najah213.com · نجاح 213

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية باتنة

امتحان البكالوريا التجريبي — دورة: ماي 2021

شعبة: التقني رياضي — ثانوية عياش مقلاتي الحاسي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضـــــــوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

I. f الدالة المعرفة على المجال $I=[0;1]$ بـ: $f(x)=xe^{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أن الدالة f متزايدة على المجال I.
2. بين أنه من أجل $x\in I$ فإن $f(x)\in I$.

II. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$.

في الوثيقة المرفقة (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f و (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y=x$.

1. باستعمال الوثيقة المرفقة مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.
2. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0<u_n<1$.
   ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.
   ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

يحتوي كيس على 8 كريات لا نفرق بينها باللمس منها ثلاث كريات بيضاء مرقمة بـ: 2، 2، 4 و ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 0، 2، 2 و كريتين خضراوين مرقمتين بـ: 0، 1.

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الكيس و نعتبر الحادثتين A و B حيث A: سحب ثلاث كريات مختلفة اللون مثنى مثنى و B: سحب ثلاث كريات مجموع أرقامها يساوي 4.

1. أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب.
2. بين أن $P(A\cap B)=\frac{5}{56}$ ثم استنتج $P(A\cup B)$.
3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب جداء أرقام الكريات المسحوبة.
   ✓ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين الثالث: 05 نقاط

1. أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على العدد 9.

ب) بين أن العدد $5\times 2^{2021}+1441^{1962}+8^{1954}$ مضاعف للعدد 9.

ج) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $2018^{6n+4}+2n+3\equiv 0[9]$.

2. من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر العدد الطبيعي a_n حيث $a_n=1+2+4+...+2^n$.

أ) بين أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $a_n=2^{n+1}-1$ ثم عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون: $a_n\equiv 0[9]$.

ب) بين أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $a_{n+1}=2a_n+1$ ثم استنتج أن a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما.

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=\dfrac{x}{x+1}+\ln(2)-\ln(x+1)$ و جدول تغيراتها المقابل.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$ln(2)$	↘	$-\infty$

1. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-0,7<\alpha<-0,6$ و $3,2<\beta<3,4$.
2. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=(2+\ln 2)x-(x+2)\ln(x+1)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ثم أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل $x\in]-1;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

2. بين أن $f(\beta)=\beta-2\ln(2)-1+\dfrac{1}{\beta+1}$ ثم اعط حصرا لـ $f(\beta)$.

3. أ) بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف Ω يطلب تعيين احداثييها.

ب) أكتب معادلة للمماس (Δ) لـ (C_f) في النقطة Ω.

4. أ) أرسم كلا من (Δ) و (C_f) يعطى $(C_f)\cap(xx')=\{(0;0),(7,26;0),(-0,88;0)\}$ و
$\begin{cases}\alpha=-0,63\\ f(\alpha)=-0,33\end{cases}$ ، $\begin{cases}\beta=3,31\\ f(\beta)=1,16\end{cases}$.

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=|m|x$ ثلاث حلول متمايزة.

ج) وضح كيف يمكن رسم (C_h) التمثيل البياني للدالة h المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x)=-f(x)$ انطلاقا من (C_f) ثم أرسمه في نفس المعلم السابق.

انتهـــــــــــى الموضوع الأول

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الموضـــــوع الثانـــــي

التمرين الأول: 04 نقاط

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) التالية: $5x-7y=13$ حيث x و y عددان صحيحان.

1. بين أنه إذا كان العدد الطبيعي d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y فإن $d=1$ أو $d=13$.
2. أ) جد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) حيث $x_0-y_0=13$.
   ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).
3. عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $PGCD(x;y)=13$.
4. ليكن N عددا طبيعيا يكتب $\overline{56\beta 5}$ في النظام ذي الأساس 7 و يكتب $\overline{310\alpha 1}$ في النظام ذي الأساس 5 حيث α و β عددان طبيعيان.
   ✓ جد العددين α و β ثم أكتب العدد N في النظام العشري.

التمرين الثاني:04 نقاط

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=u_n+2n+1 \end{cases}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_n=n^2$.
2. ليكن المجموع S_n حيث $S_n=u_0+u_1+....+u_n$.
   ✓ برهن بالتراجع أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $S_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $u_{n+1}\equiv u_n\,[5]$.
4. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=e^{u_{n+1}-u_n}$.
   أ) بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها e^2 يطلب حساب حدها الأول ثم أكتب v_n بدلالة n.
   ب) أحسب بدلالة n المجموع S'_n حيث $S'_n=\ln v_0+\ln v_1+....+\ln v_{n-1}$ ثم استنتج مرة أخرى أن $u_n=n^2$.

التمرين الثالث:05 نقاط

I. عين العددين المركبين α و β حيث $\begin{cases} 2\alpha-\sqrt{3}\beta=3\sqrt{3}-i \\ \alpha i-\beta=0 \end{cases}$.

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+i$، $z_B=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_A$ و $z_C=-1+\sqrt{3}i$.

1. أكتب كلا من z_A، z_B و z_C على الشكل الأسي ثم عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z_A^n حقيقي سالب تماما.
2. أكتب z_B على الشكل المثلثي و الجبري ثم استنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

3. أ) بين أن $\frac{z_C}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ و حدد طبيعة المثلث OAC ثم عين لاحقة النقطة I مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OAC.

ب) استنتج طبيعة التحويل النقطي الذي يحول النقطة A إلى النقطة C محددا عناصره المميزة.

ج) بين أن النقطة B هي صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OC}$ ثم استنتج أن الرباعي $OABC$ مربع.

4. عين طبيعة المجموعة (S) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $Arg\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi$ مع k عدد صحيح.

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x) = 2e^x - ex - e$.

1. أدرس تغيرات الدالة g.

2. أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 1 والأخر α حيث $-0,6 < \alpha < -0,58$.

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -2e^{-x} + \frac{1}{2}ex^2 - ex$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. أ) بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = g(-x)$.

ب) استنتج أن الدالة f متزايدة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[-\alpha;+\infty[$ و متناقصة على المجال $[-1;-\alpha]$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3. عين دون حساب $\lim\limits_{x\to-\alpha} \frac{f(x) - f(-\alpha)}{x + \alpha}$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

4. h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - ex$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - h(x)]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب. أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_h).

