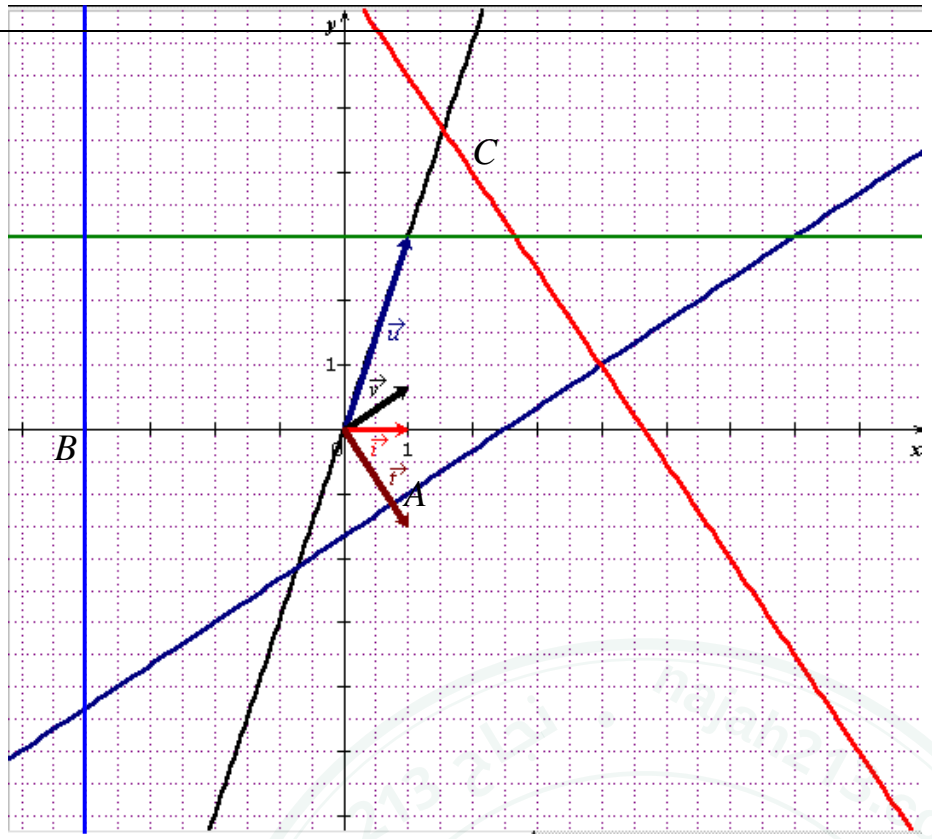
التمرين 71 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. أرسم المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) ، (D_4) ، (D_5) حيث :

$(D_1) : y = 3\,x$ $\qquad$ $(D_2) : y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ $\qquad$ $(D_3) : x = -4$

$(D_4) : y=-\frac{3}{2}x+7$ $\qquad$ $(D_5) : y=3$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com



الحل :

$(D_1) : y = 3x$

شعاع توجيهه : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

ويشمل النقطة $O(0\ ;\ 0)$

$(D_2) : y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

شعاع توجيهه : $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

ويشمل النقطة $A(1\ ;\ -1)$

$(D_3) : x = -4$

شعاع توجيهه : $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

ويشمل النقطة $B(-4\ ;\ 0)$

$(D_4) : y = -\frac{3}{2}x + 7$

شعاع توجيهه : $\vec{t}\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $C(2\ ;\ 4)$

$(D_5) : y = 3$

شعاع توجيهه : $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $D(0\ ;\ 3)$

التمرين 72 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. لتكن النقط $A(1\ ;\ 3)$ ، $B(3\ ;\ 1)$ ، $C(3\ ;\ 4)$.

أكتب معادلة لكل مستقيم من المستقيمات (AB) ، (BC) ، (AC)

على الشكل: $m\,y + p\,x = n$ ، ثم على الشكل : $y = a\,x + b$.

