najah213.com · نجاح 213



# الملخص الأوّل الدّوال كثيرات الحدود (03 آداب و فلسفة، 03 آداب ولغات أجنبية)

## دالة كثير حدود من الدرجة الأولى

$f$ دالة كثير حدود من الدرجة الأولى

$f(x) = ax + b$
$D_f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$ و

$a$ و $b$ عددين حقيقيين، $a \neq 0$

### 01-النهايات

($a$ عدد حقيقي موجب تماما) $a > 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (ax) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (ax) = +\infty$$

($a$ عدد حقيقي سالب تماما) $a < 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (ax) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (ax) = -\infty$$

### 02-اتجاه تغيّر الدّالة $f$

($a$ عدد حقيقي موجب تماما) $a > 0$

$f'(x) = a > 0$

$f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

($a$ عدد حقيقي سالب تماما) $a < 0$

$f'(x) = a < 0$

$f$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

### 03-جدول تغيّرات الدّالة $f$

($a$ عدد حقيقي موجب تماما) $a > 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

($a$ عدد حقيقي سالب تماما) $a < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↘ | $+\infty$ |

### 04-تقاطع $(C_f)$ مع محوري الإحداثيات

أ-تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور التراتيب

نحسب $f(0)$ نجد $f(0) = b$

$(C_f) \cap (yy') = \{A(0; b)\}$

نسمي نقطة التقاطع $A$ إن لم تُذكر في التمرين

ب-تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل

نحل المعادلة $f(x) = 0$ نجد $x = -\frac{b}{a}$

$(C_f) \cap (xx') = \left\{B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)\right\}$

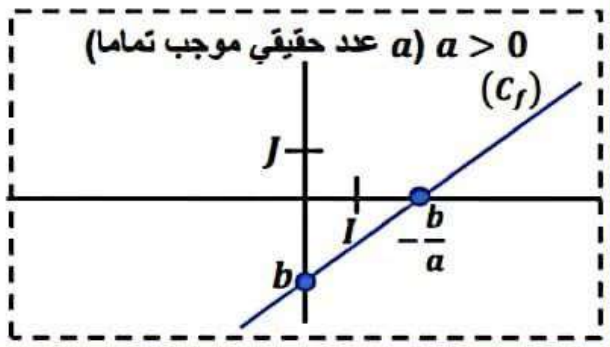
نسمي نقطة التقاطع $B$ إن لم تُذكر في التمرين

### 05-التمثيل البياني للدّالة $f$ (رسم $(C_f)$)

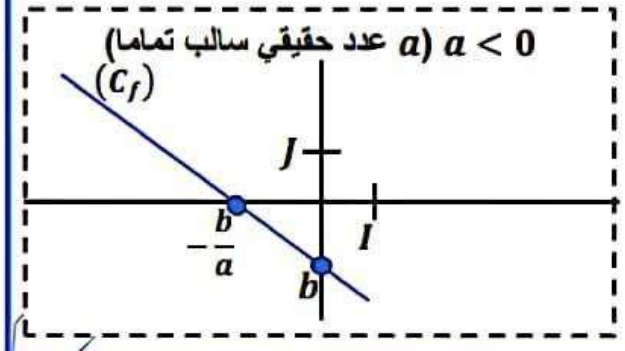
**بصفة عامة:** منحناها عبارة عن مستقيم ولرسم هذا المستقيم نستعمل جدول مساعد

| $x$ | | |
|---|---|---|
| $y$ | | |

($a$ عدد حقيقي موجب تماما) $a > 0$




($a$ عدد حقيقي سالب تماما) $a < 0$




فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213



## 03-جدول تغيّرات الدّالة $f$

(يكون جدول تغيّرات الدّالة $f$ حسب إشارة $f'(x)$)

## 04-معادلة المستقيم $(\Delta)$ مماس المنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة $x_0$

معادلة المستقيم $(\Delta)$ من الشكل $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ حيث $f'(x_0)$ هو معامل توجيه المماس $(\Delta)$.

**من البيان**

ويُمكن إيجاد $f'(x_0)$ من البيان باختيار نقطتين من المماس $N(x_N; y_N)$ و$M(x_M; y_M)$

نجد: $f'(x_0) = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N}$.

**كما يُمكن إيجاد معادلة المماس $(\Delta)$ من البيان وذلك باتباع ما يلي:**

1) نحسب $a$: $a = f'(x_0) = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N}$.