5. أ) أحسب $f(0)$ ثم أرسم (C_f). نقبل أن $\begin{cases}(C_f)\cap(xx') = \{(2,1;0)\}\\ f(-\alpha) = -2,24\end{cases}$.

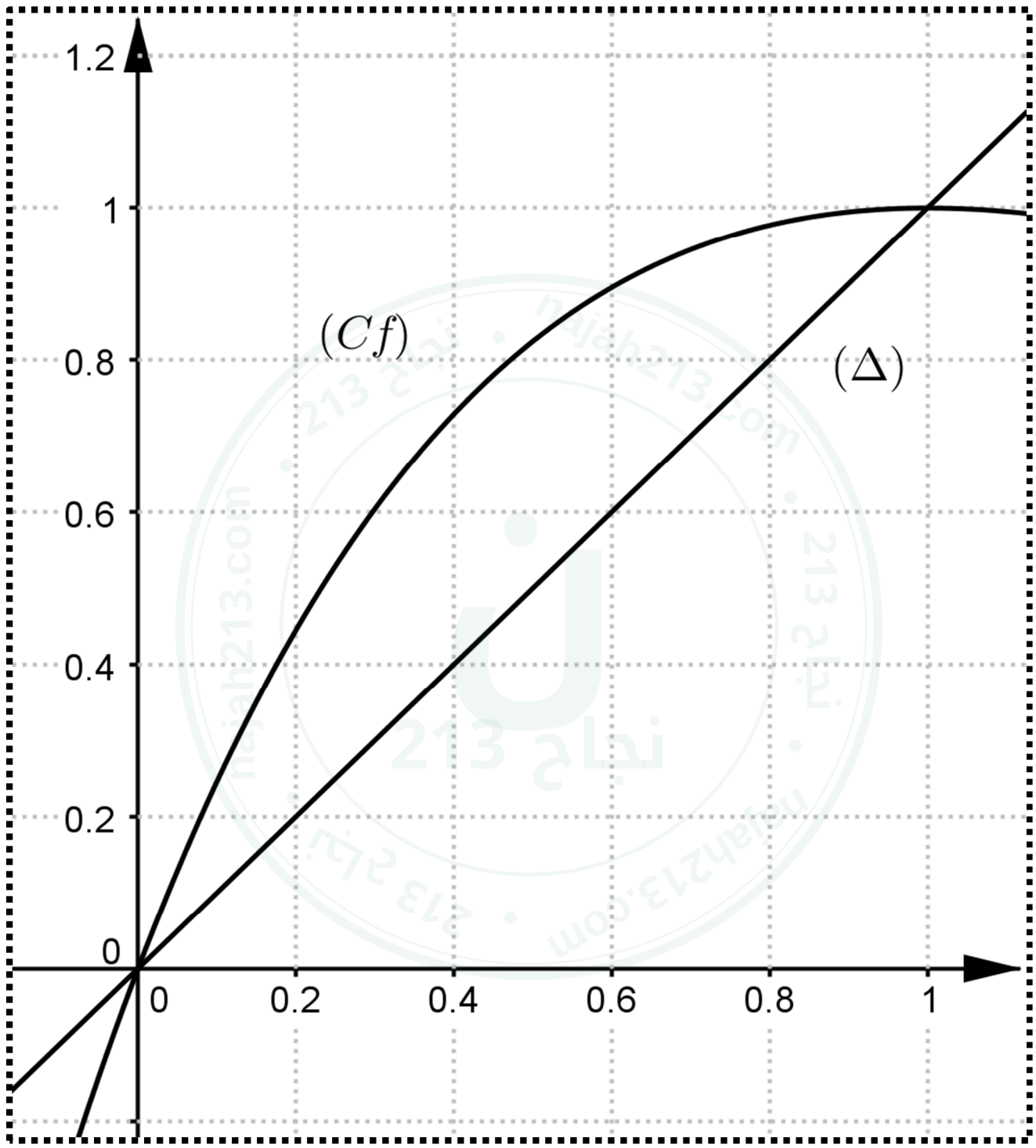
ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x) = m$ حلين موجبين و حل سالب.

انتهـــــــــى الموضـــــوع الثاني

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الوثيقة المرفقة	
الاسم:	اللقب:



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التصحيح النموذجي لاختبار الثلاثي الفصل الثاني في مادة الرياضيات

الشعبة: 3 تر

الموضوع الأول:

حل التمرين الأول:

I) (0.5)

1) تبيان أن الدالة f متزايدة على المجال I:

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I حيث

$f'(x) = e^{1-x} - x e^{1-x} = (1-x) e^{1-x}$

لدينا $f'(x) = 0$ تكافئ $x = 1$ لأن $e^{1-x} \neq 0$

وحسب إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-x$ لأن $e^{1-x} > 0$

وعليه من أجل $x \in I$ فإن $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة على I. (0.5)

2) تبيان أنه من أجل $x \in I$ فإن $f(x) \in I$ (0.5)

لدينا $x \in I$ معناه $x \in [0;1]$ ومنه $f(x) \in [f(0); f(1)]$

لأن الدالة f متزايدة على I.

لدينا $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$

وعليه من أجل $x \in I$ فإن $f(x) \in I$.

II) لدينا $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{5} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) تمثيل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل (0.5)

وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها. (0.5)

من البيان نلاحظ أن: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < \cdots$ وعليه يبدو أن (u_n) متزايدة تماما على N. ومتقاربة نحو العدد 1 (فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (Δ)).

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

0,F8

ج) أ/ البرهان بالترجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$; $0 < U_n < 1$

نرمز بـ $P(n)$ للخاصية $0 < U_n < 1$

لدينا $P(0)$ محققة لأن $U_0 = \frac{1}{5}$ و $0 < \frac{1}{5} < 1$

نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل $n \in \mathbb{N}$ أي $0 < U_n < 1$ ولنبرهن أن

$P(n+1)$ محققة أي لنبرهن أن $0 < U_{n+1} < 1$

لدينا $0 < U_n < 1$ ولما أن f متزايدة على I فإن $f(0) < f(U_n) < f(1)$

أي $0 < U_{n+1} < 1$ ومنه $P(n+1)$ محققة.

وبالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالترجع نستنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < U_n < 1$$

0,F8

ب) تبيان أن (U_n) متزايدة تماما:

لدينا $U_{n+1} - U_n = U_n e^{1-U_n} - U_n = U_n\left(e^{1-U_n} - 1\right)$

لدينا مما سبق $0 < U_n < 1$ ومنه $-1 < -U_n < 0$

أي $0 < 1 - U_n < 1$

ومنه $1 < e^{1-U_n} < e$

ومنه $0 < e^{1-U_n} - 1 < e - 1$

وبالتالي $e^{1-U_n} - 1 > 0$

وعليه $U_{n+1} - U_n > 0$

ومنه المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

0,25

استنتاج أن (U_n) متقاربة:

لدينا (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى ومنه فهي متقاربة.

0,5

حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$:

لما أن (U_n) متقاربة فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell \ / \ \ell \in \mathbb{R}$ حيث $f(\ell) = \ell$

لدينا $f(\ell) = \ell$ يكافئ $\ell e^{1-\ell} = \ell$ ومنه $\ell(e^{1-\ell} - 1) = 0$

أي $\ell = 0$ أو $\ell = 1$ ومنه $e^{1-\ell} = e^0$

ولما أن $0 < U_n < 1$ فإن (U_n) متزايدة تماما ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$

0,5

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

حل التمرين الثاني:

B_2	R_0	V_0
B_2	R_2	V_1
B_4	R_2	

1) حساب $P(A)$ و $P(B)$:

$$P(A) = \frac{C_3^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_8^3} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28} \quad (0,8)$$

$$P(B) = \frac{C_1^1 \times C_2^2 + C_4^2 \times C_2^1}{56} = \frac{1+12}{56} = \frac{13}{56} \quad (0,8)$$

2) بيان أن: $P(A \cap B) = \frac{5}{56}$

لدينا $P(A \cap B) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{56} = \frac{5}{56}$ (0,8)

استنتاج $P(A \cup B)$:

لدينا $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (0,8)

$$= \frac{18}{56} + \frac{13}{56} - \frac{5}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$$

3) تعريف قانون الاحتمال لمتغير عشوائي X: (1,8)

x_i	0	4	8	16
p_i	$\frac{9}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{28}$

$$P(X=0) = \frac{C_2^2 \times C_6^1 + C_2^1 \times C_6^2}{56} = \frac{6+30}{56} = \frac{36}{56} = \frac{9}{14}$$

$$P(X=4) = \frac{C_1^1 \times C_4^2}{56} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

$$P(X=8) = \frac{C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1 + C_4^3}{56} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=16) = \frac{C_4^2 \times C_1^1}{56} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

حساب $E(X)$:

$$E(X) = \frac{12 + 32 + 48}{28} = \frac{92}{28} = \frac{23}{7} \quad (0,8)$$

(3)

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

حل التمرين الثاني:

1,28 1) أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9:

من أجل $n=0$ فإن $2^0 = 1 \equiv 1 [9]$

من أجل $n=1$ فإن $2^1 = 2 \equiv 2 [9]$

من أجل $n=2$ فإن $2^2 = 4 \equiv 4 [9]$

من أجل $n=3$ فإن $2^3 = 8 \equiv 8 [9]$

من أجل $n=4$ فإن $2^4 = 16 \equiv 7 [9]$

من أجل $n=5$ فإن $2^5 = 32 \equiv 5 [9]$

من أجل $n=6$ فإن $2^6 \equiv 64 \equiv 1 [9]$

وعليه بواقي قسمة 2^n على 9 تأخذها في الجدول التالي:

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$n \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	8	7	5	$[9]$

ب) نبين أن العدد $5 \times 2^{2021} + 1441^{1962} + 8^{1954}$ مضاعف للعدد 9:

لدينا $2021 = 336 \times 6 + 5$ ومنه $2^{2021} \equiv 5 [9]$

ومنه $5 \times 2^{2021} \equiv 25 [9]$ أي $5 \times 2^{2021} \equiv 7 [9]$

لدينا $1441 \equiv 1 [9]$ ومنه $1441^{1962} \equiv 1 [9]$

ولدينا $8 \equiv -1 [9]$ ومنه $8^{1954} \equiv 1 [9]$

وعليه $5 \times 2^{2021} + 1441^{1962} + 8^{1954} \equiv 9 [9]$

$\equiv 0 [9]$

(0,75) جـ) نعين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $2^{6n+4} + 2n + 3 \equiv 0 [9]$

لدينا $2018 \equiv 2 [9]$ ومنه $2018^{6n+4} \equiv 2^{6n+4} [9]$

ومنه $2018^{6n+4} \equiv 7 [9]$

ومنه $2018^{6n+4} + 2n + 3 \equiv 0 [9]$ تكافئ $2n + 10 \equiv 0 [9]$

ومنه $2n + 1 \equiv 0 [9]$ أي $2n \equiv -1 [9]$ ومنه $2n \equiv 8 [9]$

(4)

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

نجاح 213 · najah213.com

وعليه $2^n \equiv 2 \times 4 \ [9]$ أي $n \equiv 4 \ [9]$ أي 2^n و 9 أوليان فيما بينهما

ومنه $n = 9k + 4$ حيث $k \in \mathbb{N}$

ب) لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$: $a_n = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^n$

أ) بيان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $a_n = 2^{n+1} - 1$

لدينا $a_n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$ (0,8)

لأن 2^n و n حدّا لهندسية أساسها 2 وحدها الأول وحد لليل 0 و1

تعيين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $a_n \equiv 0 \ [9]$ (0,8)

لدينا $a_n \equiv 0 \ [9]$ معناه $2^{n+1} - 1 \equiv 0 \ [9]$ ومعناه $2^{n+1} \equiv 1 \ [9]$

وعليه $n + 1 = 6k$ ومنه $n = 6k - 1$ أي $n = 6k + 5$

حيث $k \in \mathbb{N}$

ن) بيان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = 2a_n + 1$ (0,8)

لدينا $a_{n+1} = 2^{n+1+1} - 1 = 2 \times 2^{n+1} - 2 + 1$

ومنه $a_{n+1} = 2\left(2^{n+1} - 1\right) + 1$

وعليه: $a_{n+1} = 2a_n + 1$

استنتاج أ a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما: (0,8)

لدينا $a_{n+1} = 2a_n + 1$ يكافئ $a_{n+1} - 2a_n = 1$ وعليه

حسب مبرهنة بيزو يستنتج أن a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

حل التمرين الرابع:

I) $g(x)=\frac{x}{x+1}+\ln 2-\ln(x+1)$ حيث $D_g=]-1;+\infty[$

1/ تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث (1)

$-0,7 < \alpha < -0,6$ و $3,2 < \beta < 3,4$

لدينا الدالة g مستمرة وتقبل الاشتقاق على المجالين $]-0,7;-0,6[$ و $]3,2;3,4[$

$g(-0,7)\times g(-0,6)<0$ و $g(3,2)\times g(3,4)<0$

لأن $\begin{cases} g(-0,7)=\\ g(-0,6)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} g(3,2)=\\ g(3,4)= \end{cases}$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-0,7<\alpha<-0,6$ و $3,2<\beta<3,4$

ج) استنتاج حسب قيم x اشارة $g(x)$: (0,5)

x	-1		α		β		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

II) $f(x)=(2+\ln 2)x-(x+2)\ln(x+1)$ لدينا

1) أ) تبيان أن $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ ثم حساب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$

(0,5) لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\left[(2+\ln 2)\frac{x}{x+2}-\ln(x+1)\right]=-\infty$

(0,25) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x+2)(2+\ln 2)x-(x+2)\ln(x+1)=+\infty$

(0,5) ب) تبيان أنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$; $f'(x)=g(x)$

لدينا من أجل $x\in]-1;+\infty[$ فإن

$f'(x)=2+\ln 2-\left(\ln(x+1)+\frac{x+2}{x+1}\right)=2+\ln 2-\ln(x+1)-\frac{x+2}{x+1}$

ومنه $f'(x)=\frac{2x+2-x-2}{x+1}+\ln 2-\ln(x+1)$

ومنه $f'(x)=\frac{x}{x+1}+\ln 2-\ln(x+1)=g(x)$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

x	-1	α	β	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	$-$ 0 $+$	0	$-$
$f(x)$	$\parallel$ $+\infty$	$\searrow$ $f(\alpha)$	$\nearrow$ $f(\beta)$	$\searrow$ $-\infty$

(0,8)

ج) تبيان أن $f(\beta) = \beta - 2\ln(2) - 1 + \frac{1}{\beta+1}$

لدينا $f(\beta) = (2+\ln 2)\beta - (\beta+2)\ln(\beta+1)$

و لدينا $\ln(\beta+1) = \frac{\beta}{\beta+1} + \ln(2)$ معناه $g(\beta) = 0$

و منه $f(\beta) = 2\beta + \beta\ln 2 - (\beta+2)\left(\frac{\beta}{\beta+1} + \ln 2\right)$

(0,8) $= 2\beta + \beta\ln 2 - \frac{\beta^2+2\beta}{\beta+1} - \beta\ln 2 - 2\ln 2$

$= 2\beta - \frac{\beta^2+\beta+\beta}{\beta+1} - 2\ln 2 = 2\beta - \beta - \frac{\beta}{\beta+1} - 2\ln 2$

$= \beta - 2\ln 2 - \frac{\beta+1-1}{\beta+1} = \beta - 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{\beta+1}$

و عليه $f(\beta) = \beta - 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{\beta+1}$

استخراج حصر لـ $f(\beta)$:

لدينا $3,2 < \beta < 3,4$ و منه $4,2 < \beta+1 < 4,4$ و منه

(0,8) $0,81 < \beta - 2\ln 2 - 1 < 1,01$ و لدينا $0,23 < \frac{1}{\beta+1} < 0,24$

و عليه $1,04 < f(\beta) < 1,25$

(0,8) 3) أ) تبيان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف Ω يطلب تعيين احداثيتيها:

لدينا من أجل $x \in]-1,+\infty[$: $f'(x) = g(x)$ و منه $g'(x) = f''(x)$

و عليه انطلاقا من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن $f''(x)$ تنعدم من أجل $x = 0$ و تغير اشارتها و بالتالي النقطة $\Omega(0;0)$ هي نقطة انعطاف (C_f)

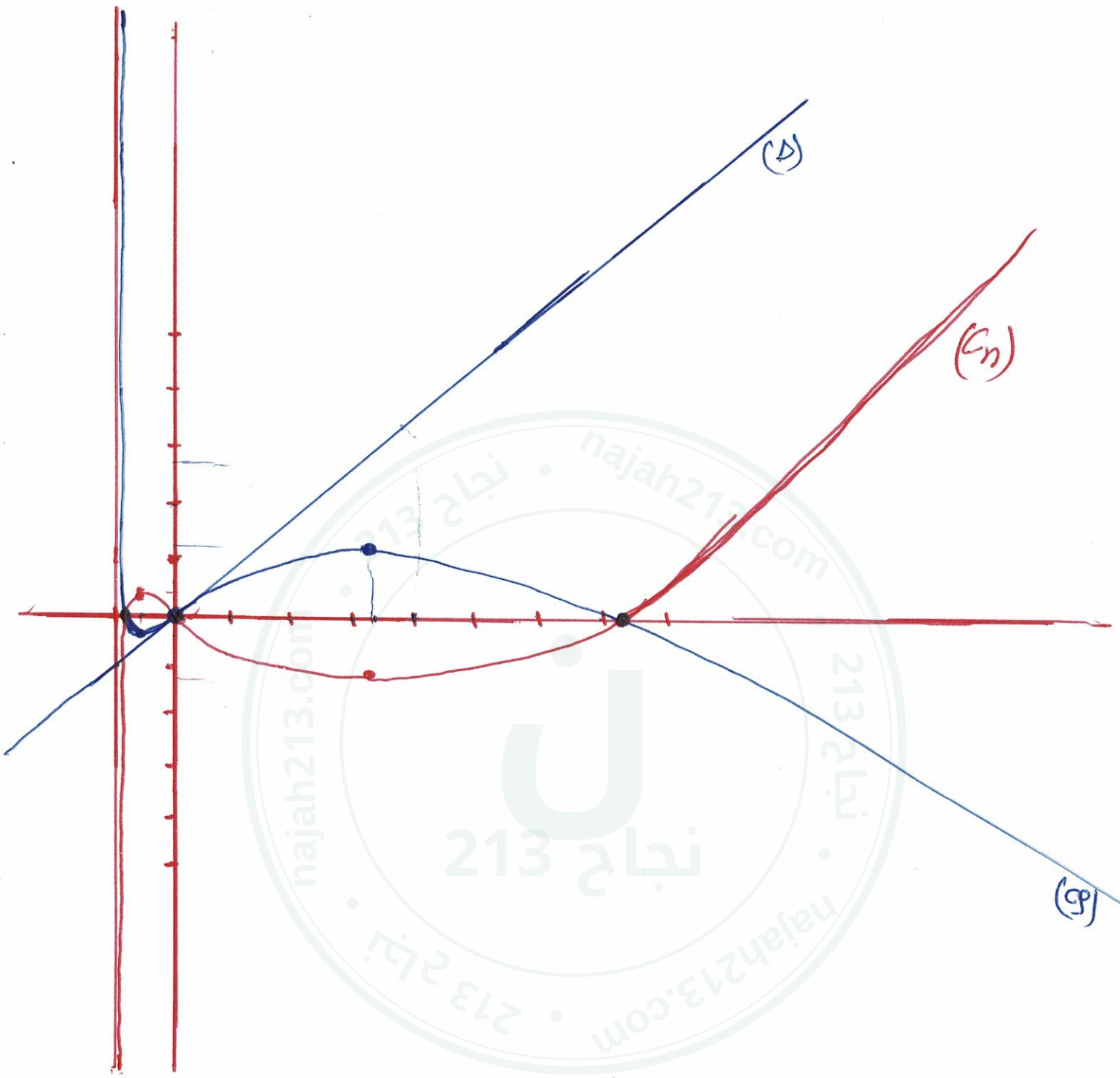
(0,8) ب) كتابة معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) في النقطة Ω :

لدينا $(\Delta): y = f'(0)(x-0) + f(0)$ و منه $(\Delta): y = \ln(2)x$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

0,5+3

ب) الرسم كلا من (Δ) و (Cf):



ج) تعيين قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=|m|x$ ثلاث حلول متمايزة:

$m \in$ أي $f(m) \in]f(\alpha); f(\beta)[$ لدينا من أجل

لدينا من أجل $0 \leqslant |m| < \ln 2$ أي $|m| < \ln 2$ و $|m| \geqslant 0$

ومنه من أجل $m \in]-\ln 2; \ln 2[$ فإن المعادلة $f(x)=|m|x$ تقبل ثلاث حلول متمايزة

0,18

8

najah213.com · نجاح 213

(0,5) ج) لو خرجنا بكيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) بين كيف يمكن رسم (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم استنتج عدد حلول المعادلة $g(x) = -h(x)$ على $]-1;+\infty[$

فإن $g(x) = -h(x)$ حيث (C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الموضوع الثاني:

حل التمرين الأول:

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (ϵ) التالية $5x-4y=13$

1) تبيان أنه إذا كان $d=PGCD(x;y)$ فإن $d=1$ أو $d=13$:

لدينا $d|x$ و $d|y$ ومنه $d|5x-4y$ أي $d|13$

ولما أن 13 عدد أولي فإن $d=1$ أو $d=13$ (0,5)

2) أ) إيجاد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (ϵ) حيث $x_0-y_0=13$ (0,5)

لدينا $\begin{cases} 5x_0-4y_0=13 \quad (1) \\ x_0-y_0=13 \quad (2) \end{cases}$ ومنه من (2) نجد أن $y_0=x_0-13$ ومنه

$5x_0-4x_0+91=13$

ومنه $x_0=39$ إذن $4x_0=156$

وعليه $y_0=39-13=26$ ومنه الحل الخاص للمعادلة (ϵ) حيث $x_0-y_0=13$ هو الثنائية $(39;26)$

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (ϵ): (0,75)

لدينا: $\begin{cases} 5x-4y=13 \\ 5\times 39-4\times 26=13 \end{cases}$ ومنه $5(x-39)-4(y-26)=0$

أي $5(x-39)=4(y-26)$ ولما أن 5 و 4 أوليان فيما بينهما فإن حسب مبرهنة غوص $\begin{cases} 5|y-26 \\ 4|x-39 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x=4k+39 \\ y=5k+26 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} y-26=5k \\ x-39=4k \end{cases}$ حيث k عدد صحيح نسبي.

أي $\begin{cases} x=4k+4 \\ y=5k+1 \end{cases}$

ومنه حلول المعادلة (ϵ) هي الثنائيات $(4k+4;5k+1)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

ملاحظة:

لدينا $5x-4y=13$ ومنه $5x=4y+13$ أي $5x\equiv 13[4]$

ومنه $5x\equiv 5\times 4[4]$ أي $5x\equiv 20[4]$ ومنه $x\equiv 4[4]$

ومنه $x=4k+4$

لأن 5 و 4 أوليان فيما بينهما. ولدينا $4y=5x-13$ أي $4y\equiv -13[5]$

ومنه $4y\equiv 2[5]$ أي $4y\equiv 4[5]$ ومنه $y\equiv 1[5]$

ومنه $y=5k+1$

وعليه حلول المعادلة (ϵ) هي الثنائيات $(4k+4;5k+1)\ /\ k\in\mathbb{Z}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

3) تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة $(\in)$ التي حقق $PGCD(x;y)=13$ (0,75)

بما أن $PGCD(x;y)=13$ فإن $13|x$ و $13|y$ أي $\begin{cases}x\equiv 0[13]\\ y\equiv 0[13]\end{cases}$ ومنه

$\begin{cases}4k\equiv 35[13]\\ 5k\equiv 25[13]\end{cases}$ أي $\begin{cases}4k\equiv 9[13]\\ 5k\equiv 12[13]\end{cases}$ أي $\begin{cases}4k+4\equiv 0[13]\\ 5k+1\equiv 0[13]\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}4k\equiv 4\times 5[13]\\ 5k\equiv 5\times 5[13]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}k\equiv 5[13]\\ k\equiv 5[13]\end{cases}$

لأن $PGCD(4;13)=1$ و $PGCD(5;13)=1$ ✱

وعليه $k=13p+5$ حيث $p\in\mathbb{Z}$

ومنه $\begin{cases}x=4(13p+5)+4\\ y=5(13p+5)+1\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=91p+39\\ y=65p+26\end{cases}$

وعليه الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة $(\in)$ التي حقق $PGCD(x;y)=13$ هي من الشكل $(91p+39;65p+26)$ حيث $p\in\mathbb{Z}$

4) لدينا $N=\overline{3\alpha 0\alpha 1}^5$ و $N=\overline{56\beta 5}^8$

حيث α و β عددان طبيعيان:

إيجاد الحدين α و β:

لدينا $0\leq\alpha\leq 4$ / $0\leq\beta\leq 4$

$N=5\times 4^3+6\times 4^2+4\beta+5=4\beta+2014$

$N=3\times 5^4+5^3+5\alpha+1=5\alpha+2001$

ومنه $5\alpha+2001=4\beta+2014$ أي $5\alpha-4\beta=13$ (1)

وعليه حسب المطابقة مع المعادلة $(\in)$ فإن $\begin{cases}\alpha=x\\ \beta=y\end{cases}$ أي $\begin{cases}\alpha=4k+4\\ \beta=5k+1\end{cases}$

ومنه $\alpha=4$ و $\beta=1$ أي $k=0$ معناه $0\leq\alpha\leq 4$ و $0\leq\beta\leq 4$

كتابة N في نظام العشري:

لدينا $\begin{cases}N=2014+4\times 1=2021\\ N=2001+5\times 4=2021\end{cases}$ أو (0,25)

(2)

najah213.com · نجاح 213

حل التمرين الثاني:

لدينا $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + 2n + 1 \end{cases}$

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $U_n = n^2$

نرمز بـ $P(n)$ للخاصية $U_n = n^2$

لدينا $P(0)$ صحيحة لأن $U_0 = 0 = 0^2$

نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n \in \mathbb{N}$ أي $U_n = n^2$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي نبرهن أن $U_{n+1} = (n+1)^2$

لدينا $U_{n+1} = U_n + 2n + 1$

ولما أن $U_n = n^2$ فإن $U_{n+1} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{U_n = n^2}$

2) لدينا $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

نرمز بـ $P(n)$ للخاصية

لدينا $P(0)$ صحيحة لأن $\frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0 = U_0$

نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n \in \mathbb{N}$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي نبرهن أن: $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

لدينا $S_{n+1} = S_n + U_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= \frac{(n+1)(2n^2+4n+6)}{6}$

ولما أن $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 4n + 6$

فإن: $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

وعليه $P(n+1)$ صحيحة وبالتالي من أجل $n \in \mathbل{N}$ فإن:

$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

3) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $u_{n+1} \equiv u_n [5]$ (0,5)

لدينا $u_{n+1} \equiv u_n [5]$ تكافئ $u_{n+1} - u_n \equiv 0 [5]$ أي $(2n+1)$

$2n+1 \equiv 0 [5]$ ومنه $2n \equiv -1 [5]$ أي $2n \equiv 4 [5]$

ومنه $n \equiv 2 [5]$ أي $n = 5k+2$ حيث $k \in \mathbb{N}$ لأن 2 و 5 أوليان فيما بينهما.

4) لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = e^{u_{n+1} - u_n}$

أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها e^2 يطلب حساب حدها الأول v_0 (0,5)

لدينا $v_{n+1} = e^{2n+2+1}$ $v_n = e^{u_{n+1} - u_n} = e^{2n+1}$

ومنه $v_{n+1} = e^2 \times e^{2n+1} = e^2 v_n$

وعليه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^2$ وحدها الأول

$v_0 = e$

ب) لدينا $v_{n+1} = e^{u_{n+2} - u_{n+1}}$

$= e^{u_{n+1} + 2n + 3 - u_n - 2n - 1}$

$= e^{u_{n+1} - u_n + 2}$

$= e^2 \times e^{u_{n+1} - u_n} = e^2 v_n$

وعليه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^2$ وحدها الأول

$v_0 = e$

$v_n = v_0 \times q^n = e \times (e^2)^n = e^{2n+1}$

ج) حساب بدلالة n، المجموع $S'_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \cdots + \ln v_{n-1}$ حيث $\ln v_n$ حدود متتالية حسابية أساسها 2 (0,75)

لدينا: $\ln v_n = 2n+1$ ومنه $(\ln v_n)$ متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول 1 وعليه:

$S'_n = \frac{n}{2}(1 + 2(n-1) + 1) = \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = n^2$

ب: $S'_n = \ln(v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_{n-1}) = \ln(v_0 \times v_0 \times q \times \cdots \times v_0 \times q^{n-1})$

$= \ln(v_0^n \times q^{1+2+\cdots+n-1}) = \ln v_0^n + \ln q^{1+2+\cdots+n-1}$

$S'_n = n \ln v_0 + \frac{n-1}{2}(n) \times \ln q = n + (n-1)n = n(n-1+1) = n^2$

استنتاج صيغة أخرى لـ u_n $u_n = n^2$

لدينا $S'_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \cdots + u_n - u_{n-1}$ (0,5)

$S'_n = u_n - u_0$

ومنه $u_n = S'_n + u_0 = n^2 + 0 = n^2$ (0,75)

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

حل التمرين الثالث :

I) تعيين العددين α و β حيث

$$\begin{cases} 2\alpha - \sqrt{3}\beta = 3\sqrt{3} - 2i & (1) \\ \alpha i - \beta = 0 & (2) \end{cases}$$ 0,25

لدينا من (2) $\beta = \alpha i$ وعوضه في (1)

$\alpha(2 - \sqrt{3}i) = 3\sqrt{3} - 2i$ أي $2\alpha - \sqrt{3}\alpha i = 3\sqrt{3} - 2i$

ومنه $\alpha = \dfrac{3\sqrt{3} - 2i}{2 - \sqrt{3}i} = \dfrac{(3\sqrt{3} - 2i)(2 + \sqrt{3}i)}{4} = \dfrac{6\sqrt{3} + 3i - 2i + \sqrt{3}}{4}$

$\dfrac{7\sqrt{3} + 4i}{4} = \sqrt{3} + i$

ومنه $\beta = (\sqrt{3} + i)i = -1 + \sqrt{3}i$

وبالتالي $\alpha = \sqrt{3} + i$ و $\beta = -1 + \sqrt{3}i$

II) لدينا $z_A = \sqrt{3} + i$ و $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} z_A$ و $z_C = -1 + \sqrt{3}i$ 0,75

1) كتابة كل من z_A . z_B و z_C على الشكل الأسي :

$z_A = \sqrt{3} + i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} z_A = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

$z_C = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z_A^n حقيقيا سالبا تماما :

z_A^n حقيقي سالب تماما معناه $\arg(z_A^n) = \pi + 2k\pi$

أي $n\arg(z_A) = \pi(1 + 2k)$ ومنه $n\dfrac{\pi}{6} = \pi(1 + 2k)$

ومنه $n = 6 + 12k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

3) كتابة z_B على الشكل المثلثي والجبري :

$z_B = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$ 0,25

$z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times (\sqrt{3} + i) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)(\sqrt{3} + i)$ 0,25

$= (1 + i)(\sqrt{3} + i) = \sqrt{3} + i + \sqrt{3}i - 1 = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$

استنتاج القيم المضبوطة لكل من $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{5\pi}{12}$:

بالمطابقة بين الشكل المثلثي والجبري نجد :

$\begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\dfrac{5\pi}{12} = \sqrt{3} - 1 \\ 2\sqrt{2}\sin\dfrac{5\pi}{12} = \sqrt{3} + 1 \end{cases}$ أي

$\begin{cases} \cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} & 0,25 \\ \sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} & 0,25 \end{cases}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

3) إثبات أن $\frac{z_C}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

لدينا $\frac{z_C}{z_A} = \frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ (0,25)

تحديد طبيعة المثلث OAC: (0,5)

لدينا $\frac{z_C}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ يكافئ $\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه

وعليه المثلث OAC قائم في O ومتساوي الساقين. $\begin{cases} OC = OA \\ (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

تعيين لاحقة النقطة I مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OAC: (0,25)

بما أن المثلث OAC قائم في O ومتساوي الساقين فإن I منتصف القطعة $[AC]$

وعليه $z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{\sqrt{3}+i - 1 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$

ب) استنتاج طبيعة التحويل النقطي الذي تحول A إلى C ثم تحديد عناصره المميزة: (0,5)

لدينا $\frac{z_C}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ يكافئ $z_C - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_O)$

ومنه C هو صورة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ (0,25)

ج) إثبات أن B هو صورة A بانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OC}$:

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{OC}}$ معناه انسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OC}$ يحول A إلى B

لدينا $\left.\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3}+1)i - \sqrt{3} - i \\ &= -1 + \sqrt{3}i \end{aligned}\right\} z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{OC}}$

$z_{\overrightarrow{OC}} = z_C - z_O = z_C = -1 + \sqrt{3}i$

ومنه B هو صورة A بانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OC}$. (0,25)

استنتاج أن الرباعي OABC مربع:

لدينا $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AB}$ و $OC = OA$ و $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2}$

فإن الرباعي OABC مربع.

4) تعيين طبيعة المجموعة (S) إلى حدث: (0,5)

$\arg\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi$ معناه $(\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MA}) = \pi + 2k\pi$

وعليه المجموعة (S) هي المستقيم (AC) ماعدا النقطتين A و C. (0,5)

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

حل التمرين الرابع :

I) لدينا $g(x) = 2e^x - ex - e$ حيث $D_g = \mathbb{R}$

1,5 (1

1) دراسة تغيرات الدالة g :

حساب النهايات : $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x\left(2 - \frac{ex}{e^x} - \frac{e}{e^x}\right) = +\infty$

حساب $g'(x)$:

لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = 2e^x - e$

دراسة إشارة $g'(x)$ حسب قيم x لأنها من أجل $g'(x) = 0$ تكافئ $2e^x - e = 0$ أي $e^x = \frac{e}{2}$

ومنه $x = \ln\frac{e}{2}$

x	$-\infty$		$\ln\frac{e}{2} = 1 - \ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty, 1-\ln 2]$ ومتزايدة على المجال $[1-\ln 2; +\infty[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		α		$1-\ln 2$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$			
$g(x)$	$+\infty$	↘		↗	$(2\ln 2 - 1)e = -0,83$	↗	0	↗	$+\infty$

$g(1-\ln 2) = 2e - e(1-\ln 2) - e = e(2\ln 2 - 1)$

1) البيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $-0,6 < \alpha < -0,58$

0,25

لدينا (1) $g(1) = 2e - e - e = 0$

ولدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]-0,6; -0,58[$ إذن $g(-0,6) \times g(-0,58) < 0$

0,5 ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,6 < \alpha < -0,58$

2) نستنتج أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما α حيث $-0,6 < \alpha < -0,58$ والآخر 1

0,5 استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

0,5

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

II) $g(x) = -2e^{-x} + \frac{1}{2}ex^2 - ex$ حيث $x \in \mathbb{R}$

1) حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

0,25 $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(-2 + \frac{1}{2}ex^2 e^{x} - ex e^{x}\right)$

$= -\infty$

0,25 $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{-2}{x^2 e^x} + \frac{1}{2}e - \frac{e}{x}\right) = +\infty$

0,5 2) أ) تبيان أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = g(-x)$

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = 2e^{-x} + ex - e$

$= 2e^{-x} - e(-x) - e = g(-x)$

ب) استنتاج أن الدالة g متزايدة على كل من المجالين $[-2; +\infty[$ و $]-\infty; -1]$

ومتناقصة على المجال $[-1; -2]$:

لدينا $g'(x) = 0$ تكافئ $g(-x) = 0$ أي $x = -2$ أو $x = -1$

ومنه $g(-x) > 0$ تكافئ $-x \in]-\infty, -2[\cup]-1, +\infty[$ أي $x \in]-\infty, -1[\cup]-2; +\infty[$

و $g(-x) < 0$ تكافئ $x \in]-1; -2[$ أي $-x \in]2; 1[$

وعليه إشارة $g'(x)$ تكون كالتالي :

x	$-\infty$		-1		-2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

0,5 وبالتالي الدالة g متناقصة على المجال $[-1; -2]$ ومتزايدة على المجالين $]-\infty, -1]$ و $[-2; +\infty[$.