الحل :

- معادلة المستقيم (AB) : لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\1-3\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ وهو شعاع التوجيه للمستقيم (AB)

لتكن $M(x\ ;\ y)$ نقطة من المستوي . $M \in (AB)$ معناه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-3\end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا

ومعناه أن : $-2(x-1) = 2(y-3)$ أي : $2x + 2y - 4 = 0$ معناه $x + y - 2 = 0$ يكافئ $y = -x + 2$

- معادلة المستقيم (BC) : لدينا $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3-3\\4-1\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ وهو شعاع التوجيه للمستقيم (BC)

معادلة المستقيم (BC) من الشكل $a\,x + b\,y + c = 0$ حيث $b = 0$ و $a = 3$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

أي : المعادلة هي : $3x + 0y + c = 0$ بما أن إحداثيتي النقطة B تحقق المعادلة فلدينا :

$3 \times 3 + 0 \times 1 + c = 0$ معناه أن : $c = -9$ وبالتالي : معادلة المستقيم (BC) هي $3x - 9 = 0$ أي : $x = 3$

لا يمكن كتابة معادلة المستقيم (BC) على الشكل : $y = ax + b$ لأن $b = 0$.

- معادلة المستقيم (AC) : لدينا $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-1\\4-3\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ وهو شعاع التوجيه للمستقيم (AC)

معادلة المستقيم (AC) من الشكل $ax + by + c = 0$ حيث $b = -2$ و $a = 1$

أي : المعادلة هي : $x - 2y + c = 0$ بما أن إحداثيتي النقطة A تحقق المعادلة فلدينا :

$3 - 2 \times 1 + c = 0$ معناه أن : $c = 5$ وبالتالي : معادلة المستقيم (AC) هي $x - 2y + 5 = 0$

ومعناه : $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

التمرين 73 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. لتكن النقطة $A(3\ ;\ -2)$ والشعاع $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

جد معادلة للمستقيم الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}$ شعاع توجيه له .

الحل :

الطريقة 1 :

لتكن $M(x\ ;\ y)$ نقطة من المستوي . لدينا : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y+2\end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$M \in (AB)$ معناه أن : $(x-3) = 2(y+2)$ - ومعناه أن : $x + 2y + 1 = 0$.

الطريقة 2 : معادلة المستقيم هي من الشكل $ax + by + c = 0$ شعاع التوجيه $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

ومنه : $b = -2$ و $a = -1$ إذن : $-x - 2y + c = 0$ - بما أن المستقيم يشمل A فإن : $-3 + 4 + c = 0$

ومنه : $c = -1$ إذن : المعادلة هي : $-x - 2y - 1 = 0$

الطريقة 3 : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه للمستقيم كذلك $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه لهذا المستقيم

ومنه : معادلته هي : $y = -\frac{1}{2}x + b$ بما أن المستقيم يشمل A فإن : $-2 = -\frac{1}{2} \times 3 + b$ أي : $b = -\frac{1}{2}$

ومنه : $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

التمرين 74 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

جد معادلة للمستقيم الذي معامل توجيهه $\frac{1}{2}$ ويقطع محور التراتيب في النقطة التي ترتيبها -5 .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

الحل :

المستقيم يقطع محور التراتيب في النقطة التي ترتيبها $5-$ معناه أن $(0\ ;\ -5)$ هي إحداثيتي هذه النقطة .

معادلة المستقيم هي : $y=\frac{1}{2}x+b$ ولدينا : $-5=\frac{1}{2}\times 0+b$ أي : $b=-5$ إذن : $y=\frac{1}{2}x-5$

التمرين 75 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. (D) مستقيم معادلته $y=\sqrt{2}x-3$ أكتب معادلة للمستقيم (D') الذي يوازي المستقيم (D) ويقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها 4 .

الحل :

المستقيمان (D) و (D') متوازيان إذن لهما نفس معامل التوجيه $\sqrt{2}$ ومنه: معادلة (D') هي : $y=\sqrt{2}x+b$

إحداثيتي نقطة تقاطع (D') و محور الفواصل هما : $(4\ ;\ 0)$ إذن : $0=\sqrt{2}\times 4+b$ أي : $b=-4\sqrt{2}$

ومنه معادلة (D') هي : $y=\sqrt{2}x-4\sqrt{2}$.

التمرين 76 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

أ) جد معادلة للمستقيم (D) الذي معامل توجيهه $-\frac{3}{2}$ ويشمل النقطة $A(-2\ ;\ -3)$.