2) ثمّ نحسب $b$: ($b$ هو ترتيب نقطة تقاطع المماس $(\Delta)$ مع محور التراتيب) $b = y_N - ax_N$

أو $b = y_M - ax_M$ في الأخير نجد: $(\Delta): y = ax + b$.

**ولدراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى مماسه $(\Delta)$ : (ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$)**

**مثلا** إذا كان الفرق من الشكل $f(x) - y = x^3$

(ندرس إشارة $x$)

نُلخص الوضع النسبي في جدول

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | - | ○ | + | |
| $f(x) - y$ | | - | ○ | + | |
| الوضعية النسبية | $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ | | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ |

**أو** كان الفرق من الشكل $f(x) - y = (x+1)^3$

(ندرس إشارة $(x+1)$ )

نُلخص الوضع النسبي في جدول

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | - | ○ | + | |
| $f(x) - y$ | | - | ○ | + | |
| الوضعية النسبية | $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ | | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ |

**ملاحظة:** بمانّ المنحنى $(C_f)$ غيّر وضعيته بالنسبة إلى مماسه $(\Delta)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ (لتكن هذه النقطة $E$)

نقول أنّ المنحنى $(C_f)$ يخترق المماس $(\Delta)$ في النقطة $E$ ونستنتج أنّ النقطة $E(x_0; f(x_0))$ هي نقطة انعطاف لـ$(C_f)$.

## 05-نقطة الانعطاف

لتبيان أنّ $E(x_0; y_0)$ هي نقطة انعطاف لـ $(C_f)$ نتبع ما يلي:

1) نحسب $f''(x)$ (انطلاقا من $f'(x)$ )

**$a > 0$ ($a$ عدد حقيقي موجب تماما)**

$f''(x) = 6ax + 2b$

**$a < 0$ ($a$ عدد حقيقي سالب تماما)**

$f''(x) = 6ax + 2b$

2) ندرس إشارة $f''(x)$ (نضع $f''(x) = 0$ نجد $x = x_0$)

**$a > 0$ ($a$ عدد حقيقي موجب تماما)**

إشارة $f''(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | - | 0 | + | |

**$a < 0$ ($a$ عدد حقيقي سالب تماما)**

إشارة $f''(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | + | 0 | - | |

$f''(x)$ انعدمت عند $x_0$ مُغيّرة إشارتها إذن $E(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف لـ$(C_f)$ وهي $E(x_0; y_0)$.

**ملاحظة:**

إذا طُلب منا تبيان أنّ $f(x) = (\ldots)(\ldots)(\ldots)$ ننطلق من الطرف الثاني باستعمال النشر نصل إلى الطرف الأول $f(x)$، نستعملها في حل معادلة $f(x) = 0$.



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

## ④ دَالة كثير حدود من الدرجة الثالثة (الأهم)

$f$ دَالة كثير حدود من الدرجة الثالثة

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$D_f = \mathbb{R} = ]-\infty;+\infty[$ و

$a$، $b$، $c$ و $d$ أعداد حقيقية، $a \neq 0$

### 01-النهايات

**$a > 0$ ($a$ عدد حقيقي موجب تماما)**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (ax^3) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (ax^3) = +\infty$$

**$a < 0$ ($a$ عدد حقيقي سالب تماما)**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (ax^3) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (ax^3) = -\infty$$

### 02-اتجاه تغيّر الدّالة $f$

**$a > 0$ ($a$ عدد حقيقي موجب تماما)**

$$\boxed{f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c}$$

**$a < 0$ ($a$ عدد حقيقي سالب تماما)**

$$\boxed{f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c}$$

(إشارة المشتقة)

بصفة عامة: لدينا $f'(x)$ من الشكل $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$

تذكير: إشارة $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ نضع: $f'(x) = 0$ نجد: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (*)

حسب إشارة المميز $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

**$\Delta > 0$ (المميز موجب تماما)**

إشارة $f'(x)$ (إشارة $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$)

| $x$ | $-\infty$ | | $x'$ | | $x''$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | مثل إشارة $\alpha$ | 0 | عكس إشارة $\alpha$ | 0 | مثل إشارة $\alpha$ | |

$x' = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ و $x'' = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

حيث $\boxed{x' < x''}$، الترتيب في الجدول مهم.

