najah213.com · نجاح 213

ثانوية عراب عبد القادر
شعبة رياضي

السنة الدراسية 2025-2026
المدة : 1ساعة و 30 دقيقة

الفرض الأول للفصل الأول

التمرين 1

i.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $1+x \leq e^x$

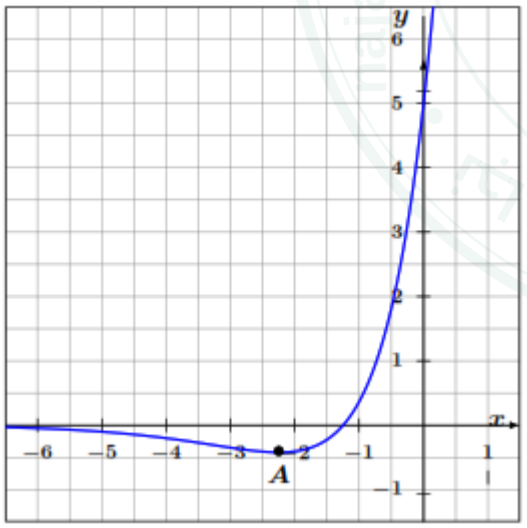
2) أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^+$: $0 \prec 1-e^{-x} \prec x$

ب-استنتج أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^+$: $0 \leq 1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x} \leq \frac{x^3}{6}$

ج-بين أن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1-x-e^{-x}}{x^2} = \frac{-1}{2}$

التمرين 2

g الدالة المعرفة و القابلة للاشتقاق على $]-\infty;1]$ بـ : $g(x) = (ax+b)e^x - 1$ (a و b عددان حقيقيان).



I) في الشكل أدناه، $(\mathcal{C}')$ هو التمثيل البياني للدالة g' مشتقة الدالة g.

1) اذا علمت أن $(\mathcal{C}')$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $-\frac{5}{4}$ ، و يقطع حامل محور التراتيب في النقطة ذات الترتيبة 5 ، وأنه يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل في النقطة A ذات الفاصلة $-\frac{9}{4}$.

ا) بقراءة بيانية ادرس اتجاه تغير الدالة g، ماذا تمثل النقطة A؟

ب) عين العددين a و b.

(في باقي التمرين نضع $a=4$ و $b=1$)

2) ا) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة g على المجال $]-\infty;1]$.

ب) احسب $g(0)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty;1]$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;1]$ بـ : $f(x)=x-(4x-3)e^x$

و ليكن $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ا) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم بين أن المنحنى $(\mathcal{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=x$.

ب) ادرس وضعية المنحنى $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ) مع تحديد نقطة تقاطعهما.

2) ا) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. (لاحظ أن $f'(x)=-g(x)$).

ب) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $-2<\alpha<-\frac{5}{4}$ و $\frac{3}{4}<\beta<1$.

3) ا) اكتب معادلة لـ (Δ') مماس $(\mathcal{C})$ الذي يوازي (Δ)، ثم ارسم المستقيمين (Δ) و (Δ') و المنحنى $(\mathcal{C})$.

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود و عدد حلول المعادلة $(4x-3)e^x=m$.

4) لتكن الدالة h المعرفة على المجال $]-\infty;1]$ بـ : $h(x)=(4x-3)e^x$.

ا) بين أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty;1]$ فإن : $h(x)=2h'(x)-h''(x)$.

مهما كان السؤال صعب تفكر أن الاجابة
موجودة في أحد الدروس التي تطرقنا لها فقط
فكر كيف تستخدم الدرس بطريقة جيدة للوصول
إلى الحل

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

حل التمرين الأول

I.

1) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $1+x\le e^x$

نفرض الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي $h(x)=e^x-x-1$

لندرس تغيرات الدالة h:

- النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x-x-1=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x-x-1=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(1-\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)=+\infty$
- المشتقة : $h'(x)=e^x-1$
- جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

من خلال الجدول نستنتج أن الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى عند 0 هي 0

إذن $h(x)\succ 0$ ومنه $e^x-x-1\succ 0$ إذن $e^x\succ x+1$

2) أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^+$: $0\prec 1-e^{-x}\prec x$

- لدينا $x\succ 0$ أي $-x\prec 0$ ومنه $e^{-x}\prec e^0$ ومنه $e^{-x}\prec 1$ إذن $0\prec 1-e^{-x}$.....(1)

