najah213.com · نجاح 213

**الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية**

**وزارة التربية الوطنية** — **مديرية التربية لولاية تيارت**

**امتحان بكالوريا تجريبية** — **ثانوية بن براهيم زهرة –تخمارت–**

**الشعبة: تقني رياضي** — **دورة: ماي 2021**

**اختبار في مادة: الرياضيات** — **المدة: 04 ساعات ونصف**

**على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:**

## الموضوع الأول

### التمرين الأول: (05 نقاط)

$(u_n)$ المتتالية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{4}{3}$.

1)أ/ احسب كل من $u_1$، $u_2$ وَ $u_3$.

ب/ أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$.

2) المتتالية العددية $(v_n)$ معرّفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $v_n = \alpha u_n - 4(\alpha + 1)$، حيث $\alpha$ عدد حقيقي.

أ/ جِد العدد الحقيقي $\alpha$ حتى تكون $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$، ثمّ احسب حدّها الأوّل.

ب/ بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_n = \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

- ادرس اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أكتب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث: $S_n = v_0 + \frac{4}{3}v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة لا نُفرق بينها عند اللمس، منها أربع كريات بيضاء مرقمة بـ:1؛ 1؛ 2؛ 2 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ:0؛ 1؛ 2 وكريتان خضراوان مرقمتان بـ:0؛ 1 وكرية وسوداء مرقمة بـ:0.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الأحداث $A$: "الكريات المسحوبة من ألوان مختلفة"، وَ $B$: "الكريات المسحوبة تحمل لونين فقط"، وَ $C$: "الكريات المسحوبة تحمل على الأقل رقم زوجي".

1) بيّن أنّ $P(B) = \frac{29}{105}$، ثمّ احسب $P(A)$ وَ $P(C)$.

2) ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الألوان المحصل عليها.

– عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$ واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

3) نسحب الآن عشوائيا على التوالي ودون إرجاع أربع كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الحدث $D$: "الكريات المسحوبة تحمل الأرقام والتي تُشكل العدد 2021 بهذا الترتيب"، أحسب $P(D)$.

**اقلب الصفحة**



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213



## التمرين الثالث: (04 نقاط)

1)أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي قسمة العدد $2^n$ على 10.

ب. استنتج رقم أحاد العدد $1994^{1414}$.

2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرّفة بحدّها العام $u_n = 2^n$.

أ. تحقّق من أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية.

نضع لكل عدد طبيعي غير معدوم $n$: $S_n = 5 + 2^1 + 5 + 2^2 + \cdots + 5 + 2^n$.

ب. أوجد قيم $n$ الطبيعية التي يكون من أجلها $S_n$ قابلا القسمة على 10.

## التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- لتكن الدّالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^x + x + 1$.

1) احسب نهايتي الدّالة $g$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $g$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أثبت أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-1{,}27 < \alpha < -1{,}28$.

4) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- لتكن الدّالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. (وحدة الطول $4\ cm$)

1) أثبت أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$، $f'(x) = \frac{e^x.g(x)}{(e^x+1)^2}$.

2)أ- أثبت أنّ: $f(\alpha) = \alpha + 1$.

ب- استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3)أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنّ المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y = x$ مستقيم مُقارب مائل للمنحنى $(C_f)$.

جـ- ادرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(D)$.

4)أ- شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

ب- ارسم $(D)$ و $(C_f)$.

**انتهى الموضوع الأول**



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213



# الموضوع الثاني

## التمرين الأول: (05 نقاط)

1) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، مثّل المستقيم $(\Delta)$ وَ $(D)$ اللّذين معادلتيهما على الترتيب: $y=x$ وَ $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$.

لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=6$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{2}$.

أ- مثّل على حامل محور الفواصل الحدود $u_0$، $u_1$، $u_2$ وَ $u_3$ (مُبرزا خطوط الانشاء دون حسابها).

ب- عيّن احداثيي نقطة تقاطع المستقيمين $(\Delta)$ وَ $(D)$.

جـ- أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ وتقاربها.

2) نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بالعلاقة $v_n=u_n+\alpha$، حيث $\alpha$ عدد حقيقي.

أ- جِد العدد الحقيقي $\alpha$ حتى تكون $(v_n)$ متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ب- نضع $\alpha=\frac{2}{3}$، أكتب $v_n$ بدلالة $n$ ثمّ استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$.

جـ- بيّن أنّ $u_{n+1}-u_n=-5\left(\frac{1}{4}\right)^n$، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

د- احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$، ثمّ استنتج المجموع $S'_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

## التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 8 كريات، أربعة منها تحمل الرقم 1 وثلاثة منها تحمل الرقم 2 وكرية واحدة تحمل الرقم 5.

نسحب عشوائيا من هذا الكيس كريتين في آن واحد.

1/ احسب احتمال سحب كريتين رقم كل منهما عدد أولي.

2/ احسب احتمال سحب كريتين مجموع رقميهما عدد فردي.

3/ ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل عملية سحب العدد $|x-y|$ حيث $x$ وَ $y$ رقما الكريتين المسحوبتين.

أ) ما هي قيم المتغيّر العشوائي $X$؟

ب) عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي $X$، ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

## التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة: $(E)\ldots 4862x-1430y=2002$ حيث $x$ و $y$ عددان صحيحان.

1) أحسب القاسم المشترك الأكبر للأعداد: 4862، 1430 وَ2002.

2)أ. بيّن أنّ $(E)$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب. حل المعادلة $(E)$.

3) $a$ وَ $b$ عددان طبيعيان حيث $(a;b)$ حل للمعادلة $(E)$، نضع: $d=PGCD(a;b)$.

أ. عيّن القيم الممكنة لـ$d$.

ب. عيّن الثنائيات $(a;b)$ عندما $d=7$.

**اقلب الصفحة**



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213



## التمرين الرابع: (07 نقاط)

### الجزء الأوّل:

لتكن $g$ الدّالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

1) ادرس تغيّرات الدّالة $g$ على $]0;+\infty[$.

2) احسب $g(1)$ ثمّ استنتج، حسب قيم $x$، إشارة $g(x)$.