**$\Delta = 0$ (المميز معدوم)**

إشارة $f'(x)$ (إشارة $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$)

| $x$ | $-\infty$ | | $x'$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | مثل إشارة $\alpha$ | 0 | مثل إشارة $\alpha$ | |

$x' = \frac{-\beta}{2\alpha}$.

**$\Delta < 0$ (المميز سالب تماما)**

إشارة $f'(x)$ (إشارة $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$)

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | مثل إشارة $\alpha$ | |

(إشارة المشتقة حالة خاصة 01)

إذا كانت $f'(x)$ من الشكل $\alpha x^2 + \beta x$ $(\gamma = 0)$

إشارة $\alpha x^2 + \beta x$ نضع: $f'(x) = 0$ نجد: $\alpha x^2 + \beta x = 0$ ويكون: $x(\alpha x + \beta) = 0$ ومنه: $\boxed{x = 0}$ أو $\boxed{x = -\frac{\beta}{\alpha}}$

(بعد إيجاد الحلول، نلخص إشارة $f'(x)$ في جدول)

(إشارة المشتقة حالة خاصة 02)

إذا كانت $f'(x)$ من الشكل $\alpha x^2 + \gamma$ $(\beta = 0)$

إشارة $\alpha x^2 + \gamma$ نضع: $f'(x) = 0$ نجد: $\alpha x^2 + \gamma = 0$ ويكون: $\boxed{x^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}}$

**$x^2 = k > 0$** نجد $\boxed{x = \sqrt{k}}$ أو $\boxed{x = -\sqrt{k}}$.

إشارة $f'(x)$ (إشارة $\alpha x^2 + \gamma$)

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{k}$ | | $\sqrt{k}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | مثل إشارة $\alpha$ | 0 | عكس إشارة $\alpha$ | 0 | مثل إشارة $\alpha$ | |

حيث $\boxed{k = -\frac{\gamma}{\alpha}}$.

**$x^2 = 0$** نجد $\boxed{x = 0}$.

إشارة $f'(x)$ (إشارة $\alpha x^2 + \gamma$)

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | مثل إشارة $\alpha$ | 0 | مثل إشارة $\alpha$ | |

نكون أمام هذه الحالة

في حالة $\boxed{\beta = \gamma = 0}$

أي: $f'(x) = \alpha x^2$.

**$x^2 = k < 0$** لا توجد قيم $x$.

إشارة $f'(x)$ (إشارة $\alpha x^2 + \gamma$)

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | مثل إشارة $\alpha$ | |

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

# ﴿2﴾ دالة كثير حدود من الدرجة الثانية

$f$ دالة كثير حدود من الدرجة الثانية

$f(x) = ax^2 + bx + c$
$D_f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$ و

$a$، $b$ و $c$ أعداد حقيقية، $a \neq 0$

## 01-النهايات

**$a > 0$ ($a$ عدد حقيقي موجب تماما)**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (ax^2) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (ax^2) = +\infty$$

**$a < 0$ ($a$ عدد حقيقي سالب تماما)**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (ax^2) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (ax^2) = -\infty$$

## 02-اتجاه تغير الدالة $f$

**$a > 0$ ($a$ عدد حقيقي موجب تماما)**

$$\boxed{f'(x) = 2ax + b}$$

**بصفة عامة:** لدينا $f'(x)$ من الشكل $\alpha x + \beta$ **تذكير:** إشارة $\alpha x + \beta$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | مثل إشارة $a$ | ○ عكس إشارة $a$ | |

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{\beta}{\alpha}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\alpha x + \beta$ | مثل إشارة $\alpha$ | ○ عكس إشارة $\alpha$ | |

إشارة $f'(x)$
نضع $f'(x) = 0$ نجد $x = -\frac{b}{2a}$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | ○ | + |

$f$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$
ومتزايدة تماما على المجال $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$

إشارة $f'(x)$
نضع $f'(x) = 0$ نجد $x = -\frac{b}{2a}$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | ○ | - |

$f$ متزايدة تماما على المجال $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$
ومتناقصة تماما على المجال $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$

**$a < 0$ ($a$ عدد حقيقي سالب تماما)**

$$\boxed{f'(x) = 2ax + b}$$

## 03-جدول تغيرات الدالة $f$

**$a > 0$ ($a$ عدد حقيقي موجب تماما)**

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | ○ | + |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ | ↗ $+\infty$ |

**$a < 0$ ($a$ عدد حقيقي سالب تماما)**

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | ○ | - |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ | ↘ $-\infty$ |

## 04-معادلة المستقيم $(\Delta)$ مماس المنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة $x_0$

معادلة المستقيم $(\Delta)$ من الشكل $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ حيث $f'(x_0)$ هو معامل توجيه المماس $(\Delta)$.