- لدينا $e^x\succ x+1$ بإستبدال x ب $-x$ نجد $e^{-x}\succ -x+1$ ومنه $x\succ 1-e^{-x}$ أي $1-e^{-x}\prec x$.....(2)

من خلال (1) و (2) نجد $0\prec 1-e^{-x}\prec x$

ث- استنتاج أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^+$: $0\le 1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}\le\frac{x^3}{}$

- نفرض الدالة g حيث $g(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}$

دراسة إتجاه تغير الدالة g : لدينا $g'(x)=-1+x+e^{-x}$

مما سبق نجد أن $g'(x)=-1+x+e^{-x}\succ 0$ و بالتالي الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}^+$

إذن لدينا : $x\succ 0$ أي $g(x)\succ g(0)$ ومنه $1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}\succ 1\succ 0$ ومنه $1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}\succ 0$.....(1)

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

• لنفرض الدالة k حيث $k(x)=\frac{x^3}{6}-1+x-\frac{x^2}{2}+e^{-x}$

لدينا $k'(x)=\frac{x^2}{2}+1-x-e^{-x}$ نلاحظ أن $k'(x)=g(x)\succ 0$

ومنه الدالة k متزايدة تماما على $\mathbb{R}^+$

إذن لدينا : $x\succ 0$ أي $k(x)\succ k(0)$ ومنه $\frac{x^3}{6}-1+x-\frac{x^2}{2}+e^{-x}\succ 0$ إذن $1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}\prec\frac{x^3}{6}$.....(2)

إذن من خلال (1) و (2) نجد $0\prec 1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}\prec\frac{x^3}{6}$

ج- تبين أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\frac{1-x-e^{-x}}{x^2}=-\frac{1}{2}$

لدينا $0\prec 1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}\prec\frac{x^3}{6}$ أي $-\frac{x^2}{2}\prec 1-x-e^{-x}\prec\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}$ ومنه $-\frac{1}{2}\prec\frac{1-x-e^{-x}}{x^2}\prec\frac{x}{6}-\frac{1}{2}$

بما أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\frac{x}{6}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ وبإستعمال النهاية بالمقارنة نجد $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\frac{1-x-e^{-x}}{x^2}=-\frac{1}{2}$

حل التمرين 2

(I

1 ا اشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$		$-5/4$		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

لما : $x\in]-\frac{5}{4};+\infty[$: g متزايدة تماما

لما : $x\in]-\infty;-\frac{5}{4}]$: g متناقصة تماما.

A تمثل نقطة انعطاف لـ $\mathcal{C}$. تعيين العددين a و b :

لدينا : $g'(x)=(ax+a+b)e^x$

أي : $\begin{cases}g'(-\frac{5}{4})=0\\ g(0)=5\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}-\frac{a}{4}+b=0\\ a+b=5\end{cases}$ و $a=4$ و $b=1$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

2 ا. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ، ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة g على المجال $]-\infty;1]$:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (4xe^x + e^x - 1) = -1$$

لدينا : $g'(x) = (4x+5)e^x$

x	$-\infty$		$-5/4$		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	↘	-2.15	↗	12.6

ب حساب $g(0)$ ثم استنتاج اشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty;1]$:

لدينا : $g(0) = 0$, اشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		0		1
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II

1 ا حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x - 4xe^x + 3e^x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - y) = \lim_{x\to-\infty} (-4xe^x + 3e^x) = 0$$

$(\mathcal{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = x$.

ب دراسة وضعية المنحنى $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ) :

اشارة : $f(x) - y = e^x(-4x+3)$

x	$-\infty$		$3/4$		1
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	

لما : $x \in]-\infty;\frac{3}{4}[$ $(\mathcal{C})$ فوق (Δ)

لما : $x \in]\frac{3}{4};1]$ $(\mathcal{C})$ تحت (Δ)

$(\mathcal{C})$ يقطع (Δ) عند $B(\frac{3}{4};\frac{3}{4})$.

2 ا دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا :

$$f'(x) = 1 - (4e^x + e^x(4x-3)) = 1 - (1+4x)e^x = -g(x)$$

f متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ و متناقصة تماما على $[0;1]$.

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	$1-e$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ب تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $-2<\alpha<-\frac{5}{4}$ و $1<\beta<\frac{3}{4}$:

f مستمرة و متزايدة تماما على $]-2;-\frac{5}{4}[$ و $\begin{cases} f(-2)\approx -0.51 \\ f(-\frac{5}{4})\approx 1.04 \end{cases}$ اي : $f(-2)\times f(-\frac{5}{4})<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-2<\alpha<-\frac{5}{4}$.