### الجزء الثاني:

نعتبر الدّالة العددية $f$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 2$

نسمي $(C)$ المنحنى المُمثل للدّالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ (وحدة الطول $2\ cm$).

1)أ- احسب نهاية الدّالة $f$ عند 0، فسّر هندسيا هذه النتيجة.

ب- احسب نهاية الدّالة $f$ عند $+\infty$.

جـ- بيّن أنّ المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y = -x + 2$ هو مستقيم مُقارب مائل للمنحنى $(C)$ عند $+\infty$.

د- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى $(C)$ بالنسبة للمستقيم $(D)$.

2)أ- أثبت أنّه، من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ وشكّل جدول تغيّراتها.

3)أ- عيّن إحداثيي النقطة $A$ من $(C)$ التي يكون المماس عندها مُوازيا للمستقيم $(D)$.

ب- اكتب معادلة للمستقيم $(T)$، مماس المنحنى $(C)$ عند النقطة ذات الفاصلة $e$. (نُذكّر أنّ $e$ هو العدد الذي يُحقق $\ln e = 1$)

4) أثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $]0;1[$.

5) ارسم المستقيمين $(D)$، $(T)$ وَالمنحنى $(C)$.

**انتهى الموضوع الثاني**



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# التصحيح المفصل للبكالوريا التجريبية/ مادة الرياضيات/ ثالثة تقني رياضي 2021

## حل الموضوع الأول

**حل التمرين الأول:** (05 نقاط)

لدينا: $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{4}{3} \end{cases}$.

**1)أ/ حساب كل من $u_1$، $u_2$ وَ$u_3$:**

لدينا: $u_1 = \frac{3}{4}u_0 + \frac{4}{3} = \frac{3}{4}(4) + \frac{4}{3} = \frac{9+4}{3} = \frac{13}{3}$

وَ $u_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{4}{3} = \frac{3}{4}\left(\frac{13}{3}\right) + \frac{4}{3} = \frac{13}{4} + \frac{4}{3} = \frac{39+16}{12} = \frac{55}{12}$

وَ $u_3 = \frac{3}{4}u_2 + \frac{4}{3} = \frac{3}{4}\left(\frac{55}{12}\right) + \frac{4}{3} = \frac{55}{16} + \frac{4}{3} = \frac{165+64}{48} = \frac{229}{48}$

**ب/ إعطاء تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$:**

نلاحظ أنّ: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$، فتخميني حول اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ فهي **متزايدة تماما**.

2) المتتالية العددية $(v_n)$ معرّفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $v_n = \alpha u_n - 4(\alpha + 1)$، حيث $\alpha$ عدد حقيقي.

**أ/ إيجاد العدد الحقيقي $\alpha$ حتى تكون $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$، ثمّ حساب حدّها الأوّل:**

$(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$، معناه: $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$

$v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$، تُكافئ: $\alpha u_{n+1} - 4(\alpha + 1) = \frac{3}{4}v_n$

ومنه: $\alpha\left(\frac{3}{4}u_n + \frac{4}{3}\right) - 4(\alpha + 1) = \frac{3}{4}(\alpha u_n - 4(\alpha + 1))$

وعليه: $\frac{3}{4}\alpha u_n + \frac{4}{3}\alpha - 4\alpha - 4 = \frac{3}{4}\alpha u_n - 3\alpha - 3$

ومنه: $\frac{4}{3}\alpha - 4\alpha - 4 = -3\alpha - 3$

وعليه: $4\alpha - 12\alpha - 12 = -9\alpha - 9$

ويكون: $-8\alpha + 9\alpha = 12 - 9$

وبالتالي: $\boxed{\alpha = 3}$، (بالتعويض نجد: $v_n = 3u_n - 16$)

حساب الحدّ الأوّل:

$v_n = 3u_n - 16 = 3(4) - 16 = 12 - 16 = -4$

**ب/ تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_n = \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$:**

لدينا: $\begin{cases} v_n = v_0 \times q^n = -4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ v_n = 3u_n - 16 \end{cases}$،

ومنه:

$u_n = \frac{v_n+16}{3}$

$= \frac{v_n}{3} + \frac{16}{3}$

$= \frac{16}{3} + \frac{-4\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{3}$

$= \frac{16}{3} - \frac{3^{-1}}{4^{-1}} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$= \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$= \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

**دراسة اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$، ثمّ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:**

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$:

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{(n+1)-1}\right) - \left(\frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$

$= \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{16}{3} + \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - 1\right)$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{4}{3} - 1\right)$

$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^n > 0$

إذن: $(u_n)$ **متزايدة تماما**.

**حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:**

لدينا: $u_n = \frac{16}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$،

وبمأنّ: $-1 < \frac{3}{4} < 1$ فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 0$

ومنه: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{16}{3}}$.

**3) كتابة بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث، $S_n = v_0 + \frac{4}{3}v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$، ثمّ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:**

لدينا: $S_n = v_0 + \frac{4}{3}v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$

$= \left(\frac{4}{3}\right)^0 v_0 + \left(\frac{4}{3}\right)^1 v_1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n v_n$

$= \left(\frac{4}{3}\right)^0 \times -4\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{4}{3}\right)^1 \times -4\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times -4\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n \times -4\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$= -4(1^0 + 1^1 + 1^2 + \cdots + 1^n)$

$= -4[1(n - 0 + 1)]$

$= -4n - 4$

**حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:**

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(-4n - 4) = +\infty$

**حل التمرين الثاني:** (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة لا نُفرق بينها عند اللمس، منها **أربع كريات بيضاء مرقمة بـ:1؛ 1؛ 2؛ 2 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ:0؛ 1؛ 2 وكريتان خضراوان مرقمتان بـ:0؛ 1 وكرية وسوداء مرقمة بـ:0.**

عدد الحالات الممكنة لسحب أربع كريات في آن واحد من هذا الصندوق هو: $\boxed{C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210}$.

نعتبر الأحداث $A$: "الكريات المسحوبة من ألوان مختلفة"، وَ$B$: "الكريات المسحوبة تحمل لونين فقط"، وَ$C$: "الكريات المسحوبة تحمل على الأقل رقم زوجي".

**1) تبيان أنّ $P(B) = \frac{29}{105}$، ثمّ حساب $P(A)$ وَ$P(C)$:**

لدينا:

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$P(B)=\frac{C_4^1\times C_3^3+C_4^2\times C_3^2+C_4^3\times C_3^1+C_4^2\times C_2^2+C_4^3\times C_2^1+C_4^3\times C_1^1+C_3^2\times C_2^2+C_3^3\times C_2^1+C_3^3\times C_1^1}{C_{10}^4}$$
$$=\frac{4\times1+6\times3+4\times3+6\times1+4\times2+4\times1+3\times1+1\times2+1\times1}{210}$$
$$=\frac{58}{210}$$
$$=\frac{29}{105}$$

**حساب $P(A)$ وَ$P(C)$:**

لدينا: $P(A)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_2^1\times C_1^1}{C_{10}^4}=\frac{4\times3\times2\times1}{210}=\frac{24}{210}=\frac{4}{35}$

وَ $P(C)=\frac{C_6^1\times C_4^3+C_6^2\times C_4^2+C_6^3\times C_4^1+C_6^4}{C_{10}^4}$

$$=\frac{6\times4+15\times6+20\times4+15}{210}$$
$$=\frac{205}{201}$$
$$=\frac{41}{57}$$

2) **لدينا:** $X$ المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الألوان المحصل عليها.

**تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$ وحساب أمله الرياضياتي $E(X)$:**

- قيم المتغيّر العشوائي $X$ هي: 1، 2، 3، 4.
- $X=1$، معناه: "الكريات المسحوبة تحمل نفس اللون"

ومنه: $\boxed{P(X=1)=\frac{C_4^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{210}}$.

$X=2$، معناه: "الكريات المسحوبة تحمل لونين فقط"

ومنه: $\boxed{P(X=1)=P(B)=\frac{58}{210}}$.

$X=4$، معناه: "الكريات المسحوبة من ألوان مختلفة"

ومنه: $\boxed{P(X=1)=P(A)=\frac{24}{210}}$.

$X=3$، معناه: "الكريات المسحوبة تحمل ثلاث ألوان مختلفة"،

ومنه: $\boxed{P(X=3)=1-\left(\frac{1}{210}+\frac{58}{210}+\frac{24}{210}\right)=\frac{127}{210}}$.

نُلخص النتائج في الجدول التالي:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{1}{210}$ | $\frac{58}{210}$ | $\frac{127}{210}$ | $\frac{24}{210}$ |

**حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:**

لدينا: $E(X)=1\times\frac{1}{210}+2\times\frac{58}{210}+3\times\frac{127}{210}+4\times\frac{24}{210}$

$$=\frac{1+116+381+96}{210}$$
$$=\frac{594}{210}$$
$$=\frac{99}{35}$$

3) عدد الحالات الممكنة لسحب أربع كريات على التوالي ودون إرجاع من هذا الصندوق هو:

$\boxed{A_{10}^4=\frac{10!}{(10-4)!}=\frac{10!}{6!}=5040}$.

نعتبر الحدث $D$: "الكريات المسحوبة تحمل الأرقام والتي تُشكل العدد 2021 بهذا الترتيب"،

**حساب $P(D)$:**

لدينا: $\boxed{P(D)=\frac{4\times3\times3\times2}{5040}=\frac{72}{5040}=\frac{1}{70}}$.

**حل التمرين الثالث: (04 نقاط)**

**1)أ. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي قسمة العدد $2^n$ على 10:**

لدينا: $2^0\equiv1[10]$،
$2^1\equiv2[10]$،
$2^2\equiv4[10]$،
$2^3\equiv8[10]$،
$2^4\equiv6[10]$،
$2^5\equiv2[10]$،

ومنه: بواقي قسمة $2^n$ على 10 تُشكل متتالية دورية، دورها 5 وبالتالي:

| $n=$ | $5k$ | $5k+1$ | $5k+2$ | $5k+3$ | $k\in\mathbb{N}^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2^n\equiv$ | 2 | 4 | 8 | 6 | [10] |

**ب. استنتاج رقم أحاد العدد $1994^{1414}$:**

لدينا: $1994\equiv4[10]$ أي: $1994\equiv2^2[10]$

ومنه: $1994^{1414}\equiv2^{2828}[10]$

وبمأنّ: $2828=5(565)+3$، فإنّ:

$\boxed{1994^{1414}\equiv6[10]}$

إذن: رقم أحاد العدد $1994^{1414}$ هو 6.

2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرّفة بحدّها العام $u_n=2^n$.

**أ. التحقق من أنّ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية:**

لدينا: $u_{n+1}=2^{n+1}=2\times2^n=2u_n$،

إذن: $(u_n)$ متتالية هندسية.

ب. لدينا: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$،

$S_n=5+2^1+5+2^2+\cdots+5+2^n$.

**إيجاد قيم $n$ الطبيعية التي يكون من أجلها $S_n$ قابلا القسمة على 10:**

أولا نكتب $S_n$ بدلالة $n$:

$$S_n=(5+2^1)+(5+2^2)+\cdots+(5+2^n)$$
$$=5(n-1+1)+(u_1+u_2+\cdots+u_n)$$
$$=5n+u_1\left(\frac{1-2^{n-1+1}}{1-2}\right)$$
$$=5n+2\left(\frac{1-2^n}{-1}\right)$$
$$=5n+2(2^n-1)$$

$S_n$ يقبل القسمة على 10، معناه: $S_n\equiv0[10]$

أي: $5n+2(2^n-1)\equiv0[10]$

| $n=$ | $5k$ | $5k+1$ | $5k+2$ | $5k+3$ | $k\in\mathbb{N}^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2^n\equiv$ | 2 | 4 | 8 | 6 | [10] |
| $5n\equiv$ | 5 | 0 | 5 | 0 | [10] |
| $S_n\equiv$ | 7 | 6 | 9 | 0 | [10] |

إذن: $\boxed{n=5k+3}$، (حيث $k\in\mathbb{N}^*$)

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

**حل التمرين الرابع:** (07 نقاط)

I- $g$ دالّة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^x + x + 1$.

**1) حساب نهايتي الدّالة $g$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$:**

لدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty \end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}$.

ولدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty \end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$.

**2) دراسة اتجاه تغيّر الدّالة $g$ ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:**

$g$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا:

$$\boxed{g'(x) = e^x + 1 > 0}،$$

ومنه: الدّالة $g$ **متزايدة تماما** على $\mathbb{R}$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**3) إثبات أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-1,28 < \alpha < -1,27$:**

$g$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1,28;-1,27[$ (لأنّها: متزايدة تماما على $\mathbb{R}$)

ولدينا: $\begin{cases} g(-1,28) \simeq -0,56 \\ g(-1,27) \simeq +0,01 \end{cases}$، أي: $g(-1,28) \times g(-1,27) < 0$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-1,28 < \alpha < -1,27$.

**4) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:**

بمأنّ: $g$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وَ $g(\alpha) = 0$، فإنّ:

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

II- $f$ دالّة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x+1}$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. (وحدة الطول $4\ cm$)

**1) إثبات أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$، $f'(x) = \dfrac{e^x.g(x)}{(e^x+1)^2}$:**

$f$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(xe^x)'(e^x+1)-(e^x+1)'(xe^x)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{(1\times e^x+e^x\times x)(e^x+1)-e^x(xe^x)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x(x+1)(e^x+1)-e^x(xe^x)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x(xe^x+x+e^x+1-xe^x)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$$

**2)أ- إثبات أنّ $f(\alpha) = \alpha + 1$:**

لدينا: من السؤال I-3)، $g(\alpha) = 0$

أي: $e^\alpha + \alpha + 1 = 0$ ومنه: $e^\alpha = -\alpha - 1$

وبالتعويض نجد:

$$\boxed{f(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1} = \frac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha-1+1} = \frac{-\alpha(\alpha+1)}{-\alpha} = \alpha + 1}.$$

**ب- استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$:**

لدينا: $-1,28 < \alpha < -1,27$

ومنه: $-0,28 < \alpha + 1 < -0,27$

إذن: $\boxed{-0,28 < f(\alpha) < -0,27}$.

**3)أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:**

لدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x+1) = 1 \end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.

**حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:**

لدينا: $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x+1} = \dfrac{xe^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{x}{1+\frac{1}{e^x}}$

نعلم أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ وبالتالي: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{e^x}\right) = 1$ نستنتج أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{1+\frac{1}{e^x}}\right) = +\infty$

إذن: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

**ب- تبيان أنّ المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y = x$ مستقيم مُقارب مائل للمنحنى $(C_f)$:**

لدينا: $f(x) - x = \dfrac{-x}{e^x+1} = \dfrac{-x}{x\left(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{-1}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}$

وبمأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$، فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}\right) = 0$$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{e^x+1}\right) = +\infty$

**نستنتج أنّ:** المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y = x$ مستقيم مُقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$.

**جـ- دراسة الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(D)$:**

**ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$.**

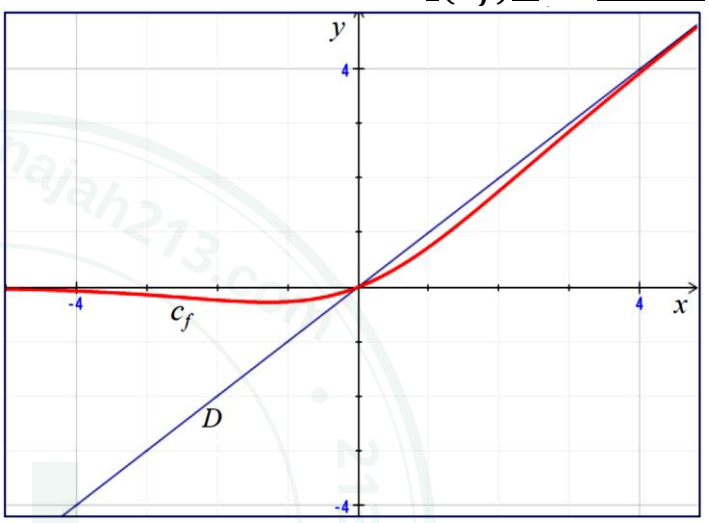
لدينا: $f(x) - x = \dfrac{-x}{e^x+1}$، ومنه: إشارة الفرق $f(x)-x$ من إشارة $(-x)$ على $\mathbb{R}$، وعليه:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ يقع فوق $(D)$ | | $(C_f)$ يقطع $(D)$ | | $(C_f)$ يقع تحت $(D)$ |

**4)أ- تشكيل جدول تغيّرات الدّالة $f$:**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | | ↗ | $+\infty$ |
| | | | $\alpha+1$ | | |

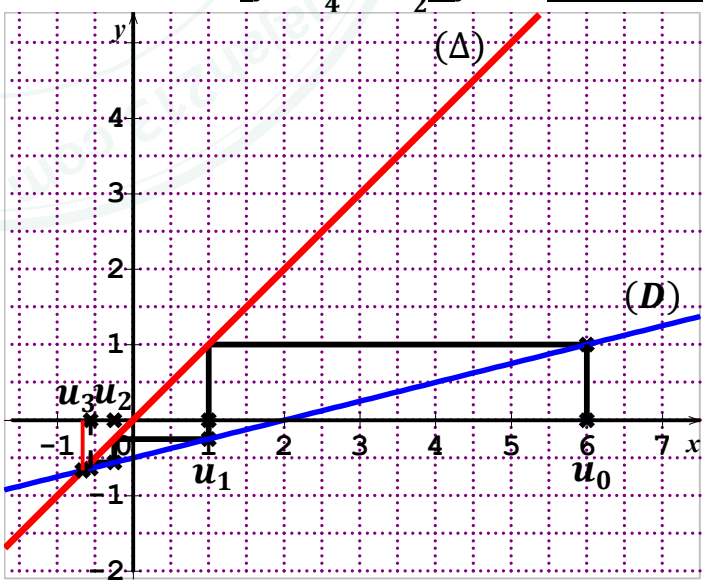
**ب- رسم $(D)$ و$(C_f)$:**




## حل الموضوع الثاني

**حل التمرين الأول: (05 نقاط)**

1) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، **تمثيل المستقيم $(\Delta)$ وَ$(D)$ اللّذين معادلتيهما على الترتيب $y=x$ وَ$y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$:**




لدينا: $\begin{cases} u_0=6 \\ u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{2} \end{cases}$.

