najah213.com · نجاح 213

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبة

مدرسة روافد المستقبـــل — **دروس الدعم في مادة الرياضيات**

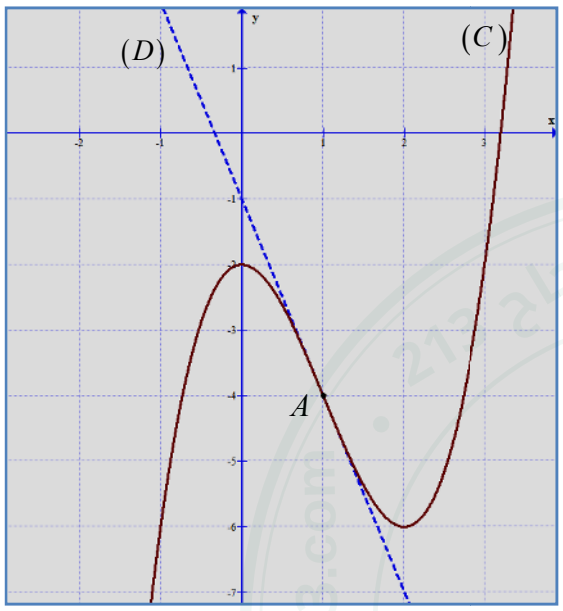
الأستاذ : بلجودي حمـــو — **3 ثانوي شعب علمية.**

دراسة الدوال ـ تمرين شامل مع الحل المفصل . — بكالوريا 2022

الجزء الأول :

g دالة معرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=ax^3+bx^2+c$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية .

(C) هو التمثيل البياني للدالة g في معلم . و (D) هو المماس للمنحنى (C) في النقطة $A(1;-4)$ ، (انظر الشكل)



1. بقراءة بيانية :

أ. شكل جدول تغيرات g .

ب.عين $g(0)$ ، $g(2)$ ، $g'(0)$ ، $g'(2)$ و $g'(1)$ و $g''(1)$.

ج. اكتب معادلة لـ (D) .

د . حل المتراجحة الآتية $g'(x)\prec 0$.

2. باستعمال (C) ، بين أن $a=1$ ، $b=-3$ و $c=-2$.

3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين العددين 3.1 و 3.2 .

4. استنتج ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x ؛ إشارة $g(x)$.

5. بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على $R-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$.

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. احسب نهاية الدالة f عند كل حد من حدود مجال تعريفها . و فسر النتائج هندسيا .

2. بين أنه ؛ من أجل كل x من $R-\{1\}$ ؛ يكون : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^3}$. ثم استنتج اتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها .

3. احسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-x]$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل م م مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته .أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

4. بين أن $f(\alpha)=3+\dfrac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5. بين أن: (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب تعيين معادلته.

6. احسب $f(-1)$ ثم ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

7. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد حلول المعادلة : $f(x)=m$ و المعادلة $f(x)=x+m$.

8. h الدالة المعرفة على المجال $R-\{1\}$ كما يلي : $h(x)=[f(x)]^2$

⇦ أدرس اتجاه تغير h و شكل جدول تغيراتها . (عبارة h غير مطلوبة)

9. u الدالة المعرفة على المجال $R-\{1\}$ كما يلي : $u(x)=|f(x)|$ (C_u) هو التمثيل البياني للدالة u.

⇦ أنشئ (C_u) انطلاقا من (C_f)

10. v الدالة المعرفة على المجال $R-\{-1;1\}$ كما يلي : $v(x)=f(|x|)$ (C_v) هو التمثيل البياني للدالة v.

⇦ بين أن v زوجية ثم أنشئ (C_v) انطلاقا من (C_f)

11. k الدالة المعرفة على المجال $R-\{2\}$ كما يلي : $k(x)=f(x-1)+2$ (C_k) هو التمثيل البياني للدالة k.

⇦ اشرح كيفية انشاء (C_k) انطلاقا من (C_f).

الأستاذ : بلجودي حمو

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الحـــــل

الجزء الأول :

g دالة معرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=ax^3+bx^2+c$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية .

1. بقراءة بيانية :

أ. شكل جدول تغيرات g.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	$+\infty$

ب.عين $g(0)$ ، $g(2)$ ، $g'(0)$ ، $g'(2)$ و $g'(1)$ و $g''(1)$.

$g(0)=-2$ ، $g(2)=-6$ ، $g'(0)=0$ ، $g'(2)=0$

$g'(1)$ هو معامل توجيه المماس (D) : $g'(1)=\dfrac{-1-(-4)}{0-1}=-3$

$g''(1)$: نلاحظ أن المماس (D) يخترق المماس في $A(1;-4)$ ، اذن $A(1;-4)$ نقطة انعطاف و بالتالي : $g''(1)=0$

ج. اكتب معادلة لـ (D) :

معادلة (D) هي : $y=g'(1)(x-1)+g(1)$ و لدينا $g(1)=-4$ و $g'(1)=-3$

و منه $y=-3(x-1)-4$. و بالتالي معادلة المماس (D) هي : $y=-3x-1$

د . حل المتراجحة الآتية $g'(x)\prec 0$: $x\in\,]0;2[$

2. باستعمال (C) ، بين أن $a=1$ ، و $b=-3$ و $c=-2$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)=ax^3+bx^2+c$ و $g'(x)=3ax^2+2bx$

لدينا : $\begin{cases} g(0)=-2 \\ g(1)=-4 \\ g'(2)=0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} c=-2 \\ a+b-2=-4 \\ 12a+4b=0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} c=-2 \\ a+b=-2 \\ 3a+b=0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} c=-2 \\ -a-b=2.....(1) \\ 3a+b=0.....(2) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نجد : $2a=2$ ومنه $a=1$

نعوض قيمة a في (1) نجد $1+b=-2$ و منه $b=-3$

اذن $a=1$ ، $b=-3$ و $c=-2$: من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)=x^3-3x^2-2$

3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين العددين 3.1 و 3.2 :

g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[3.1:3.2]$ و لدينا : $\begin{cases} g(3.1)\prec 0 \\ g(3.2)\succ 0 \end{cases}$ أي $g(3.1)\times g(3.2)\prec 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\Re$ حلا وحيدا α حيث $3.1\prec\alpha\prec 3.2$.

4. استنتج ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x ؛ إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

5. بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)=3x^2-6x$ و $g''(x)=6x-6$

$g''(x)>0$ من أجل $x\prec 1$ و $g''(x)<0$ من أجل $x\succ 1$ و $g(1)=-4$

g'' تنعدم عند 1 مغيرة إشارتها إذن $A(1;-4)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C).

الأستاذ : بلجودي حمو

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على $R-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$.

1. احسب نهاية الدالة f عند كل حد من حدود مجال تعريفها . و فسر النتائج هندسيا .

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$

⇦ المستقيم ذو المعادلة $x=1$ م.م عمودي لـ (C_f).

2. بين أنه ؛ من أجل كل x من $R-\{1\}$ ؛ يكون : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^3}$.

من أجل كل x من $R-\{1\}$ لدينا ،

$$f'(x)=\frac{(3x^2)(x-1)^2-2(x-1)(x^3+1)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)\left[(3x^2)(x-1)-2(x^3+1)\right]}{(x-1)(x-1)^3}=\frac{(3x^2)(x-1)-2(x^3+1)}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{3x^3-3x^2-2x^3-2}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2-2}{(x-1)^3}=\frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

استنتج اتجاه تغير f :

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$g(x)$		-		-	0	+	
$(x-1)^3$		-	‖	+		+	
$f'(x)$		+	‖	-	0	+	

f متزايدة تماما على $]-\infty;1[$ و $]\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]1;\alpha[$.

و شكل جدول تغيراتها .

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	‖	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

. احسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-x]$:

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-x=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^3+1}{(x-1)^2}-x=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^3+1-x(x-1)^2}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^3+1-x^3+2x^2-x}{(x-1)^2}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{2x^2-x+1}{(x-1)^2}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

ثم استنتج أن (C_f) يقبل م م مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته :

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-x=2$ معناه $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-x-2=0$ معناه $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-(x+2)=0$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

الأستاذ : بلجودي حمو

.ادرس وضعيه (C_f) بالنسبه لـ (Δ).

$$f(x)-(x+2)=\frac{2x^2-x+1}{(x-1)^2}-2=\frac{2x^2-x+1-2(x-1)^2}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-x+1-2x^2+4x-2}{(x-1)^2}=\frac{3x-1}{(x-1)^2}$$

x	$+\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$-\infty$
$f(x)-y$	-		**0**	+	‖	+	
الوضع النسبي	(C_f) **تحت** (Δ)		(C_f) **يقطع** (Δ)	(C_f) **فوق** (Δ)	‖	(C_f) **فوق** (Δ)	

4. بين أن $f(\alpha)=3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$:

لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $\alpha^3-3\alpha^2-2=0$ ومنه $\alpha^3=3\alpha^2+2$.

من جهة أخرى : $f(\alpha)=\frac{\alpha^3+1}{(\alpha-1)^2}$ و منه $f(\alpha)=\frac{3\alpha^2+2+1}{(\alpha-1)^2}$ و منه $f(\alpha)=\frac{3\alpha^2+3}{(\alpha-1)^2}$ و منه $f(\alpha)=3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$

استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$:

لدينا $3.1\prec\alpha\prec3.2$ ومنه $2.1\prec\alpha-1\prec2.2$ ومنه $4.41\prec(\alpha-1)^2\prec4.84$ ومنه $0.2\prec\frac{1}{(\alpha-1)^2}\prec0.22$ ومنه $1.2\prec\frac{6}{(\alpha-1)^2}\prec1.32$

ومنه $1.2\times3.1\prec\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}\prec1.32\times3.2$ ومنه $3+3.72\prec3+\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}\prec3+4.22$ إذن $6.72\prec f(\alpha)\prec7.22$

5. بين أن: (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ)

$f'(x)=1$ و منه $\frac{x^3-3x^2-2}{(x-1)^3}=1$ و منه $x^3-3x^2-2=(x-1)^3$ و منه $x=\frac{-1}{3}$

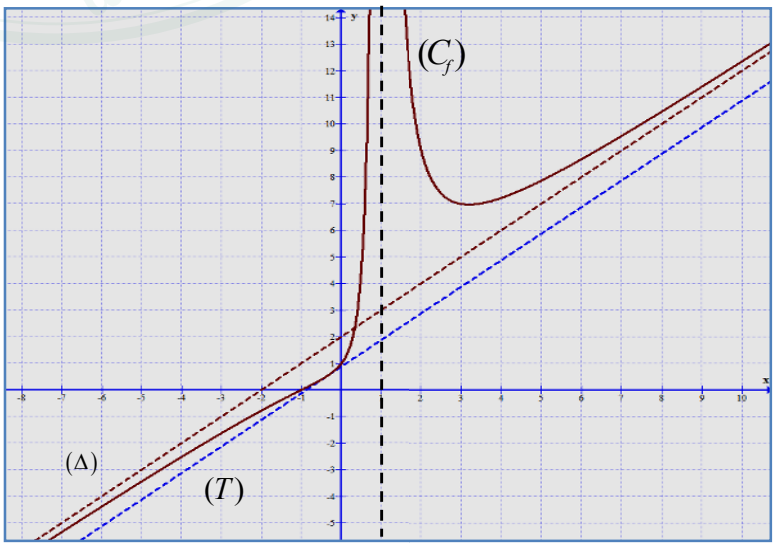
(C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x=\frac{-1}{3}$.

يطلب تعيين معادلته:

معادلة (T) هي : $y=f'\left(\frac{-1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{-1}{3}\right)$ و منه $y=1(x+\frac{1}{3})+\frac{13}{24}$.

و بالتالي معادلة المماس (D) هي : $y=x+\frac{7}{8}$

6. احسب $f(-1)$ ثم ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) :



الأستاذ : بلجودي حمو

7. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد حلول المعادلة : $f(x)=m$ (المناقشة أفقية)

⇦ إذا كان $m\in]-\infty;f(\alpha)[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا .

⇦ إذا كان $m=f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلان .

⇦ إذا كان $m\in]f(\alpha);+\infty[$ المعادلة تقبل 3 حلول.

المعادلة $f(x)=x+m$.

⇦ إذا كان $m\in\left]-\infty;\frac{7}{8}\right[$ لا توجد حلول .

⇦ إذا كان $m=\frac{7}{8}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا .

⇦ إذا كان $m\in\left]\frac{7}{8};2\right[$ المعادلة تقبل حلان .

⇦ إذا كان $m=2$ المعادلة تقبل حلا وحيدا .

⇦ إذا كان $m\in]2;+\infty[$ المعادلة تقبل حلان .

8. h الدالة المعرفة على المجال $R-\{1\}$ كما يلي : $h(x)=[f(x)]^2$

⇦ أدرس اتجاه تغير h و شكل جدول تغيراتها . (عبارة h غير مطلوبة) :

من أجل كل x من $R-\{1\}$ لدينا ، $h'(x)=2\times f'(x)\times f'(x)$ -

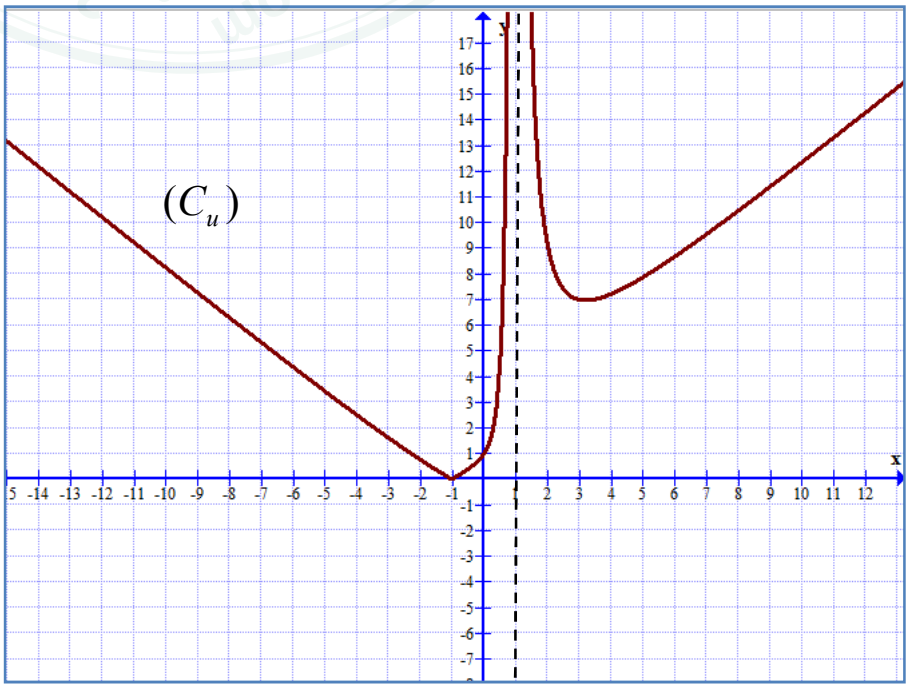
x	$-\infty$		-1		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$			$+\infty$	‖	$+\infty$			$+\infty$
		↘	0	↗	‖	↘	$[f(\alpha)]^2$	↗	

9. u الدالة المعرفة على المجال $R-\{1\}$ كما يلي : $u(x)=|f(x)|$ (C_u) هو التمثيل البياني للدالة u.

⇦ أنشئ (C_u) انطلاقا من (C_f) :

يكون (C_u) منطبقا على (C_f) في المجالات التي يكون فيه (C_f) فوق محور الفواصل .

يكون (C_u) مناظر لـ (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل في المجالات التي يكون فيه (C_f) تحت محور الفواصل .



الأستاذ : بلجودي حمو

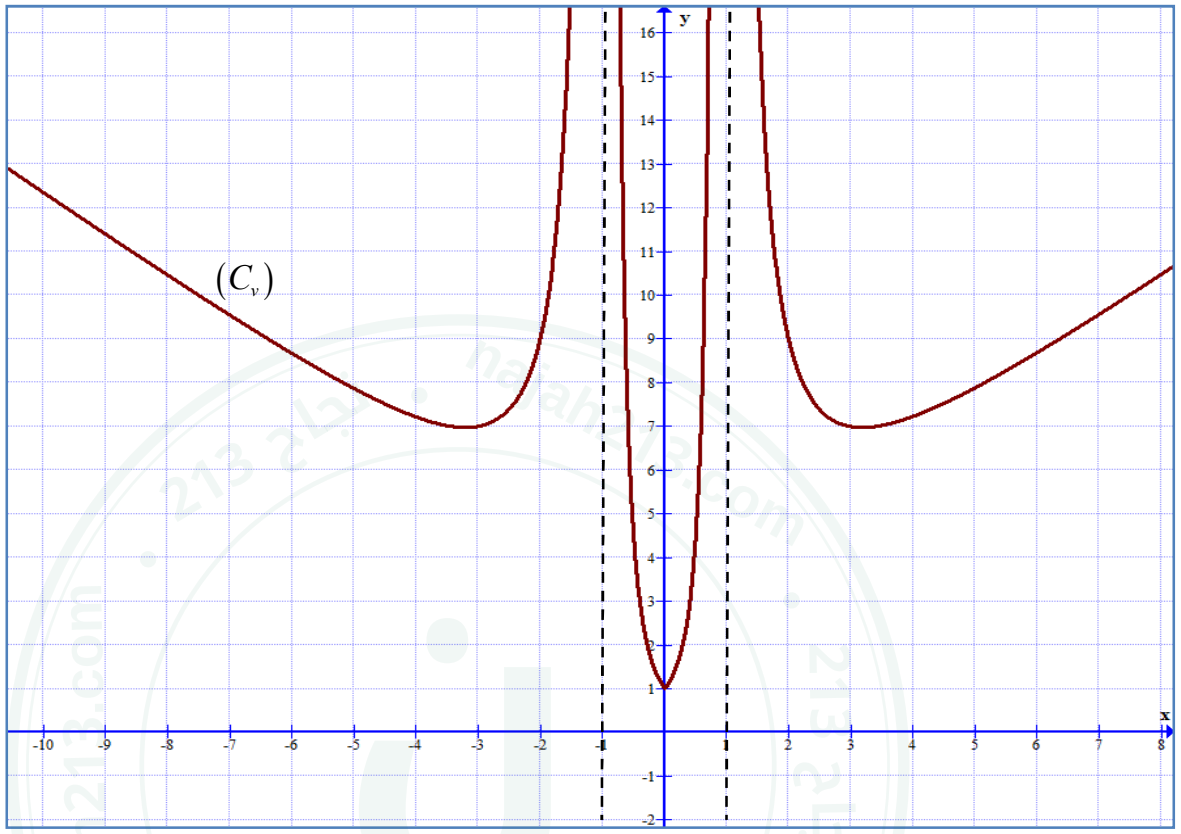
10. v **الدالة المعرفة على المجال** $R-\{-1;1\}$ **كما يلي :** $v(x)=f(|x|)$ (C_v) **هو التمثيل البياني للدالة** v **.**

⇦ بين أن v **زوجية**

من اجل $x\in D_u$ ، $-x\in D_u$ و : $v(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=v(x)$. إذن الدالة u زوجية .

ثم أنشئ (C_v) **انطلاقا من** (C_f) **:**

يكون (C_v) منطبقا على (C_f) في المجال $]-\infty;-1[\cup]0;1]$ ، و بما أن الدالة u زوجية فإن منحنيها متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب .



11. k **الدالة المعرفة على المجال** $R-\{2\}$ **كما يلي :** $k(x)=f(x-1)+2$ (C_k) **هو التمثيل البياني للدالة** k **.**

⇦ اشرح كيفية انشاء (C_k) **انطلاقا من** (C_f) **:**

$k(x)=f(x-1)+2$ من الشكل $k(x)=f(x+a)+b$ مع $a=-1$ و $b=2$

اذن (C_k) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(1;-2)$.

الأستاذ : بلجودي حمو

وفقكم الله في بكالوريا 2022
دعواتكـــــــم