ب) عين إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل وكذا إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .

الحل :

أ) جد معادلة للمستقيم (D) الذي معامل توجيهه $-\frac{3}{2}$ ويشمل النقطة $A(-2\ ;\ -3)$.

(D) : $y=-\frac{3}{2}x+b$ ولدينا : $A\in(D)$ معناه : $-3=-\frac{3}{2}\times(-2)+b$ أي : $b=-6$

ومنه : (D) : $y=-\frac{3}{2}x-6$

ب) عين إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل وكذا إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .

إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل: $(4\ ;\ 0)$ و إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب: $(0\ ;\ -6)$

التمرين 77 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

بين في كل من الحالتين الآتيتين أن المستقيمين (D) و (D') متوازيان .

أ) (D) : $2x-3y=1$ (D') : $-x+\frac{3}{2}y=0$

ب) (D) : $-3x+7=0$ (D') : $x-\frac{\sqrt{3}}{5}=0$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

الحل :

أ) $(D): 2x-3y=1$ $\quad (D'): -x+\frac{3}{2}y=0$

$(D)\ //\ (D')$ يكافئ : $2\times\frac{3}{2}=(-1)\times(-3)$ أي : $3=3$ و هذا صحيح

ب) $(D): -3x+7=0$ $\quad (D'): x-\frac{\sqrt{3}}{5}=0$

لدينا : $ab'=(-3)\times 0=0$ و $ba'=0\times 1=0$ إذن : $ab'=a'b$ معناه : $(D)\ //\ (D')$

التمرين 78 صفحة 278 ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$

في كل مما يأتي حل جملة المعادلتين ، ثم مثل الحل بيانيا :

أ) $\begin{cases} x+y=6 \\ -2x+y=0 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x\sqrt{2}+\frac{1}{2}y=2-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x\sqrt{6}-2y=0 \end{cases}$ ج) $\begin{cases} -7x+11y=43 \\ 6x+y=-16 \end{cases}$ د) $\begin{cases} -x+y=-2 \\ 7x+y=22 \end{cases}$

الحل :

أ) $(S)\ \ldots \begin{cases} x+y=6 \\ -2x+y=0 \end{cases}$

- **طريقة التعويض :** (S) تكافئ : $\begin{cases} y=-x+6 \\ y=2x \end{cases}$ بما أن $2\neq -1$ فللجملة (s) حل وحيد .

و (S) تكافئ : $\begin{cases} 2x=-x+6 \\ y=2x \end{cases}$ ومعناه أن : $\begin{cases} 3x=6 \\ y=2x \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ وبالتالي : $s=\{(2\ ;\ 4)\}$

- **طريقة الجمع :** (S) تكافئ : $\begin{cases} y=-x+6 \\ y=2x \end{cases}$ بطرح طرف من طرف للمعادلتين نجد $3x-6=0$

معناه $x=2$ و (S) تكافئ : $\begin{cases} 2y=-2x+12 \\ y=2x \end{cases}$ بجمع طرف من طرف للمعادلتين نجد $3y=12$ معناه

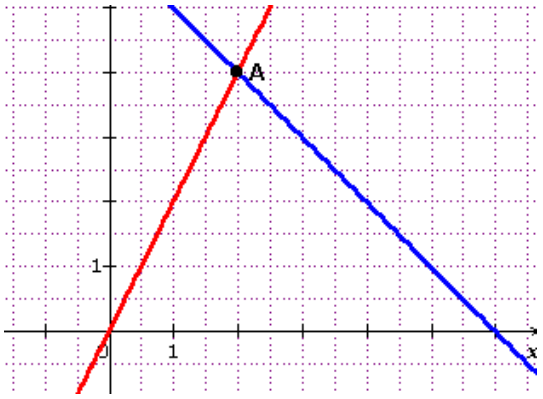
أن : $y=4$ وبالتالي : $s=\{(2\ ;\ 4)\}$

- **طريقة المحدد :** $(S)\ \ldots \begin{cases} x+y=6 \\ -2x+y=0 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1\times 1-1(-2)=3$ ومنه : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$ فللجملة (S) حل وحيد $(x\ ;\ y)$ حيث :

$x=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{3}=\frac{6}{3}=2$ و $y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{3}=\frac{12}{3}=4$

وبالتالي : $s=\{(2\ ;\ 4)\}$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

نضع : (D) : $x+y=6$

و (D') : $-2x+y=0$

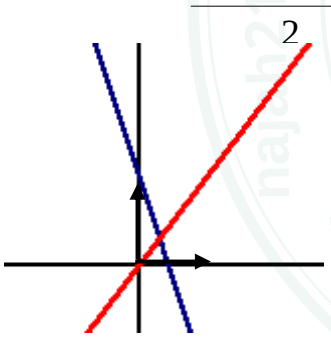
ب) $\begin{cases} x\sqrt{2}+\frac{1}{2}y=2-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x\sqrt{6}-2y=0 \end{cases}$ لدينا :

$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \sqrt{6} & -2 \end{vmatrix}=-2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}{2}$ المحدد غير معدوم ومنه الجملة تقبل حلا وحيد $(x\ ;\ y)$ حيث :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{\frac{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}{2}}=\frac{2(-4+\sqrt{3})}{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}=\frac{-\sqrt{2}(4-\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{-(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}(16-8\sqrt{3}+3)}{16-3}$$

$$x=\frac{19\sqrt{2}-8\sqrt{6}}{13}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{6} & 0 \end{vmatrix}}{\frac{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}{2}}=\frac{-2(2\sqrt{6}-\frac{3}{2}\sqrt{2})}{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{6}(4-\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{\sqrt{2}(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}(16-8\sqrt{3}+3)}{16-3}$$



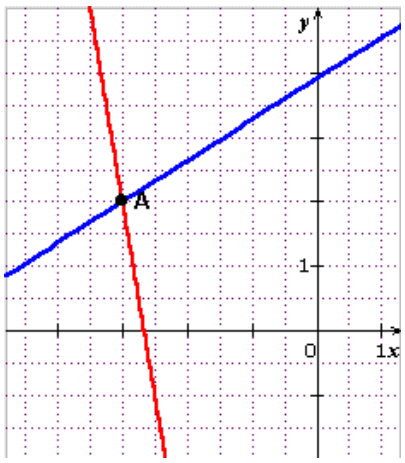
وبالتالي : $y=\frac{19\sqrt{3}-24}{13}$. $s=\left\{\left(\frac{19\sqrt{2}-8\sqrt{6}}{13}\ ;\ \frac{19\sqrt{3}-24}{13}\right)\right\}$

نضع : (D) : $x\sqrt{2}+\frac{1}{2}y=2-\frac{\sqrt{3}}{2}$

و (D') : $x\sqrt{6}-2y=0$

ج) $\begin{cases} -7x+11y=43 \\ 6x+y=-16 \end{cases}$ لدينا : $\begin{vmatrix} -7 & 11 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=-7-66=-73$

إذن للجملة حل وحيد $(x\ ;\ y)$ حيث :



$x=\frac{\begin{vmatrix} 43 & 11 \\ -16 & 1 \end{vmatrix}}{-73}$ و $y=\frac{\begin{vmatrix} -7 & 43 \\ 6 & -16 \end{vmatrix}}{-73}$ أي :

$$x=\frac{43+176}{-73}=-\frac{219}{73}=-3 \quad \text{و} \quad y=\frac{112-258}{-73}=\frac{146}{73}=2$$

وبالتالي : $s=\{(-3\ ;\ 2)\}$

نضع : (D) : $-7x+11y=43$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

و (D') : $6x+y=-16$

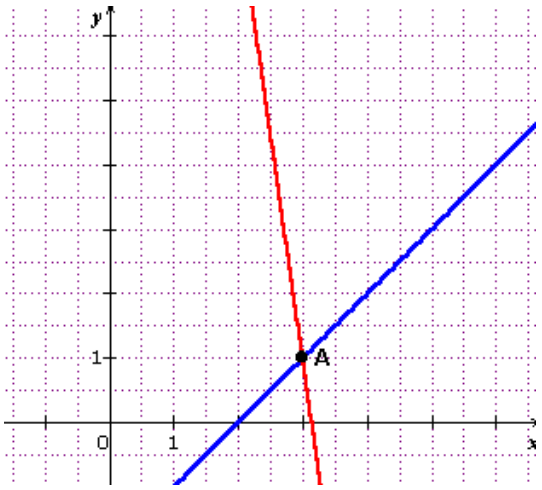
د) $\begin{cases}-x+y=-2\\7x+y=22\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}y=x-2\\y=-7x+22\end{cases}$

بما أن : $-7\neq 1$ فإن للجملة حل وحيد .

$\begin{cases}-x+y=-2\\7x+y=22\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}y=x-2\\x-2=-7x+22\end{cases}$

ومعناه أن : $\begin{cases}y=x-2\\8x=24\end{cases}$ وتكافئ أن : $\begin{cases}x=3\\y=3-2\end{cases}$

وبالتالي : $s=\{(3\,;1)\}$



التمرين 79 صفحة 278

لتكن جملة المعادلتين (S) : $\begin{cases}3x-y=5\\kx+y=11\end{cases}$ ما هي القيم الممكنة للعدد k بحيث يكون للجملة (S) حل وحيد :

الحل :

$$\begin{vmatrix}3 & -1\\k & 1\end{vmatrix}=3\times 1-(-1)k=k+3$$

للجملة (S) حل وحيد يكافئ أن : $k+3\neq 0$ معناه أن : $k\neq -3$ أي : $k\in\mathbb{R}-\{-3\}$

التمرين 80 صفحة 278

لتكن الجملة (S) : $\begin{cases}x-\frac{1}{2}y=3\\-6x+3y=k\end{cases}$

أ) بين أن الجملة (S) إما أنها لا تقبل حلا وإما أن لها عددا غير منته من الحلول.

ب) ما هي القيم الممكنة للعدد k بحيث يكون للجملة (S) ما لانهاية من الحلول.

الحل :

أ) $\begin{cases}x-\frac{1}{2}y=3\\-6x+3y=k\end{cases}$ معناه أن : $\begin{cases}y=2x-6\\y=2x+\frac{1}{3}k\end{cases}$ بما أن للمعدلتين المختصرين نفس معامل x فإن الجملة (S) إما أنها لا تقبل حلا وإما أن لها عددا غير منته من الحلول.

- طريقة أخرى : $\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\-6 & 3\end{vmatrix}=3-3=0$ إذن الجملة (S) إما لا تقبل حلا وإما لها ما لانهاية من الحلول.

ب) للجملة (S) ما لانهاية من الحلول معناه أن : $\frac{1}{3}k=-6$ أي : $k=-18$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

التمرين 81 صفحة 278

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. نعتبر النقط $A(0\ ;\ 5)$ ، $B(6\ ;\ 2)$ ، $C(7\ ;\ 4)$ ، $D(-2\ ;\ 1)$.

أ) بيّن أن المستقيمين (AB) و (CD) متقاطعان .

ب) أحسب إحداثيتي نقطة تقاطعهما ، وتحقق من ذلك بيانيا.

الحل :

أ) بيّن أن المستقيمين (AB) و (CD) متقاطعان .

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-0\\2-5\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2-7\\1-4\end{pmatrix}$ معناه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix}$

ولدينا : $6\times(-3)=-18$ و $(-9)\times(-3)=27$ إذن $(-3)\times(-3)\neq 6\times(-9)$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ غير مرتبطان خطيا وبالتالي : المستقيمان (AB) و (CD) متقاطعان في نقطة واحدة.

ب) أحسب إحداثيتي نقطة تقاطعهما ، وتحقق من ذلك بيانيا.

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ ومنه : $\overrightarrow{AB}=6\vec{u}$ حيث : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ وبالتالي : (AB) : $y=-\frac{1}{2}x+\alpha$

$B\in(AB)$ إذن : $2=-\frac{1}{2}6+\alpha$ معناه أن $\alpha=5$ وبالتالي : (AB) : $y=-\frac{1}{2}x+5$

لدينا : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix}$ ومنه : $\overrightarrow{CD}=-9\vec{v}$ حيث : $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ وبالتالي : (CD) : $y=\frac{1}{3}x+\beta$ ، $C\in(CD)$ إذن :

