najah213.com · نجاح 213



## الموضوع الأول:

### التمرين الأول:

$a$ و $b$ عددان طبيعيان حيث: $a \equiv 3\ [4]$ و $b \equiv 2\ [4]$.

1) هل العدد $2a + 5b^3$ يقبل القسمة على 4؟

2) أحسب باقي قسمة العدد $a^2 - 2b^3$ على 4.

3) تحقق أن: $a \equiv -1\ [4]$.

4) استنتج باقي قسمة العدد $a^{2016} \times a^{1435}$ على 4.

5) استنتج أن: $a^{1435} + a^{2016} \equiv 0\ [4]$.

### التمرين الثاني:

لتكن $(u_n)$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0$ وأساسها $r$، حيث:

$u_3 = 1$ و $u_{12} = 19$

1) عين الأساس $r$ والحد الأول $u_0$ لهذه المتتالية.

2) أكتب عبارة الحد العام $u_n$ بدلالة $n$.

3) عين قيمة $n$ حتى يكون: $u_n = 79$.

4) أحسب بدلالة $n$ المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

5) استنتج المجموع $S_{42}$.

### التمرين الثالث:

نعتبر الدالة $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ:

$$f(x) = 2 - \frac{2}{x+2}$$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) أحسب نهايتي الدالة $f$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

2) أحسب نهاية الدالة $f$ عند $-2$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

3) عين الدالة المشتقة $f'$ للدالة $f$ وادرس اشارتها.

4) شكل جدول تغيرات الدالة $f$ على مجموعة تعريفها.

5) عين احداثيات نقط التقاطع مع المحاور.

6) أكتب معادلة المماس $(\Delta)$ لمنحنى الدالة $f$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$.

7) أرسم $(\Delta)$ و $(C_f)$.

قال عالم الرياضيات والفيزياء سيمون دونيس:
في حياتنا شيئان مهمان:
أن نتعلم الرياضيات وأن نُدرس الرياضيات.

## تصحيح الموضوع الأول:

### التمرين الأول:

$a$ و $b$ عددان طبيعيان حيث: $a \equiv 3\ [4]$ و $b \equiv 2\ [4]$.

1) نبحث إن كان العدد $2a + 5b^3$ يقبل القسمة على 4:

نقول عن العدد $2a + 5b^3$ أنه يقبل القسمة على 4 إذا كان:

$$2a + 5b^3 \equiv 0\ [4]$$

لدينا: $a \equiv 3\ [4]$

نضرب طرفي الموافقة في العدد (2) ينتج: $2a \equiv 6\ [4]$

وبما أن: $6 \equiv 2\ [4]$

فإن (حسب خاصية التعدي): $2a \equiv 2\ [4] \ldots (1)$

ولدينا: $b \equiv 2\ [4]$

وحسب خواص الموافقات: $b^3 \equiv 2^3\ [4]$

أي: $b^3 \equiv 8\ [4]$

وبما أن: $8 \equiv 0\ [4]$

فإن (حسب خاصية التعدي): $b^3 \equiv 0\ [4]$

نضرب طرفي الموافقة في العدد (5) ينتج: $5b^3 \equiv 0\ [4] \ldots (2)$

بجمع الموافقتين (1) و (2) طرف لطرف ينتج:

$$2a + 5b^3 \equiv 2\ [4]$$

ومنه العدد $2a + 5b^3$ لا يقبل القسمة على 4.

2) نحسب باقي قسمة العدد $a^2 - 2b^3$ على 4:

لدينا: $a \equiv 3\ [4]$

وحسب خواص الموافقات: $a^2 \equiv 3^2\ [4]$

أي: $a^2 \equiv 9\ [4]$

وبما أن: $9 \equiv 1\ [4]$

فإن (حسب خاصية التعدي): $a^2 \equiv 1\ [4] \ldots (3)$

ولدينا مما سبق أن: $b^3 \equiv 0\ [4]$

نضرب طرفي الموافقة في العدد (2) ينتج: $2b^3 \equiv 0\ [4] \ldots (4)$

نطرح الموافقة (4) من (3) نجد:

$$a^2 - 2b^3 \equiv 1\ [4]$$

ومنه باقي قسمة العدد $a^2 - 2b^3$ على 4 هو 1.

3) نتحقق أن: $a \equiv -1\ [4]$.

لدينا: $a \equiv 3\ [4]$

نضيف العدد (1) لطرفي الموافقة: $a + 1 \equiv 3 + 1\ [4]$

أي: $a + 1 \equiv 4\ [4]$

وبما أن: $4 \equiv 0\ [4]$

فإن (حسب خاصية التعدي): $a + 1 \equiv 0\ [4]$

نطرح العدد (1) من طرفي الموافقة: $a + 1 - 1 \equiv 0 - 1\ [4]$

ومنه:

$$a \equiv -1\ [4]$$

4) استنتاج باقي قسمة العدد $a^{1435} \times a^{2016}$ على 4:

لدينا: $a \equiv -1\ [4]$

وحسب خواص الموافقات: $a^{1435} \equiv (-1)^{1435}\ [4]$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213



بما أن العدد 1435 فردي فإن: $(-1)^{1435} = -1$

فنكتب: $a^{1435} \equiv -1\ [4]$

أي: $a^{1435} \equiv 3\ [4] \dots (5)$

ولدينا: $a \equiv -1\ [4]$

وحسب خواص الموافقات: $a^{2016} \equiv (-1)^{2016}\ [4]$

بما أن العدد 2016 زوجي فإن: $(-1)^{2016} = 1$

فنكتب: $a^{2016} \equiv 1\ [4] \dots (6)$

نضرب الموافقة (5) في الموافقة (6) طرف لطرف نجد:

$$a^{1435} \times a^{2016} \equiv 3\ [4]$$

ومنه باقي قسمة العدد $a^{1435} \times a^{2016}$ على 4 هو 3.

5) استنتاج أن: $a^{1435} + a^{2016} \equiv 0\ [4]$.

بجمع (5) و (6) طرف لطرف ينتج: $a^{1435} + a^{2016} \equiv 4\ [4]$

وبما أن: $4 \equiv 0\ [4]$

فإن (حسب خاصية التعدي):

$$a^{1435} + a^{2016} \equiv 0\ [4]$$

## التمرين الثاني:

لتكن $(u_n)$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0$ وأساسها $r$، حيث:

$$u_3 = 1 \text{ و } u_{12} = 19$$

1) نعين الأساس $r$ والحد الأول $u_0$ لهذه المتتالية:

بما أن $(u_n)$ متتالية حسابية فإن:

$$\begin{cases} u_3 = u_0 + 3r \\ u_{12} = u_0 + 12r \end{cases}$$

بعد التعويض ينتج:

$$\begin{cases} u_0 + 3r = 1 \quad (1) \\ u_0 + 12r = 19\ (2) \end{cases}$$

بطرح (1) من (2) طرف لطرف ينتج:

$$(u_0 - u_0) + (12r - 3r) = 19 - 1$$

أي: $9r = 18$

ومنه نجد:

$$r = 2$$

نعوض قيمة $r$ في المعادلة (1) ينتج: $u_0 + 6 = 1$

ومنه نجد:

$$u_0 = -5$$

2) نكتب عبارة الحد العام $u_n$ بدلالة $n$:

تعطى عبارة الحد العام $u_n$ لمتتالية حسابية حدها الأول $u_0$ وأساسها $r$ بالعلاقة التالية:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

بعد التعويض والترتيب نجد:

$$u_n = 2n - 5$$

3) نعين قيمة $n$ حتى يكون: $u_n = 79$.

نحل $\mathbb{N}$ في المعادلة: $u_n = 79$

أي: $2n - 5 = 79$

ومنه نجد:

$$n = 42$$

حيث:

$$u_{42} = 79$$

4) نحسب بدلالة $n$ المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

تعطى عبارة المجموع $S_n$ بالعلاقة التالية:

$$S_n = \frac{(\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})(\text{عدد الحدود})}{2}$$

ويحسب عدد الحدود بالعلاقة التالية:

عدد الحدود = دليل الحد الأخير في المجموع − دليل الحد الأول في المجموع + 1

حيث:

- الحد الأول في المجموع هو $u_0$.
- الحد الأخير في المجموع هو $u_n$.
- عدد الحدود هو $n + 1$.

ومنه: $S_n = \frac{(n+1)(-5+2n-5)}{2}$

أي: $S_n = \frac{(n+1)(2n-10)}{2}$

بعد الاختزال نجد:

$$S_n = (n+1)(n-5)$$

5) استنتاج المجموع $S_{42}$:

نعوض $n = 42$ في عبارة $S_n$ ينتج: $S_n = (42+1)(42-5)$

ومنه نجد:

$$S_n = 1591$$

## التمرين الثالث:

نعتبر الدالة $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ:

$$f(x) = 2 - \frac{2}{x+2}$$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) نحسب نهايتي الدالة $f$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(2 - \frac{2}{x+2}\right)$

حيث: $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{2}{x+2}\right) = 0$

ومنه نجد:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{2}{x+2}\right)$

حيث: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x+2}\right) = 0$

ومنه نجد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

التفسير البياني:

$(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب يوازي حامل محور الفواصل معادلته:

$$y = 2$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

2) نحسب نهاية الدالة $f$ عند $-2$:

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} \left(2-\frac{2}{x+2}\right)$

بما أن: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} (x+2) = 0^-$

فإن: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} \left(\frac{2}{x+2}\right) = -\infty$

ومنه نجد: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} f(x) = +\infty$

ولدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} \left(2-\frac{2}{x+2}\right)$