كذلك f مستمرة و متناقصة تماما على $]\frac{3}{4};1[$ و $\begin{cases} f(\frac{3}{4})\approx 0.75 \\ f(1)\approx -1.72 \end{cases}$ أي : $f(\frac{3}{4})\times f(1)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $\frac{3}{4}<\beta<1$.

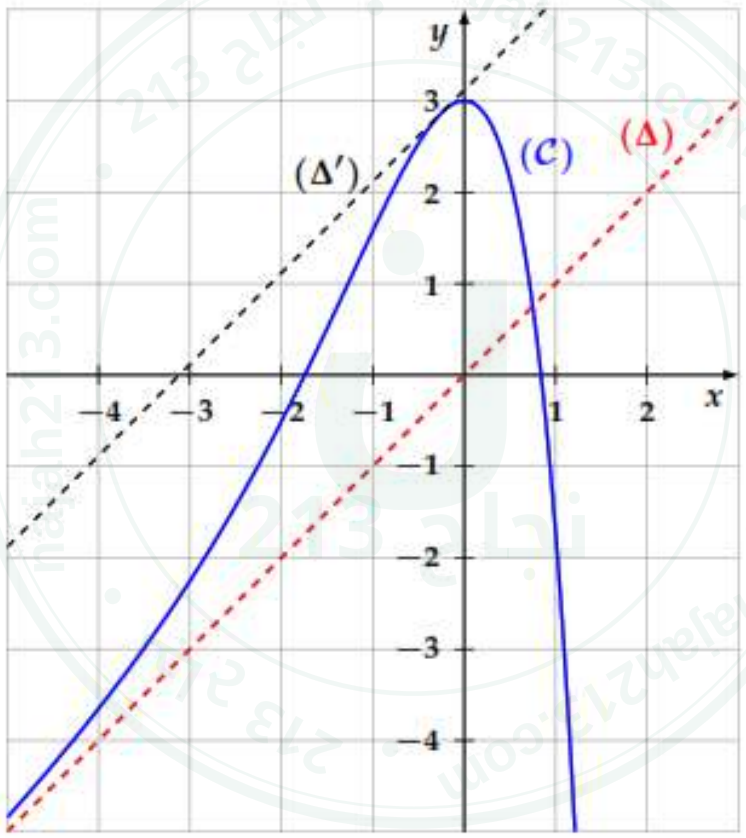
3 **أ** كتابة معادلة لـ (Δ') مماس (C) الذي يوازي (Δ) :

(Δ') يوازي (Δ) يعني أن لهما نفس الميل $f'(x_0)=1$, تكافئ : $1-e^{x_0}(4x_0+1)=1$ ومنه : $x_0=-\frac{1}{4}$

معادلة المماس (Δ') :

$$y=1(x+\frac{1}{4})+f(-\frac{1}{4})=x+4e^{-\frac{1}{4}}$$

الرسم :



ب المناقشة البيانية :

$(4x-3)e^x=m$ تكافئ $x-(4x-3)e^x=x-m$ تكافئ : $f(x)=x-m$ الحلول عبارة عن فواصل نقط تقاطع (C) مع المستقيمات المائلة (ميلها 1)

المستقيمات المساعدة هي : $y=x$, $y=x+4^{-\frac{1}{4}}$ و $y=x-e$ (مستقيم ميله 1 و يشمل النقطة $C(1;1-e)$).

- $-m<-e$ أي : $m>e$: لا يوجد حلول.
- $-e\le -m\le 0$ أي : $0\le m\le e$: حل وحيد.
- $0<-m<4e^{-\frac{1}{4}}$ أي : $-4e^{-\frac{1}{4}}<m<0$: حلان متمايزان.
- $-m=4e^{-\frac{1}{4}}$ أي $m=-4e^{-\frac{1}{4}}$: حل وحيد.
- $-m>4e^{-\frac{1}{4}}$ أي : $m<-4e^{-\frac{1}{4}}$: لا يوجد حلول.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

4 ا تبيان أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty;1[$ فإن : $h(x)=2h'(x)-h''(x)$:

$h(x)=(4x-3)e^x$,$h'(x)=(4x+1)e^x$,$h''(x)=(4x+5)e^x$

ومنه : $h(x)=2h'(x)-h''(x)$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com