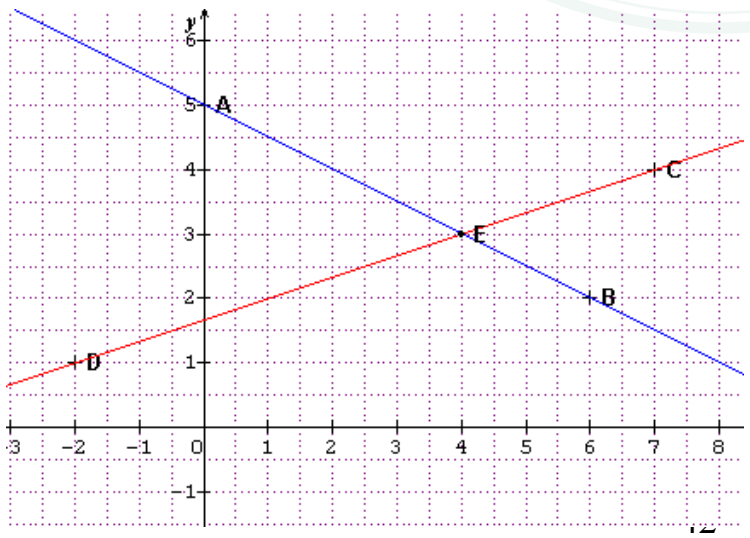
$4=\frac{1}{3}\times 7+\beta$ معناه $\beta=\frac{5}{3}$

وبالتالي : (CD) : $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

نسمي $E(x\ ;\ y)$ نقطة تقاطع المستقيمين (AB) و (CD) إذن : $y=-\frac{1}{2}x+5$ و $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

معناه $-\frac{1}{2}x+5=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ و $y=-\frac{1}{2}x+5$ يكافئ أن : $\frac{5}{6}x=\frac{10}{3}$ و $y=-\frac{1}{2}x+5$

معناه أن : $x=4$ و $y=3$ إذن : $E(4\ ;\ 3)$.



التمرين 82 صفحة 278

نريد حل جملة المعادلتين (S) : $\begin{cases} 2z^2 - t^2 = -1 \\ 3z^2 + t^2 = 21 \end{cases}$

أ) بوضع $z^2 = x$ و $t^2 = y$ أكتب جملة معادلتين (S') تكافئ (S) .

ب) حل جملة المعادلتين (S') ثم استنتج حل الجملة (S) .

الحل :

أ) بوضع $z^2 = x$ و $t^2 = y$ أكتب جملة معادلتين (S') تكافئ (S) .

(S') : $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + y = 21 \end{cases}$ وتكافئ : $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + y = 21 \end{cases}$

ب) حل جملة المعادلتين (S') ثم استنتج حل الجملة (S) .

(S') تكافئ : $\begin{cases} 5x = 20 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ (S') تكافئ : $\begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases}$

(S) تكافئ : $\begin{cases} z^2 = 4 \\ t^2 = 9 \end{cases}$ (S) تكافئ : $\begin{cases} z = 2 \text{ أو } z = -2 \\ t = 3 \text{ أو } t = -3 \end{cases}$

إذن : مجموعة حلول الجملة (S) هي : $s = \{(-2\ ;\ -3)\ ,\ (-2\ ;\ 3)\ ,\ (2\ ;\ -3)\ ,\ (2\ ;\ 3)\}$

التمرين 83 صفحة 278

نريد حل جملة المعادلتين (S) : $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{7}{y-2} = 6 \\ \dfrac{7}{x} - \dfrac{3}{y-2} = 16 \end{cases}$

ج)بين أن $x \neq 0$ وأن $y \neq 2$.

د) بوضع $z = \dfrac{1}{x}$ و $t = \dfrac{1}{y-2}$ أكتب جملة معادلتين (S') تكافئ (S) .

ه) حل جملة المعادلتين (S') ثم استنتج حل الجملة (S) .

الحل :

أ) بين أن $x \neq 0$ وأن $y \neq 2$.

الجملة (S) لها معنى إذا كان $x \neq 0$ و $y \neq 2$

ب)بوضع $z = \dfrac{1}{x}$ و $t = \dfrac{1}{y-2}$ أكتب جملة معادلتين (S') تكافئ (S) .

