najah213.com · نجاح 213

ثانوية محمود بن محمود/ قالمة — السنة الدراسية : 2020/2019

المادة : رياضيات — المستوى : 3 ع تج – المدة : 2 سا

اختبـــار الثلاثـــي الثانـــي

التمرين الأول : (07 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_1 = 2$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \frac{(n+1)u_n + n - 1}{2n}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq 1$.

2) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$ واحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-n)(u_n - 1)}{2n}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ماذا تستنتج ؟

4) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{n}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) عبر عن v_n بدلالة n .

5) احسب المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

6) احسب المجموع : $S'_n = \ln(u_1 - 1) + \ln(u_2 - 1) + \cdots + \ln(u_n - 1)$.

التمرين الثاني : (06 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 قريصات لا نفرق بينها باللمس ، منها أربع قريصات بيضاء تحمل الرقم 0 وثلاث قريصات حمراء تحمل الرقم 7 و قريصتان بيضاوان تحملان الرقم 2 وقريصة حمراء تحمل الرقم 5 .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 4 قريصات من هذا الصندوق .

نعتبر الحوادث الآتية :

A "جميع القريصات تحمل أرقاما مختلفة مثنى مثنى"

B "نستطيع تشكيل العدد أرقاما 2000"

C "جميع القريصات بيضاء"

D "جميع القريصات من نفس اللون ".

E "على الأقل توجد قريصة رقمها يختلف عن باقي أرقام القريصات الأخرى".

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

1) أ) بين أن $P(B) = \frac{4}{105}$.

ب) احسب : $P(A)$ ، $P(C)$ ، $P(D)$ و $P(E)$.

ج) نفرض أن الحادثة C محققة ، احسب احتمال الحادثة B .

2) نعتبر القيم النقدية الآتية الموافقة لسحب 4 كريات بالطريقة السابقة حيث :

- تشكيل العدد 5000 يوافقه 75 دينارا.
- تشكيل العدد 7000 يوافقه 50 دينارا.
- تشكيل العدد 2000 يوافقه 20 دينارا.
- تشكيل العدد 0000 يوافقه 25 دينارا بقيمة سالبة.
- بقية الحالات توافقها 5 دنانير بقيمة سالبة.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي القيمة النقدية الموافقة للسحبة.

- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث : (07 نقاط)

1) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - 2z + 4 = 0$.

حيث z_1 الحل الذي جزؤه التخيلي موجب.

ب) اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

ج) استنتج حلول المعادلة : $(i\bar{z} + 2 - i)^2 - 2(i\bar{z} + 2 - i) + 4 = 0$.

د) عين طويلة وعمدة العددين المركبين ${z_1}^2$ و ${z_2}^2$ ثم استنتج الشكل الجبري لـ ${z_1}^2$ و ${z_2}^2$.

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$.

A ، B ، A' و B' أربع نقط من المستوي لواحقها : $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ ، $z_{A'} = -2 + 2i\sqrt{3}$ و $z_{B'} = -2 - 2i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ) احسب $z_{\overrightarrow{AB}}$ و $z_{\overrightarrow{A'B'}}$ لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ على الترتيب ، ماذا تستنتج؟

ب) احسب $z_{\overrightarrow{AA'}}$ و $z_{\overrightarrow{BB'}}$ لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{BB'}$ على الترتيب ، ماذا تستنتج؟

ج) ما طبيعة الرباعي $AA'BB'$ ؟

د) اكتب : $\frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z_B}$ على الشكل المثلثي واستنتج طبيعة المثلث $AA'B'$.

انتهى الموضوع

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

عرض حال ≠ اختبار الثلاثي الثاني

ع ت ج 3

التمرين الأول :

1) نضع $P(n): U_n \geq 1$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

- من أجل $n=1$: $U_1 = 2 > 1$

ومنه $P(1)$ صحيحة

- نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ أي أن : $U_n \geq 1$

- ونبرهن صحة $P(n+1)$ ، أي أن : من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $U_{n+1} \geq 1$

لدينا :

$$U_n \geq 1$$

$$(n+1)U_n \geq n+1$$

$$(n+1)U_n + n - 1 \geq n + 1 + n - 1$$

$$(n+1)U_n + n - 1 \geq 2n$$

$$\frac{(n+1)U_n + n - 1}{2n} \geq \frac{2n}{2n}$$

$$U_{n+1} \geq 1$$

$P(n+1)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة ، أي أن : $U_n \geq 1$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

2) نضع : $P(n): U_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

- من أجل $n=1$: $U_1 = 1 + 1 = 2$

ومنه $P(1)$ صحيحة .

- نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ أي أن : $U_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$

- ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي :

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ $U_{n+1} = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$

لدينا :

$$U_{n+1} = \frac{(n+1)U_n + n - 1}{2n}$$

$$= \frac{(n+1)\left[n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1\right] + n - 1}{2n}$$

$$= \frac{n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2n} + 1$$

$$= \frac{(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2} + 1$$

$$= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$$

$P(n+1)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة ، أي أن :

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$

- حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \left(n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(n\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 1\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(2n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(2\frac{n}{2^n} + 1\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(2 \times \frac{n}{e^{\ln 2^n}} + 1\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(2 \times \frac{\ln 2}{\ln 2} \times \frac{n}{e^{n \ln 2}} + 1\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{\ln 2} \times \frac{n \ln 2}{e^{n \ln 2}} + 1\right) = 1$$

لأن $\frac{n \ln 2}{e^{n \ln 2}} = \frac{1}{\frac{e^{n \ln 2}}{n \ln 2}} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

لأن $\frac{e^{n \ln 2}}{n \ln 2} \to +\infty$ (التزايد المقارن)

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$$= \frac{\frac{(n+1)U_n + n - 1 - 2n}{2n}}{n+1} \times \frac{n}{U_n - 1}$$

$$= \frac{(n+1)U_n - n - 1}{2n(n+1)} \times \frac{n}{U_n - 1}$$

$$= \frac{(n+1)U_n - (n+1)}{2n(n+1)} \times \frac{n}{U_n - 1}$$

$$= \frac{U_n - 1}{2(U_n - 1)} = \frac{1}{2}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_1 = \frac{U_1 - 1}{1} = 1$

ب * التعبير عن v_n بدلالة n:

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(5

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

$$= v_1 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right) = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

(6

$$S'_n = \ln(U_1 - 1) + \ln(U_2 - 2) + \cdots + \ln(U_n - n)$$

$$= \ln(1v_1 + 1 - 1) + \ln(2v_2 + 1 - 1) + \cdots + \ln(nv_n + 1 - 1)$$

$$= \ln(1v_1) + \ln(2v_2) + \cdots + \ln(nv_n)$$

$$= \ln(1) + \ln(v_1) + \ln(2) + \ln(v_2) + \cdots + \ln(n) + \ln(v_n)$$

$$= \ln(1) + \ln(2) + \cdots + \ln(n) + \ln(v_1) + \ln(v_2) + \cdots + \ln(v_n)$$

$$= \ln(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n) + \ln(v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n)$$

$$= \ln(n!) + \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \cdots \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(n+1)U_n + n - 1}{2n} - U_n \quad (3$$

$$= \frac{nU_n + U_n + n - 1 - 2nU_n}{2n}$$

$$= \frac{U_n - nU_n + n - 1}{2n}$$

$$= \frac{(1-n)U_n - (1-n)}{2n}$$

$$= \frac{(1-n)(U_n - 1)}{2n}$$

- استنتاج اتجاه تغير المتتالية (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(1-n)(U_n - 1)}{2n}$$

$2n > 0$ في أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$، إذن إشارة الفرق هي من إشارة البسط.

لدينا حسب السؤال (1): $U_n \geq 1$ ومنه $U_n - 1 \geqslant 0$

و $1 - n \leqslant 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

إذن $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ومنه (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$.

- الاستنتاج:

بما أن $U_n \geq 1$ (محدودة من الأسفل) ومتناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$ فهي متقاربة (تتقارب نحو 1)

(4

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{U_{n+1} - 1}{n+1}}{\frac{U_n - 1}{n}}$$

$$= \frac{U_{n+1} - 1}{n+1} \times \frac{n}{U_n - 1}$$

$$= \frac{\frac{(n+1)U_n + n - 1}{2n} - 1}{n+1} \times \frac{n}{U_n - 1}$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$P(X=50) = \frac{C_4^3 \times C_3^1}{210} = \frac{12}{210}$

$P(X=75) = \frac{C_4^3 \times C_1^1}{210} = \frac{4}{210}$

$P(X=-5) = 1 - \left(\frac{1}{210} + \frac{8}{210} + \frac{12}{210} + \frac{4}{210}\right)$

$= 1 - \frac{25}{210} = \frac{185}{210}$

ومنه

$X = x_i$	-5	-25	20	50	75
$P(X=x_i)$	$\frac{185}{210}$	$\frac{1}{210}$	$\frac{8}{210}$	$\frac{12}{210}$	$\frac{4}{210}$

- حساب الأمل الرياضياتي:

$E(X) = (-5) \times \frac{185}{210} - 25 \times \frac{1}{210} + 20 \times \frac{8}{210}$

$+50 \times \frac{12}{210} + 75 \times \frac{4}{210} = \frac{11}{21}$

التمرين الثالث:

1) $z^2 - 2z + 4 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 = 12i^2$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}\, i$

$z_1 = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{2} = 1 + \sqrt{3}\, i$

$z_2 = \frac{2 - 2\sqrt{3}\, i}{2} = 1 - \sqrt{3}\, i$

$S = \{1 - \sqrt{3}i ; 1 + \sqrt{3}i\}$

ب)

$z_1 = 2 e^{\frac{\pi}{3} i}$

$z_2 = 2 e^{-\frac{\pi}{3} i}$

ج) بوضع $iz + 2 - i = x$

نطبق المعادلة من الشكل: $x^2 - 2x - 4 = 0$

$= \ln(n!) + \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1+\cdots+(n-1)}\right)$

$= \ln(n!) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}(n-1)}$

التمرين الثاني:

1) عدد الحالات الممكنة $= C_{10}^4 = 210$ عدد الحالات

أ) $P(B) = \frac{C_2^1 \times C_3^3}{210} = \frac{4}{105}$

$P(A) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{210} = \frac{56}{210} = \frac{28}{105}$

$P(C) = \frac{C_6^4}{210} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$

$P(D) = \frac{C_6^4 + C_4^4}{210} = \frac{15+1}{210} = \frac{16}{210} = \frac{8}{105}$

- حساب $P(E)$:

لدينا الحادثة $\bar{E}$ "الحصول على كرية واحدة فقط رقمها يختلف عن باقي أرقام الكريات الأخرى"

$P(\bar{E}) = \frac{C_4^4}{210} = \frac{1}{210}$

$P(E) = 1 - \frac{1}{210} = \frac{209}{210}$ ومنه

ج) $P_C(B) = \frac{P(C \cap B)}{P(C)} = \frac{P(B)}{P(C)}$

$= \frac{8}{15}$

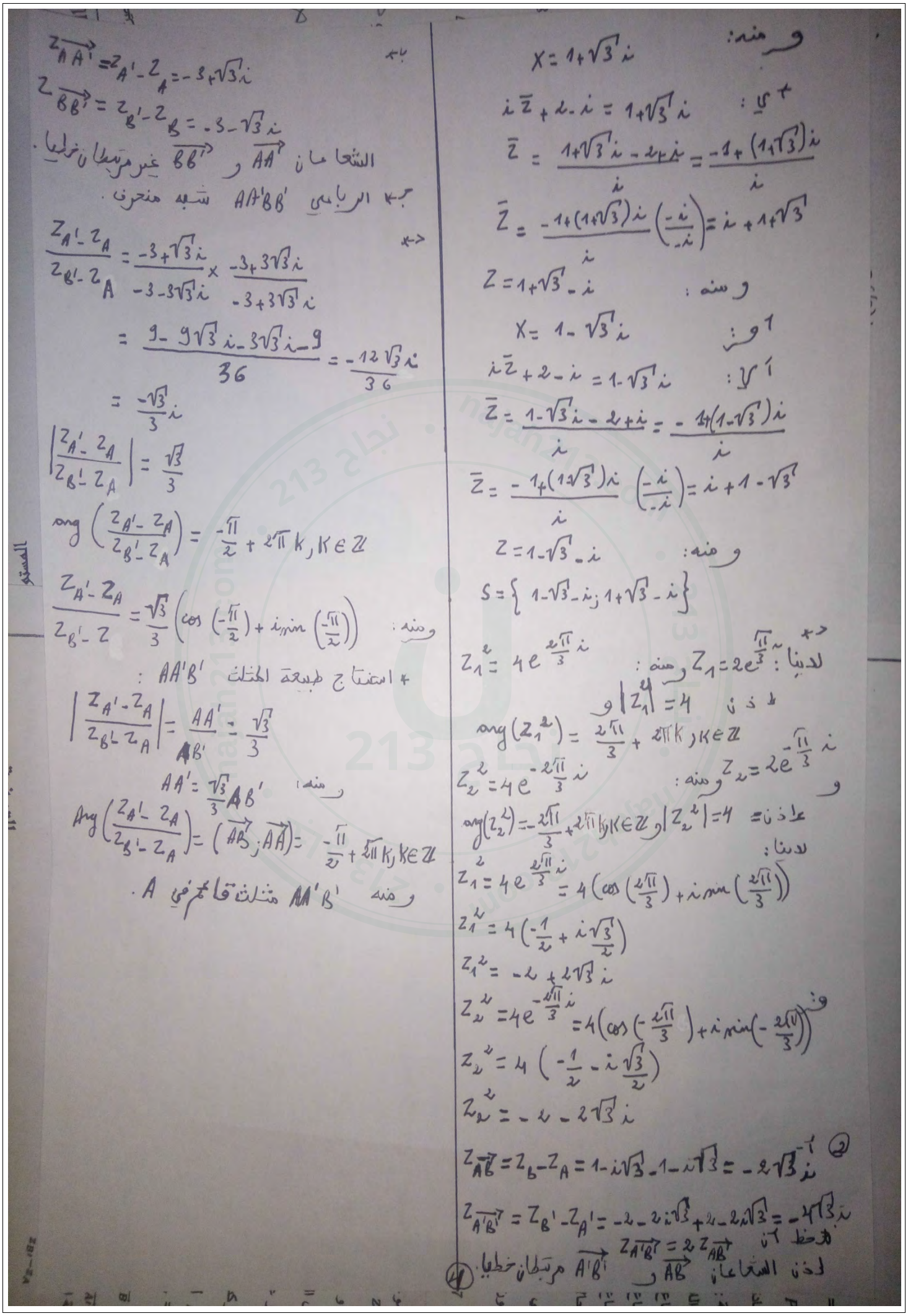
2) $X = \{-5 ; -25 ; +20 ; +50 ; +75\}$

$P(X=-25) = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210}$

$P(X=20) = \frac{C_4^3 \times C_2^1}{210} = \frac{8}{210}$

3

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً