najah213.com · نجاح 213

ثانوية: المجاهد صديقي نوري
المستوى: 3 ثانوي علوم تجريبية

سلسلة تمارين رقم ①

الموسم الدراسي: 2021 / 2022
الأستاذ: قويسم براهيم الخليل

◄ التمرين 01:

احسب النهايات التالية:

① $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{1-x}\right)$

② $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-x}\right)$

③ $\lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}\right)$

④ $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)$

◄ التمرين 02:

برهن أنّ المستقيم (D) مقارب للمنحني (C_f) ، ثم أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (D) :

① $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x-2}$ ، $D: y=x+4$

② $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-1}{x^2}$ ، $D: y=x+2$

◄ التمرين 03:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-3x+b$$

حيث a و b أعداد حقيقية، و(C_f) تمثيلها البياني.

① عين a و b حتى تقبل الدالة f قيمة حدية عند 3 قيمتها -8 .

② نفرض أنّ $a=-1$ ، $b=1$:

أ/ ادرس تغيرات الدالة f.

ب/ احسب $f(5)$ ، $f(0)$ ، $f(-1)$ و $f(-2)$.

ج/ اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 1 .

د/ ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (Δ).

ه/ مثل بيانيا كل من (T) و (C_f)

◄ التمرين 04:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x-2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون لـ (C_f) مستقيم مقارب معادلته $y=x-3$، ويقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها 3.

② ادرس تغيرات الدالة f.

③ اثبت أنّ (C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3)، يطلب إعطاء احداثيات نقطتي التماس M_1 وM_2 ومعادلتي المماسين (D_1) و (D_2).

④ مثّل بدقة المماسين (D_1) و (D_2) ، ثم المنحنى (C_f) .

⑤ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)+3x-m=0$.

⑥ g دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ:

$$g(x)=f(|x|)$$

أ/ بين أنّ الدالة g زوجية.

ب/ بيّن أنه يمكن إنشاء (C_g) منحني الدالة g انطلاقا من (C_f) ، ثم مثّل بيانيا (C_g) في المعلم السابق.

◄ التمرين 05:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+2x+2}$$

و(C_f) تمثيلها البياني في مستوي $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① عين العددين الحقيقين a و b بحيث المنحني (C_f) يقبل عند النقطة $A\left(0;\frac{7}{2}\right)$ مماسا موازيا لمحور الفواصل، ثم بيّن أنّ $f(x)$ تكتب على الشكل:

$$f(x)=1+\frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$

② ادرس تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول التغيرات.

③ بيّن أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) يطلب تعيين معادلته.

④ عيّن احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات.

⑤ ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

⑥ نسمي ω نقطة تقاطع المنحني (C_f) و (Δ)، برهن أن النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f) .

⑦ عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω.

⑧ مثل بيانيا كل من (T)، (Δ) و (C_f) .

• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

◄ حل التمرين 01:

① $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{(x-2)(x-1)}{1-x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 1}\big(-(x-2)\big)=-(1-2)$

$=\boxed{1}$

---

② $\lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}\right)=\lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{3-\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{1}{3+\sqrt{x}}\right)$

$=\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}=\boxed{\dfrac{1}{6}}$

---

③ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)$

$=\boxed{+\infty}$

---

④ $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}\right)$

$=\boxed{\dfrac{1}{4}}$

◄ حل التمرين 02:

① $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+3}{x-2}-(x+4)\right)$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+3-(x+4)(x-2)}{x-2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{11}{x-2}\right)=0$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x+4$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية: لدينا: $f(x)-y=0$

$\Rightarrow\dfrac{11}{x-2}=0\Rightarrow x-2\neq 0\Rightarrow x\neq 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	$+$	
الوضعية	(D) تحت (C_f)	(D) فوق (C_f)	

② $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^3+2x^2-1}{x^2}-(x+2)\right)$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^3+2x^2-1-x^2(x+2)}{x^2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)=0$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x+2$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية: لدينا:

$f(x)-y=0\Rightarrow\dfrac{-1}{x^2}=0\Rightarrow x\neq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	$-$	
الوضعية	(D) تحت (C_f)	(D) تحت (C_f)	

◄ حل التمرين 03:

① تعيين العددين a و b :

الدالة f تقبل قيمة حدية عند 3 قيمتها -8 معناه:

$f(3)=-8$ و $f'(3)=0$

لدينا: $f'(x)=x^2+2ax-3$

ومنه: $f'(3)=0\Rightarrow 3^2+2a(3)-3=0$

$\Rightarrow 6a=-6\Rightarrow\boxed{a=-1}$

و لدينا:

$f(3)=-8\Rightarrow\dfrac{1}{3}(3)^3+a(3)^2-3(3)+b=-8$

$\Rightarrow 9-9+9+b=-8\Rightarrow\boxed{b=1}$

② نفرض أنّ $a=-1$ ، $b=1$:

أ/ دراسة تغيرات الدالة f:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)=-\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

- تعيين $f'(x)$:

$f'(x)=x^2-2x-3$

نحل المعادلة $x^2-2x-3=0$ باستعمال Δ: $\Delta=16$

ومنه: $x_1=3$ و $x_2=-1$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(-1)$	↘ -8	↗ $+\infty$

ب/ حساب $f(5)$ ، $f(0)$ ، $f(-1)$ و $f(-2)$:

- $f(5)=\dfrac{1}{3}(5)^3-(5)^2-3(5)+1=\dfrac{8}{3}$
- $f(0)=\dfrac{1}{3}(0)^3-(0)^2-3(0)+1=1$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

- $f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)^2-3(-1)+1=\frac{8}{3}$
- $f(-2)=\frac{1}{3}(-2)^3-(-2)^2-3(-2)+1=\frac{1}{3}$

ج/ كتابة معادلة المماس (Δ) :

$$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$=(1^2-2(1)-3)(x-1)-\frac{8}{3}$$
$$=\boxed{-4x+\frac{4}{3}}$$

د/ دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمماس (Δ):

$$f(x)-y_{(\Delta)}=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1+4x-\frac{4}{3}$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x^2+x-\frac{1}{3}$$

نلاحظ أن 1 حل للمعادلة ومنه:

$$\frac{1}{3}x^3-x^2+x-\frac{1}{3}=(x-1)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$$
$$=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x-\alpha x^2-\beta x-\gamma$$
$$=\alpha x^3+(\beta-\alpha)x^2+(\gamma-\beta)x-\gamma$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}\alpha=\frac{1}{3}\\ \beta-\alpha=-1\\ \gamma-\beta=1\\ -\gamma=-\frac{1}{3}\end{cases}$

إذن: $\begin{cases}\alpha=\frac{1}{3}\\ \beta=-\frac{2}{3}\\ \gamma=\frac{1}{3}\end{cases}$

ومنه:

$$\frac{1}{3}x^3-x^2+x-\frac{1}{3}=(x-1)\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}(x-1)(x^2-2x+1)$$
$$=\frac{1}{3}(x-1)(x-1)^2$$
$$=\frac{1}{3}(x-1)^3$$

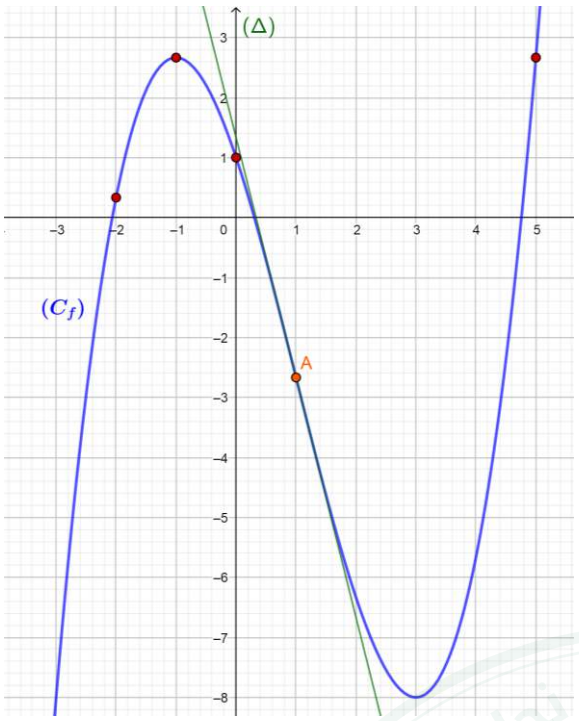
لدينا: $f(x)-y_{(\Delta)}=0$

ومنه: $\frac{1}{3}(x-1)^3=0$

إذن: $x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y_{(\Delta)}$	$-$	0	$+$

ه/ التمثيل البياني:



◄ حل التمرين 04:

① تعيين الاعداد الحقيقية a ، b و c:

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2+bx+c}{x-2}-(x-3)\right)=0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(a-1)x^2+(b+5)x+c-6}{x-2}\right)=0$$

هذه النهاية لا تتحقق إلا إذا كان: $(a-1=0)$

ومنه $\boxed{a=1}$

وعليه:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(b+5)x+c-6}{x-2}\right)=0\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(b+5)x}{x}\right)=0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(b+5)=0\Rightarrow b+5=0$$
$$\Rightarrow \boxed{b=-5}$$

ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x-2)-ax^2-bx-c}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{ax^2-4ax-2b-c}{(x-2)^2}$$

ومنه:

$$f'(3)=0\Rightarrow\frac{a(3)^2-4a(3)-2b-c}{\left((3)-2\right)^2}=0$$
$$\Rightarrow -3a-2b-c=0$$
$$\Rightarrow -3(1)-2(-5)-c=0$$
$$\Rightarrow \boxed{c=7}$$

إذن:

$$f(x)=\frac{x^2-5x+7}{x-2}$$

② دراسة تغيرات الدالة f:

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}}\left(\frac{6}{0^-}\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}}\left(\frac{6}{0^+}\right) = +\infty$

- تعيين $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{ax^2 - 4ax - 2b - c}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{(1)x^2 - 4(1)x - 2(-5) - (7)}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$$

لدينا:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

لدينا: $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3) = 4$

ومنه: $x_1 = 3$ و $x_1 = 1$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$+\infty$ ‖	↗	1	↘	$+\infty$

③ اثبات أنّ (C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) :

(C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3)

معناه أنّ المعادلة $f'(x) = -3$ تقبل حلان:

$$f'(x) = -3 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = -3$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = -3(x-2)^2 \Rightarrow 4x^2 - 16x + 15 = 0$$

لدينا: $\Delta = 16$

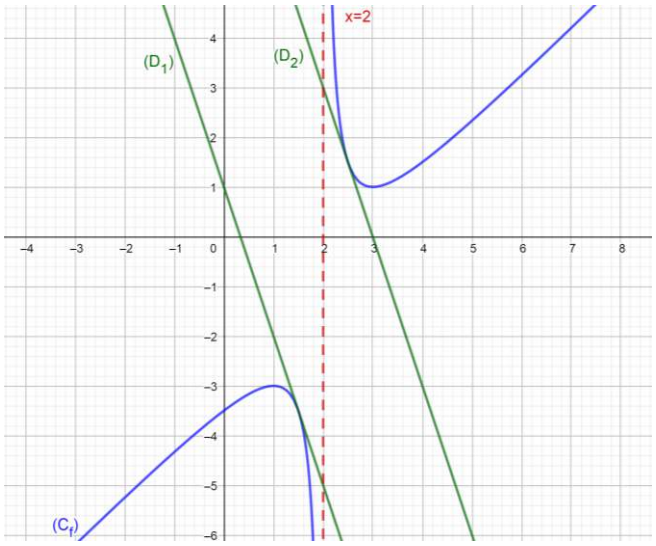
ومنه: $x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = \frac{5}{2}$

إذن $M_1\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$; $M_2\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$

ولدينا:

$$(D_1): y = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= \boxed{-3x + 1}$$
$$(D_2): y = f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x - \left(\frac{5}{2}\right)\right) + f\left(\frac{5}{2}\right)$$
$$= \boxed{-3x + 9}$$

④ التمثيل البياني:



⑤ المناقشة البيانية:

$$f(x) + 3x - m = 0 \Rightarrow f(x) = -3x + m$$

حلول المعادلة السابقة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = -3x + m$، وهي:

لما $m < 1$ المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والأخر موجب

لما $m = 1$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا

لما $1 < m < 9$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $m = 9$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا

لما $m > 9$ المعادلة تقبل حلان موجبان

⑥

أ/ تبيين أنّ الدالة g زوجية:

لدينا:

$$g(-x) = f(|-x|)$$
$$= f(|x|)$$
$$= g(x)$$

ومنه الدالة g زوجية.

ب/ تبيين أنه يمكن إنشاء (C_g) g انطلاقا من (C_f) :

$$g(x) = f(|x|)$$
$$= \begin{cases} f(x) & ; \quad x \geq 0 \\ f(-x) & x \leq 0 \end{cases}$$

ومنه:

لما $x \geq 0$: (C_f) ينطبق على (C_g)

ولما: $x \leq 0$: (C_g) متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.

◄ حل التمرين 05:

① تعيين العددين الحقيقين a و b:

لدينا: $f(0) = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{7}{2}$ ومنه: $\boxed{b = 7}$

ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x^2+2x+2) - (2x+2)(x^2+ax+7)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow \frac{(2-a)(0)^2 - 10(0) + 2a - 14}{((0)^2 + 2(0) + 2)^2} = 0$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$\Rightarrow 2a - 14 = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{a = 7}$$

- التبيين:

$$f(x) = 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$= \frac{x^2+2x+2+5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$= \frac{x^2+7x+7}{x^2+2x+2}$$

② دراسة تغيرات الدالة f:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

- دراسة $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x^2+2x+2) - (2x+2)(x^2+ax+7)}{(x^2+2x+2)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-5x^2-10x}{(x^2+2x+2)^2}$$

لدينا:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -5x^2 - 10x = 0$$
$$\Rightarrow -5x(x+2) = 0$$

ومنه: $-5x = 0$ أو $x+2 = 0$

إذن: $x = 0$ أو $x = -2$

تشكيل جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	$f(-2)$	↗	$f(0)$	↘	1

③ تبيين أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) :

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

④ تعيين احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات:

- تقاطع (C_f) مع (xx'):

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2+7x+7}{x^2+2x+2} = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + 7x + 7 = 0$$

لدينا: $\Delta = 21$

ومنه: $x \approx -1.21$ أو $x_= -5.79$

- تقاطع (C_f) مع (yy'):

لدينا $f(0) = \frac{7}{2}$ ومنه: $(C_f) \cap (yy') = \left\{\left(0;\frac{7}{2}\right)\right\}$

⑤ دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ):

$$f(x) - y_{(\Delta)} = 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2} - 1$$
$$= \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$

لدينا: $(x^2+2x+2) > 0$ ومنه الإشارة من البسط:

ومنه:

$$5x + 5 = 0 \Rightarrow x = -1$$

إذن:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$		$-$	0	$+$	

⑥ برهان أن ω مركز تناظر (C_f):

لدينا: $x \in \mathbb{R}$ ومنه $(-2-x) \in \mathbb{R}$

ولدينا:

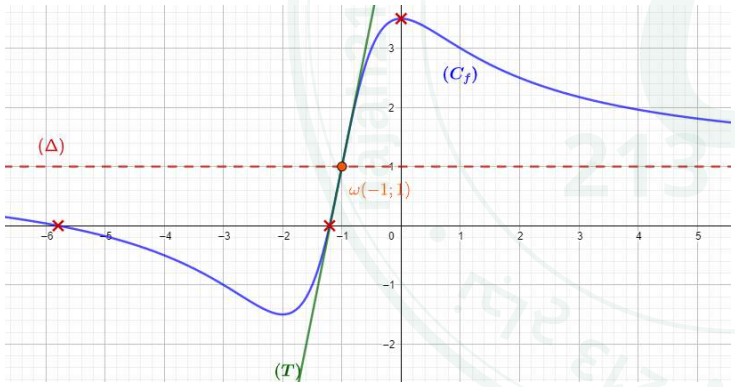
$$f(2\alpha - x) + f(x) = f(-2-x) + f(x)$$
$$= 1 + \frac{5(-2-x)+5}{(2+x)^2+2(-2-x)+1} + 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$= 2 - \frac{(5x+5)}{x^2+2x+2} + \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$= 2$$
$$= 2(1)$$

ومنه النقطة $\omega(-1;1)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

⑦ تعيين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω:

$$(T): y = f'(-1)\big(x-(-1)\big) + f(-1)$$
$$= \boxed{5x+6}$$

⑧ التمثيل البياني:



• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com