(S') : $\begin{cases} z + 7t = 6 \\ 7z - 3t = 16 \end{cases}$

ج)حل جملة المعادلتين (S') ثم استنتج حل الجملة (S) .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

(S') تكافئ $\begin{cases} 7z+49t=42 \\ 7z-3t=16 \end{cases}$ (S') تكافئ $\begin{cases} 52t=26 \\ z=-7t+6 \end{cases}$ (S') تكافئ $\begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ z=-\frac{7}{2}+6 \end{cases}$ (S') تكافئ $\begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ z=\frac{5}{2} \end{cases}$

(S) تكافئ $\begin{cases} \frac{1}{x}=\frac{5}{2} \\ \frac{1}{y-2}=\frac{1}{2} \end{cases}$ (S) تكافئ $\begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=4 \end{cases}$ ومنه مجموعة حلول الجملة (S) هي : $s=\left\{\left(\frac{5}{2}\ ;\ 4\right)\right\}$

التمرين 84 صفحة 278

عددان مجموعهما 15 ، إذا أضفنا إلى كل منهما 3 صار أحدهما نصف الآخر . جد هذين العددين.

الحل :

نسمي هذين العددين x و y

لدينا مجموعهما 15 معناه $x+y=15$

ولدينا : $x+3=\frac{1}{2}(y+3)$ أو $y+3=\frac{1}{2}(x+3)$

ومنه جملة المعادلتين التالية : $\begin{cases} x+y=15 \\ 2x+6=y+3 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x+y=15 \\ 2y+6=x+3 \end{cases}$ معناه :

$\begin{cases} y=-x+15 \\ 2x+3=y \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=-y+15 \\ 2y+3=x \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} y=-x+15 \\ 2x+3=-x+15 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=-y+15 \\ 2y+3=-y+15 \end{cases}$

ومعناه أن : $\begin{cases} x=4 \\ y=11 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=11 \\ y=4 \end{cases}$ مجموعة الحلول هي : $s=\ (4\ ;\ 11)\ ,(11\ ;\ 4)$

التمرين 85 صفحة 278

بمناسبة انتقاله إلى الثانوية نظم يوسف وليمة دعا إلها تلاميذ قسمه . لاحظ أنه لو يجلس كل 5 تلاميذ حول طاولة فإن 3 منهم لا يجد لهم أماكن الجلوس ، ولو يجلس كل 6 تلاميذ حول طاولة فإن 4 أماكن تبقى شاغرة.

ما هو عدد التلاميذ الذين دعاهم يوسف ؟ و ما هو عدد الطاولات ؟

الحل :

نسمي x عدد التلاميذ و y عدد الطاولات .

لو يجلس كل 5 تلاميذ حول طاولة فإن 3 منهم لا يجد لهم أماكن الجلوس معناه أن $x = 5y + 3$.

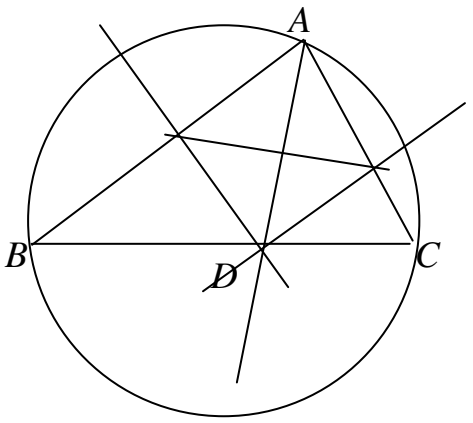
ولو يجلس كل 6 تلاميذ حول طاولة فإن 4 أماكن تبقى شاغرة معناه : $x = 6y - 4$

ومنه الجملة $\begin{cases} x=5y+3 \\ x=6y-4 \end{cases}$ معناه أن : $\begin{cases} x=5y+3 \\ 5y+3=6y-4 \end{cases}$ ويكافئ : $\begin{cases} x=38 \\ y=7 \end{cases}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

التمرين 86 صفحة 278

ABC مثلث أطوال أضلاعه $AB = 9\ cm$ ، $BC = 10\ cm$ ، $AC = 6\ cm$. منصف الزاوية الرأس A يقطع $[BC]$ في النقطة D . أحسب الطولين BD و CD .



الحل :

$$BD + CD = BC = 10$$