### من البيان

ويمكن إيجاد $f'(x_0)$ من البيان باختيار نقطتين من المماس $N(x_N; y_N)$ و $M(x_M; y_M)$ نجد: $\boxed{f'(x_0) = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N}}$.

كما يُمكن إيجاد معادلة المماس من البيان (سنشرح هذا الفصل في الدالة كثير حدود من الدرجة الثالثة)

### ملاحظة:

إذا طُلب منا تبيان أنّ $f(x) = (\ldots)(\ldots)$ ننطلق من الطرف الثاني $(\ldots)(\ldots)$ باستعمال النشر نصل إلى الطرف الأول $f(x)$، نستعملها في حل معادلة $f(x) = 0$.

2

najah213.com · نجاح 213



## 05-تقاطع $(C_f)$ مع محوري الإحداثيات

**أ-تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور التراتيب**

نحسب $f(0)$ نجد $f(0) = d$

$\boxed{(C_f) \cap (yy') = \{A(0;d)\}}$

نسمي نقطة التقاطع $A$ إن لم تُذكر في التمرين

**ب-تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل**

نحل المعادلة $f(x) = 0$ [ حسب اختيار $f(x)$ ]

نكون أمام (02) حالتين إما:

**الحالة 01:** إذا كان $\boxed{d = 0}$ نختار عبارة $f(x)$ الموجودة في المعطيات ونقوم بإخراج $x$ كعامل مشترك (ثم نحل معادلة جداء)

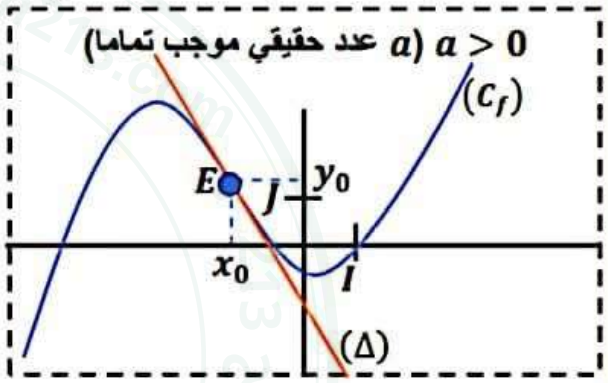
**الحالة 02:** إذا كان $\boxed{d \neq 0}$ نختار عبارة $f(x)$ الموجودة في الأسئلة (ثم نحل معادلة جداء)

**ملاحظة مهمة:** عدد الحلول هو عدد نقط تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل.

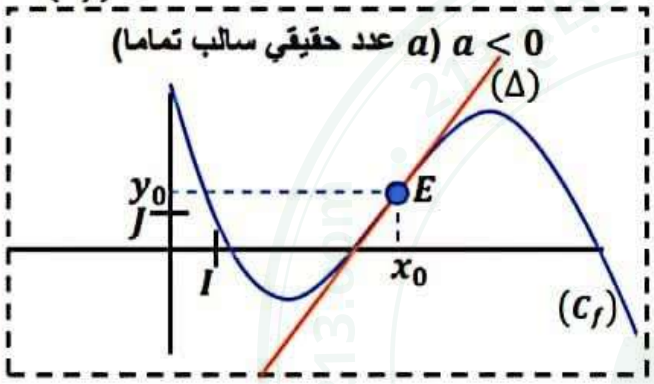
## 06-التمثيل البياني للدّالة $f$ (رسم $(C_f)$)

**بصفة عامة:** نُعين مجموعة من النقط $M(x\,;f(x))$ ونصل بينها باليد نحصل على المنحنى $(C_f)$.

**$a > 0$ ($a$ عدد حقيقي موجب تماما)**




**$a < 0$ ($a$ عدد حقيقي سالب تماما)**




## 07-إضافات: (أسئلة طُرحت في الباكالوريا)

| السؤال | كيفية الإجابة عليه |
|---|---|
| 1)عيّن نقطتي تقاطع المنحنى $(C)$ مع المستقيم $(D)$ ذي المعادلة: $y = 3x - 1$. | نحل المعادلة $f(x) = 3x - 1$ نجد حلين $x_1$ و $x_2$. وبالتالي: $(C) \cap (D) = \{A(x_1\,;y_1)\,;B(x_2\,;y_2)\}$ لإيجاد $y_1$ نعوض $x_1$ في عبارة $f$ أو في معادلة $(D)$. |
| 2)حل بيانيا المتراجحة ذات المجهول الحقيقي $x$: $f(x) < -1$. | حلول المتراجحة $f(x) < -1$ هي فواصل نقط $(C_f)$ الواقعة تحت المستقيم ذو المعادلة $y = -1$ باستثناء فواصل نقط التقاطع، من البيان نجد $\boxed{S = \cdots}$. |
| 3)عيّن $f'(1)$ و $f'(-1)$، BAC2010 | أ) مماس المنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 مُوازيا لمحور الفواصل يعني $\boxed{f'(1) = 0}$. ب) مماس المنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة -1 كذلك مُوازيا لمحور الفواصل يعني $\boxed{f'(-1) = 0}$. |
| 4)بيّن أنّه يوجد مماسان للمنحنى $(C_f)$ معامل توجيه كل منهما يساوي 5. BAC2011 | نحل المعادلة $f'(x) = 5$ نجد حلين. |

انتهى ملخص الدّوال كثيرات الحدود.



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213



## 05-تقاطع $(C_f)$ مع محوري الإحداثيات

**أ-تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور التراتيب**

نحسب $f(0)$ نجد $f(0) = c$

$$(C_f) \cap (yy') = \{A(0;c)\}$$

نسمي نقطة التقاطع $A$ إن لم تُذكر في التمرين

**ب-تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل**

نحل المعادلة $f(x) = 0$ [ حسب اختيار $f(x)$ ]

نكون أمامنا ثلاث (03) حالات إما:

**الحالة 01:** للمعادلة حلين متمايزين $x'$ و $x''$

$$(C_f) \cap (xx') = \{B(x';0); C(x'';0)\}$$

**الحالة 02:** للمعادلة حل مضاعف $x'$

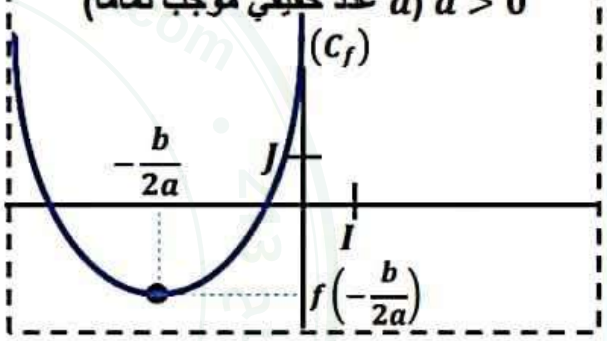
$$(C_f) \cap (xx') = \{B(x';0)\}$$

**الحالة 03:** المعادلة ليس لها حلول $(C_f) \cap (xx') = \{\ \}$

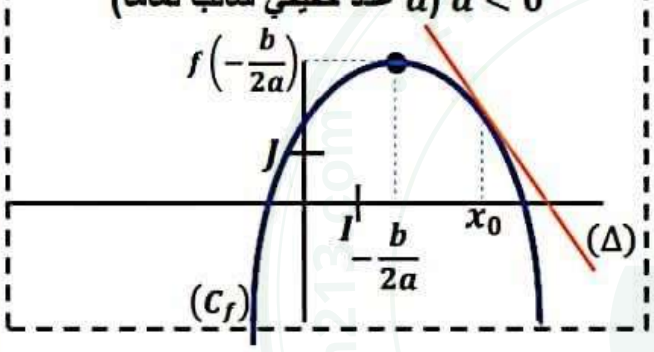
## 06-التمثيل البياني للدّالة $f$ (رسم $(C_f)$)

**بصفة عامة:** نُعين مجموعة من النقط $M(x\,;f(x))$ ونصل بينها باليد نحصل على المنحنى $(C_f)$.

**$a > 0$ ($a$ عدد حقيقي موجب تماما)**




**$a < 0$ ($a$ عدد حقيقي سالب تماما)**






فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com