**أ- تمثيل على حامل محور الفواصل الحدود $u_0$، $u_1$، $u_2$ وَ$u_3$ (مُبرزا خطوط الانشاء دون حسابها):**

**ب- تعيين احداثيي نقطة تقاطع المستقيمين $(\Delta)$ وَ$(D)$:**

نحل المعادلة $x=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$، ومنه: $4x=x-2$

وعليه: $x=-\frac{2}{3}$،

إذن: $(\Delta)$ و$(D)$ يتقاطعان في نقطة إحداثييها $\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

**جـ- إعطاء تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ وتقاربها:**

نلاحظ أنّ: $u_0>u_1>u_2>u_3$، فتخميني حول اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ وتقاربها فهي **متناقصة تماما وتتقارب نحو العدد $-\frac{2}{3}$**.

2) لدينا: $(v_n)$ متتالية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بالعلاقة $v_n=u_n+\alpha$، حيث $\alpha$ عدد حقيقي.

**أ- إيجاد العدد الحقيقي $\alpha$ حتى تكون $(v_n)$ متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل:**

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1}&=u_{n+1}+\alpha \\ &=\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{2}+\alpha \\ &=\frac{1}{4}(v_n-\alpha)-\frac{1}{2}+\alpha \\ &=\frac{1}{4}v_n-\frac{1}{4}\alpha-\frac{1}{2}+\alpha \end{aligned}$$

تكون $(v_n)$ متتالية هندسية،

إذا وفقط إذا كان: $-\frac{1}{4}\alpha-\frac{1}{2}+\alpha=0$

ومنه: $-\alpha-2+4\alpha=0$

وعليه: $3\alpha=2$

وبالتالي: $\boxed{\alpha=\frac{2}{3}}$، (بالتعويض نجد: $v_n=u_n+\frac{2}{3}$)

إذن: في حالة $\alpha=\frac{2}{3}$، تكون $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدّها الأوّل $v_0=u_0+\frac{2}{3}=6+\frac{2}{3}=\frac{20}{3}$.

ب- نضع $\alpha=\frac{2}{3}$، **كتابة $v_n$ بدلالة $n$ ثمّ استنتاج عبارة $u_n$ بدلالة $n$:**

لدينا: $\boxed{v_n=v_0\times q^n=\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}$،

ومنه: $\boxed{u_n=v_n-\frac{2}{3}=\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{2}{3}}$.

**جـ- تبيان أنّ $u_{n+1}-u_n=-5\left(\frac{1}{4}\right)^n$، ثمّ استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:**

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\left[\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-\frac{2}{3}\right]-\left[\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{2}{3}\right]$

$$\begin{aligned} &=\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\times\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{2}{3}-\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{2}{3} \\ &=\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{1}{4}-1\right) \\ &=\frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{-3}{4}\right) \\ &=-5\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

**استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$:**

بمأنّ: $u_{n+1}-u_n=-5\left(\frac{1}{4}\right)^n<0$،

فإنّ: $(u_n)$ **متناقصة تماما.**

**حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:**

لدينا: $u_n = \frac{20}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3}$،

وبمأنّ: $-1 < \frac{1}{4} < 1$ فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

ومنه: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\frac{2}{3}}$.

**د-حساب بدلالة $n$ المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$:**

لدينا:

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \cdots + v_n \\ &= v_0\left(\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}\right) \\ &= \frac{20}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right) \\ &= \frac{20}{3}\times\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) \\ &= \frac{80}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

**استنتاج المجموع $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$:**

لدينا:

$$\begin{aligned} S'_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ &= \left(v_0 - \frac{2}{3}\right) + \left(v_1 - \frac{2}{3}\right) + \cdots + \left(v_n - \frac{2}{3}\right) \\ &= (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) - \frac{2}{3}(n-0+1) \\ &= S_n - \frac{2}{3}(n+1) \\ &= \frac{80}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) - \frac{2}{3}(n+1) \end{aligned}$$

**حل التمرين الثاني:** (04 **نقاط**)

يحتوي كيس على 8 كريات، **أربعة منها تحمل الرقم 1 وثلاثة منها تحمل الرقم 2 وكرية واحدة تحمل الرقم 5.**

عدد الحالات الممكنة لسحب كريتين في آن واحد من هذا الكيس هو: $\boxed{C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28}$.

**1/ حساب احتمال سحب كريتين رقم كل منهما عدد أولي:**

ليكن الحدث $A$: "سحب كريتين رقم كل منهما عدد أولي"

ومنه: $\boxed{P(A) = \frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}}$.

**2/ حساب احتمال سحب كريتين مجموع رقميهما عدد فردي:**

ليكن الحدث $B$: "سحب كريتين مجموع رقميهما عدد فردي"

ومنه: $\boxed{P(B) = \frac{C_3^1\times C_5^1}{C_8^2} = \frac{15}{28}}$.

3/ لدينا: $X$ المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل عملية سحب العدد $|x-y|$ حيث $x$ وَ $y$ رقما الكريتين المسحوبتين.

أ) قيم المتغيّر العشوائي $X$ هي: 0، 1، 3، وَ4.

**ب) تعريف قانون احتمال المتغيّر العشوائي $X$، ثمّ حساب أمله الرياضياتي $E(X)$:**

$X = 0$، معناه: "سحب كريتين تحملان نفس الرقم" (الكريتين تحملان الرقم 1 **أو** تحملان الرقم 2)

ومنه: $\boxed{P(X=0) = \frac{C_4^2+C_3^2}{C_8^2} = \frac{6+3}{28} = \frac{9}{28}}$.

$X = 1$، معناه: "سحب كريتين إحداهما تحمل الرقم 1 وَالأخرى تحمل الرقم 2"

ومنه: $\boxed{P(X=1) = \frac{C_4^1\times C_3^1}{C_8^2} = \frac{4\times3}{28} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}}$.

$X = 3$، معناه: "سحب كريتين إحداهما تحمل الرقم 2 وَالأخرى تحمل الرقم 5"

ومنه: $\boxed{P(X=3) = \frac{C_3^1\times C_1^1}{C_8^2} = \frac{3\times1}{28} = \frac{3}{28}}$.

$X = 4$، معناه: "سحب كريتين إحداهما تحمل الرقم 1 وَالأخرى تحمل الرقم 5"،

ومنه: $\boxed{P(X=4) = \frac{C_4^1\times C_1^1}{C_8^2} = \frac{4\times1}{28} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}}$.

نُلخص النتائج في الجدول التالي:

| $x_i$ | 0 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{9}{28}$ | $\frac{12}{28}$ | $\frac{3}{28}$ | $\frac{4}{28}$ |

**حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:**

لدينا: $E(X) = 0\times\frac{9}{28} + 1\times\frac{12}{28} + 3\times\frac{3}{28} + 4\times\frac{4}{28}$

$= \frac{0+12+9+16}{28}$

$= \frac{37}{28}$

**حل التمرين الثالث:** (04 **نقاط**)

لدينا المعادلة: $(E)\ \ldots\ 4862x - 1430y = 2002$

حيث $x$ و $y$ عدادان صحيحان.

**1) حساب القاسم المشترك الأكبر للأعداد 4862، 1430 وَ2002:**

لدينا: $\begin{cases} 4862 = 2\times11\times13\times17 \\ 1430 = 2\times5\times11\times13 \\ 2002 = 2\times7\times11\times13 \end{cases}$، ومنه:

$\boxed{PGCD(4862;1430;2002) = 2\times11\times13 = 286}$.

**2)أ. تبيان أنّ $(E)$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$:**

- $(E)$ تُكافئ: $17x - 5y = 7$
- بمأنّ: 17 أولي مع 5،

فإنّه: توجد ثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ تُحقق $17x-5y=1$،

وبضرب الطرفين في 7، نجد:

$17X - 5Y = 7$ (حيث $X = 7x$ وَ $Y = 7y$)،

إذن: $(E)$ **تقبل حلولا** في $\mathbb{Z}^2$.

**ب. حل المعادلة $(E)$:**

إيجاد حل خاص لـ$(E)$:

نلاحظ أنّ: $\mathbf{2}\times5 - \mathbf{1}\times17 = 7$، إذن: الثنائية $(1;2)$ حل خاص لـ$(E)$.

حل المعادلة $(E)$:

لدينا: $\begin{cases} 17x - 5y = 7 \ \ldots(1) \\ 17(\mathbf{1}) - 5(\mathbf{2}) = 7 \ \ldots(2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد: $17(x-1) - 5(y-2) = 0$

وعليه: $17(x-1) = 5(y-2)$

ومنه: 5 **يقسم** $17(x-1)$ **وَ** 5 **أولي مع** 17

إذن: حسب مبرهنة **غوص**؛ 5 **يقسم** $(x-1)$

أي: يوجد عدد صحيح $k$، حيث $x-1=5k$

وبالتالي: $\boxed{x=5k+1}$.

بالتعويض نجد: $\boxed{y=17k+2}$.

إذن: $\boxed{(x;y)=(5k+1;17k+2)}$ (حيث $k\in\mathbb{Z}$).

3) $a$ وَ $b$ عددان طبيعيان حيث $(a;b)$ حل للمعادلة $(E)$، نضع: $d=PGCD(a;b)$.

**أ. تعيين القيم الممكنة لـ $d$:**

لدينا: $d=PGCD(a;b)$، ومنه: $d|a$ و $d|b$

وعليه: $d|17a-5b$

أي: $d|7$

وهذا يعني أنّ: $d\in D_7$

إذن: $\boxed{d\in\{1;7\}}$

**ب. تعيين الثنائيات $(a;b)$ عندما $d=7$:**

$\boxed{(a;b)=(35k+7;119k+14)}$ (حيث $k\in\mathbb{N}$).

**حل التمرين الرابع: (07 نقاط)**

**الجزء الأوّل:**

لدينا: $g$ دالّة معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$g(x)=1-x^2-\ln x$.

**1) دراسة تغيّرات الدّالة $g$ على $]0;+\infty[$ :**

النهايات:

لدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(1-x^2)=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln x=-\infty\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}g(x)=+\infty}$.

ولدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x^2)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty}$.

اتجاه التغيّر:

$g$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، ولدينا:

$\boxed{g'(x)=-2x-\frac{1}{x}=-\frac{2x^2+1}{x}<0}$.

ومنه: الدّالة $g$ **متناقصة تماما** على $]0;+\infty[$.

جدول التغيّرات:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | | $+$ | | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $+$ $+$ | | $-$ $-$ | $-\infty$ |

**2) حساب $g(1)$ ثمّ استنتاج، حسب قيم $x$، إشارة $g(x)$:**

لدينا: $g(1)=1-(1)^2-\ln 1=0$،

وبمأنّ: $g$ **متناقصة تماما** على المجال $]0;+\infty[$، فإنّ:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ‖ | $+$ | | $-$ | |

**الجزء الثاني:**

لدينا: $f$ دالّة عددية معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$f(x)=\frac{\ln x}{x}-x+2$

$(C)$ المنحنى المُمثل للدّالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2\ cm$).

**1)أ- حساب نهاية الدّالة $f$ عند 0، وتفسير هندسيا النتيجة:**

لدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}x=0^+\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}f(x)=-\infty}$.

**وتفسيرها الهندسي هو:** المنحنى $(C)$ يقبل محور التراتيب كمُقارب له.

**ب- حساب نهاية الدّالة $f$ عند $+\infty$:**

لدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)=-\infty\end{cases}$، ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty}$.

**جـ- تبيان أنّ المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y=-x+2$ هو مستقيم مُقارب مائل للمنحنى $(C)$ عند $+\infty$:**

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

**نستنتج أنّ:** المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y=-x+2$ مستقيم مُقارب مائل للمنحنى $(C)$ عند $+\infty$.

**د- دراسة الوضعية النسبية للمنحنى $(C)$ بالنسبة للمستقيم $(D)$:**

**ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-x+2)$.**

لدينا: $f(x)-(-x+2)=\frac{\ln x}{x}$، ومنه: إشارة الفرق $f(x)-(-x+2)$ من إشارة $\ln x$ على $]0;+\infty[$، وعليه:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)-(-x+2)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| الوضع النسبي | ‖ | $(C)$ يقع تحت $(D)$ | $(C_f)$ يقطع $(D)$ | $(C)$ يقع فوق $(D)$ | |

**2)أ- إثبات أنّه، من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$، $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$:**

$f$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، ولدينا:

$\boxed{f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln x}{x^2}-1=\frac{1-\ln x}{x^2}-1=\frac{1-\ln x-x^2}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}}$

**ب- استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ وتشكيل جدول تغيّراتها:**

على المجال $]0;+\infty[$، $x^2>0$ إذن: إشارة $f'(x)$ هي من إشارة البسط $g(x)$.

وبالتالي: $f$ **متزايدة تماما** على المجال $]0;1]$ وَ**متناقصة تماما** على المجال $[1;+\infty[$، **ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

najah213.com · نجاح 213

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\infty$ |

**3)أ- تعيين إحداثيي النقطة $A$ من $(C)$ التي يكون المماس عندها مُوازيا للمستقيم $(D)$:**

نضع: $f'(x)=-1$، نجد: $\frac{1-\ln x-x^2}{x^2}=-1$

ومنه: $1-\ln x-x^2=-x^2$

وعليه: $1-\ln x=0$

ومنه: $\ln x=1$

وبالتالي: $x=e$

وبمأنّ: $f(e)=\frac{\ln e}{e}-e+2=\frac{1}{e}+2-e$

فإنّ: $\boxed{A\left(e;\frac{1}{e}+2-e\right)}$

**ب- كتابة معادلة للمستقيم $(T)$، مماس المنحنى $(C)$ عند النقطة ذات الفاصلة $e$:**

معادلة $(T)$ من الشكل $y=f'(e)(x-e)+f(e)$

ومنه: $y=-(x-e)+\frac{1}{e}+2-e$،

نجد: $\boxed{(T):y=-x+\frac{1}{e}+2}$.

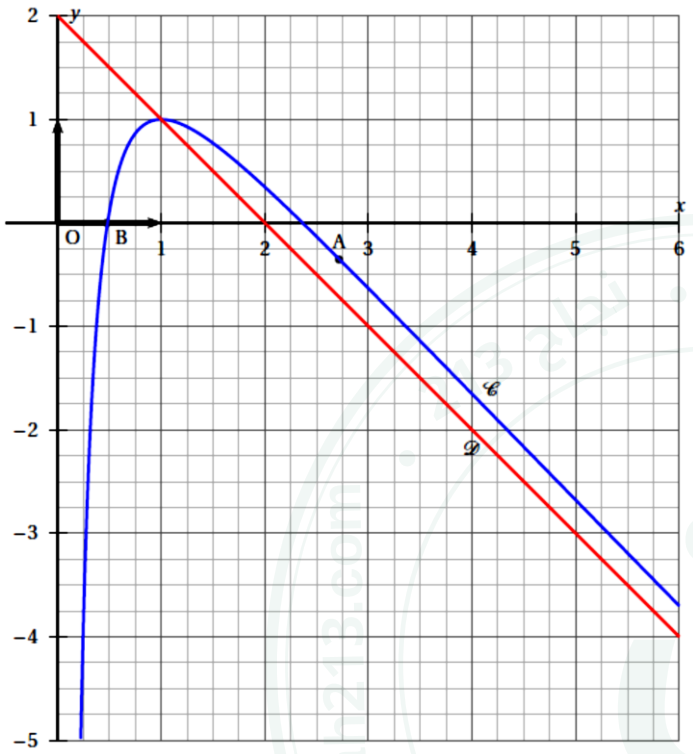
**4) إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $]0;1[$ :**

$f$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1[$

ولدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)=-\infty\\ f(1)=1\end{cases}$، أي: $0\in]-\infty;1[$

إذن: حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $]0;1[$.

**5) رسم المستقيمين $(D)$، $(T)$ وَالمنحنى $(C)$:**




**انتهى ـــــــــــ مُحبكم في اللّه أستاذ المادة ـــــــــــ بالتوفيق في بكالوريا دورة جوان 2021.**

تمرين محلول 12 : ( Bac Métropole juin 2007 )

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

$(c)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $f'(x)$ لكل $x$ من $]-1;+\infty[$ .

2) من أجل كل $x$ من $]-1;+\infty[$ ، نضع : $g(x)=(x+1)^2-1+\ln(x+1)$

- تحقق أن الدالة $g$ متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ .

- احسب $g(0)$ . استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ .

3) ادرس الوضع النسبي للمنحني $(c)$ بالنسبة للمستقيم $(D)$ الذي معادلته $y=x$ .

4) ارسم المستقيم $(D)$ والمنحني $(c)$ .

الحل :

1) حساب $f'(x)$ : $f(x)=x-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

من أجل كل $x$ من $]-1;+\infty[$ :

$$f'(x)=(x)'-\frac{[\ln(x+1)]'\times(x+1)-(x+1)'\times\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

إذن : $f'(x)=\frac{(x+1)^2+1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

2) التحقق أن الدالة $g$ متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ :

من أجل كل $x$ من $]-1;+\infty[$ : $g'(x)=2(x+1)+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$

إذا كان $x\in]-1;+\infty[$ فإن $(x+1)>0$ و $(x+1)^2>0$

وبالتالي : $\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}>0$ أي : $g'(x)>0$

إذن : الدالة $g$ متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ .

- حساب $g(0)$ : $g(0)=(0+1)^2-1+\ln(0+1)=0$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ :

لدينا : الدالة $g$ متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ و $g(0)=0$

نستنتج أن : $[g(x)=0]$ يكافئ $[x=0]$

$[g(x)>0]$ يكافئ $[x\in]0;+\infty[]$

$[f(x)<0]$ يكافئ $[x\in]-1;0[]$

لكن : $f'(x)=\frac{(x+1)^2+1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$

وبالتالي فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه النتيجة التالية :

الدالة $f$ متناقصة على المجال $]-1;0[$ ومتزايدة على المجال $]0;+\infty[$

3) دراسة الوضع النسبي للمنحني $(c)$ بالنسبة للمستقيم $(D)$ :

من أجل كل $x$ من $]-1;+\infty[$ : $f(x)-x=-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

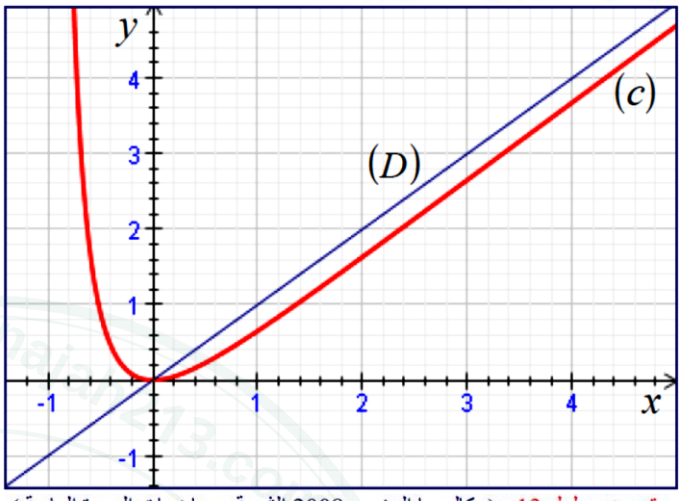
إذا كان $x\in]-1;+\infty[$ فإن $(x+1)>0$ وبالتالي فإن إشارة الفرق $f(x)-x$ من إشارة $-\ln(x+1)$ .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

- $[-\ln(x+1)=0]$ يكافئ $[\ln(x+1)=0]$ ومنه : $\ln(x+1)=\ln 1$
وبالتالي : $(x+1)=1$ إذن : $x=0$
في هذه الحالة : المستقيم $(D)$ يقطع المنحني $(c)$ في النقطة $O(0;0)$.
- $[-\ln(x+1)>0]$ يكافئ $[\ln(x+1)<0]$ ومنه : $\ln(x+1)<\ln 1$
وبالتالي : $(x+1)<1$ إذن : $x<0$ أي : $x\in\,]-1;0[$
في هذه الحالة : المنحني $(c)$ يقع فوق المستقيم $(D)$ .
- $[-\ln(x+1)<0]$ يكافئ $[x\in\,]0;+\infty[\,]$
في هذه الحالة : المنحني $(c)$ يقع تحت المستقيم $(D)$ .

4) رسم المستقيم $(D)$ والمنحني $(c)$ :




تمرين محلول 13 : ( بكالوريا المغرب 2008 الشعبة : رياضيات الدورة العادية )

لتكن $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ :
$f(x)=2x-e^{-x^2}$ ، $(c)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- احسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$ ثم فسّر هذه النتيجة هندسيا .
ب- احسب $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة $f$ .
جـ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0<\alpha<1$ .
د- ادرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0;1]$ .
2) أنشئ المنحني $(c)$ . ( نأخذ : $\alpha\approx 0.4$ )

الحل :

1) أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$ : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^{-x^2}\right)=0$

- التفسير الهندسي :
تذكير : إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة $f$ عند $+\infty$ .
بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0$ نستنتج أن المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y=2x$ مستقيم مقارب مائل للمنحني $(c)$ عند $+\infty$ .

ب- حساب $f'(x)$ :
الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و $f'(x)=2+2xe^{-x^2}$
ومن أجل كل $x$ من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$

- جدول تغيرات الدالة $f$ :
$f(0)=-1$
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $+\infty$ |

جـ- تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0<\alpha<1$ :

تذكير : إذا كان :
- $f$ مستمرة على المجال $[a;b]$ ؛
- $f$ رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ ؛
- $f(a)\cdot f(b)<0$ .

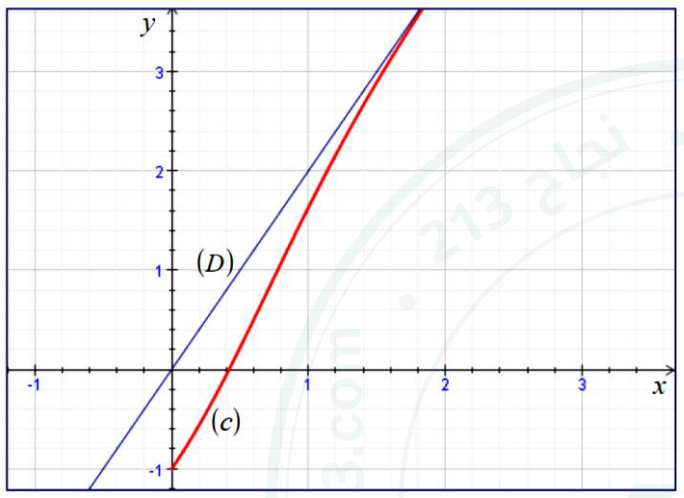
فإنه ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $]a;b[$ .

- من جدول تغيرات الدالة $f$ نستنتج أنها مستمرة ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$ وبالتالي فهي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0;1]$ .
- زيادة على ذلك ، نتحقق بسهولة أن : $f(0)\times f(1)<0$ .
من هذه الحالات الثلاثة ( الاستمرارية ، الرتابة والجداء سالب ) وحسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ مع $0<\alpha<1$ .

د- دراسة إشارة $f(x)$ على المجال $[0;1]$ : $[f(x)=0]$ يكافئ $[x=\alpha]$
$[f(x)>0]$ يكافئ $[x\in\,]\alpha;1]$ و $[f(x)<0]$ يكافئ $[x\in[0;\alpha[\,]$

| $x$ | $0$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

2) رسم المستقيم $(D)$ والمنحني $(c)$ :




فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | ○ | + | ○ | - | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $\frac{-4}{3}$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | ▮ | - | ○ | + | |
| $f(x)-(-x+2)$ | ▮ | - | ○ | + | |
| **الوضع النسبي** | ▮ | $(C)$ يقع تحت $(D)$ | $(C_f)$ $(D)$ يقطع | $(C)$ يقع فوق $(D)$ | |

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ▮ | + | ○ | - | |

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ▮ | | + | | |
| $g(x)$ | ▮ $+\infty$ | + + | ○ | - - | $-\infty$ |