بما أن: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} (x+2) = 0^+$

فإن: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} \left(\frac{2}{x+2}\right) = +\infty$

ومنه نجد: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x) = -\infty$

التفسير البياني:

$(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب يوازي حامل محور التراتيب معادلته:

$$x = -2$$

3) نعين الدالة المشتقة $f'$ للدالة $f$ وندرس اشارتها:

- حساب $f'(x)$:

لدينا: $f'(x) = 0 - \frac{0(x+2)-1\times 2}{(x+2)^2}$

ومنه نجد: $f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2}$

- دراسة إشارة $f'(x)$:

لدينا: $\begin{cases} 2>0 \\ (x+2)^2 > 0 \; ; x\in ]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[ \end{cases}$

ومنه: $\frac{2}{(x+2)^2} > 0 \; ; x\in ]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

جدول الإشارة:

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{2}{(x+2)^2}$ | $+$ | ‖ | $+$ |
| $f'(x)$ | $+$ | ‖ | $+$ |

من أجل كل $x$ من $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ لدينا: $f'(x) > 0$

4) نشكل جدول تغيرات الدالة $f$ على مجموعة تعريفها:

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | ‖ | $+$ |
| $f(x)$ | $2$ ↗ $+\infty$ | ‖ | $-\infty$ ↗ $2$ |

5) نعين احداثيات نقط التقاطع مع المحاور:

- مع محور الفواصل:

نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل هي مجموعة حلول المعادلة:

$$f(x) = 0$$

نحل في المجال $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ المعادلة: $f(x)=0$

أي: $2-\frac{2}{x+2} = 0$

ومنه نجد: $x = -1$

ومنه $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في النقطة:

$$A(-1\,;0)$$

- مع محور التراتيب:

نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع حامل محور التراتيب هي مجموعة حلول المعادلة:

$$y = f(0)$$

لدينا: $f(0) = 1$

ومنه $(C_f)$ يقطع محور التراتيب في النقطة:

$$B(0\,;1)$$

6) نكتب معادلة المماس $(\Delta)$ لمنحنى الدالة $f$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$:

تعرّف معادلة المماس $(\Delta)$ بالعلاقة التالية:

$$(\Delta): y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

حيث: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ f'(0) = \frac{1}{2} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

بعد التعويض نجد:

$$(\Delta): y = \frac{1}{2}x + 1$$

7) نرسم $(\Delta)$ و $(C_f)$:

- لرسم المماس $(\Delta)$ يكفي تعيين نقطتين اعتبارا من المعادلة:

$$(\Delta): y = \frac{1}{2}x + 1$$

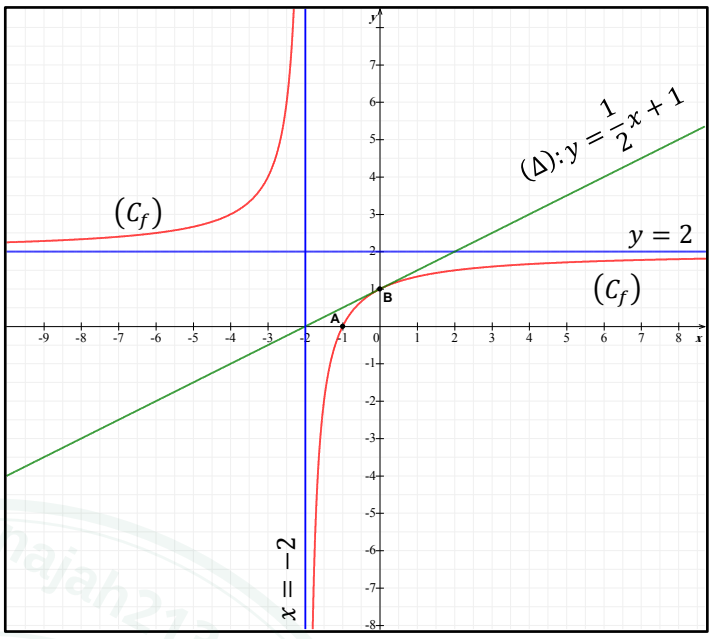
| $x$ | $-2$ | $0$ |
|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $1$ |

فيصبح المماس $(\Delta)$ معرف بالنقطتين $(0\,;-2)$ و $(1\,;0)$.

- لرسم المنحنى $(C_f)$ نأخذ بعين الاعتبار ما يلي:
  - المستقيمات المقاربة للمنحنى $(C_f)$.
  - نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل.
  - نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع حامل محور التراتيب.



najah213.com · نجاح 213
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً




المنحنى البياني للدالة $f$



**حظ سعيد**

غالبا ما يكون النجاح حليف هؤلاء الذين يعملون بجرأة،
ونادرا ما يكون حليف المترددين الذين يتهيبون المواقف ونتائجها

05 56 24 69 06
bouguetof.hamid@yahoo.fr



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com