0,25 تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

$g(-1) = -2e + \frac{1}{2}e + e = -e + \frac{1}{2}e = -\frac{1}{2}e$

x	$-\infty$		-1		-2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}e$	↘	$g(-2)$	↗	$+\infty$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

3) أحسب دون حساب : $\lim_{x \to -\alpha} \frac{f(x) - f(-\alpha)}{x + \alpha}$

0,25 $\lim_{x \to -\alpha} \frac{f(x) - f(-\alpha)}{x + \alpha} = f'(-\alpha) = g(\alpha) = 0$

تفسير النتيجة بيانيا :

نقول أن (C_f) يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$

0,25

4) بيان (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تحسين احداثييها :

لدينا $f''(x) = g'(x)$ ومنه $f''(x) = -g'(-x)$

لدينا $f''(x) \geq 0$ تكافئ $g'(-x) \geq 0$ أي $-x \geq 1 - \ln 2$ أي $x \leq \ln(2) - 1$

لدينا $f''(x) > 0$ تكافئ $-g'(-x) > 0$ أي $g'(-x) < 0$

ومنه $x \in]-\infty, 1 - \ln 2[$ ومنه $-x \in]\ln(2) - 1; +\infty[$

وعليه اشارة $f''(x)$ تكون كالتالي :

x	$-\infty$		$\ln(2) - 1$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

ملاحظة.

بما أن f'' انعدمت عند أجل $x = \ln(2) - 1$ وغيرت اشارتها فإن النقطة $\Omega\left(\ln(2) - 1 ; f(\ln(2) - 1)\right)$ أي $\Omega\left(\ln(2) - 1 ; \frac{1}{2}e\left(\ln\frac{2}{e}\right)^2 - e\ln 2\right)$

$f(\ln(2) - 1) = -2e^{1 - \ln 2} + \frac{1}{2}e(\ln(2) - 1)^2 - e(\ln(2) - 1)$

$= -e + \frac{1}{2}e\left(\ln\frac{2}{e}\right)^2 - e\ln(2) + e$

$= \frac{1}{2}e\left(\ln\frac{2}{e}\right)^2 - e\ln 2$

0,25 5) $D_h = \mathbb{R}$ / $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - ex$

أ) حساب $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - h(x)]$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - h(x) = \lim_{x \to +\infty} -2e^{-x} = 0$

0,25

تفسير النتيجة بيانيا :

نقول أن (C_f) و (C_h) متقاربان عند $+\infty$.

0,25 ب) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_h) :

بما أن $f(x) - h(x) = -2e^{-x} < 0$ فإن (C_f) يقع تحت (C_h) من أجل $x \in \mathbb{R}$

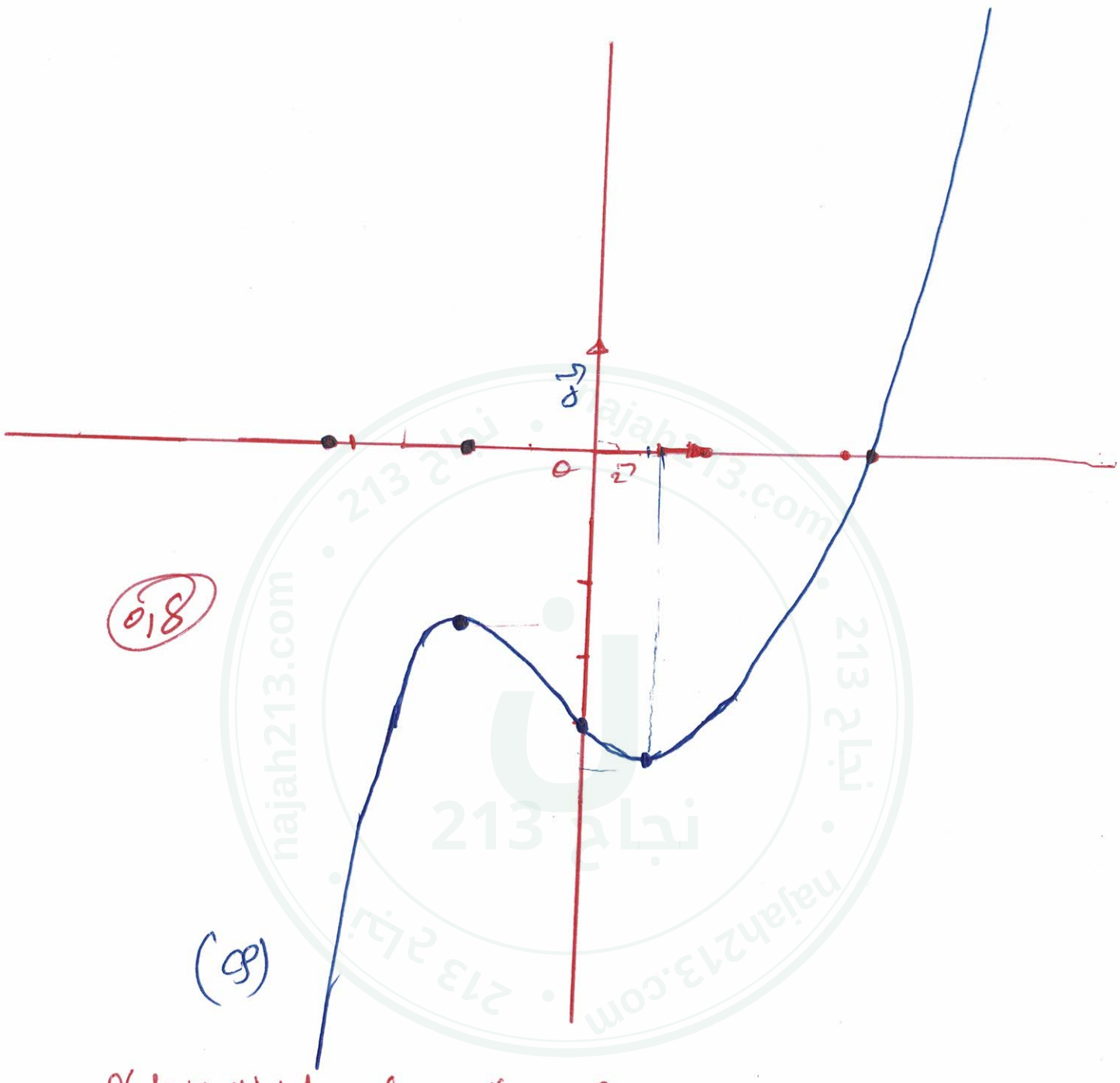
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

5) حساب $g(0)$ ثم رسم (C_g):

$g(0) = -2$ لدينا

0,25



0,75

ب) تعيين بيانيا وتبرير الوسيط الحقيقي m الذي تقبل من أجلها المعادلة $g(x) = m$ حلين موجبين وحل سالب

لدينا من أجل $m \in]g(-1); -2[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب.

0,25

0,5

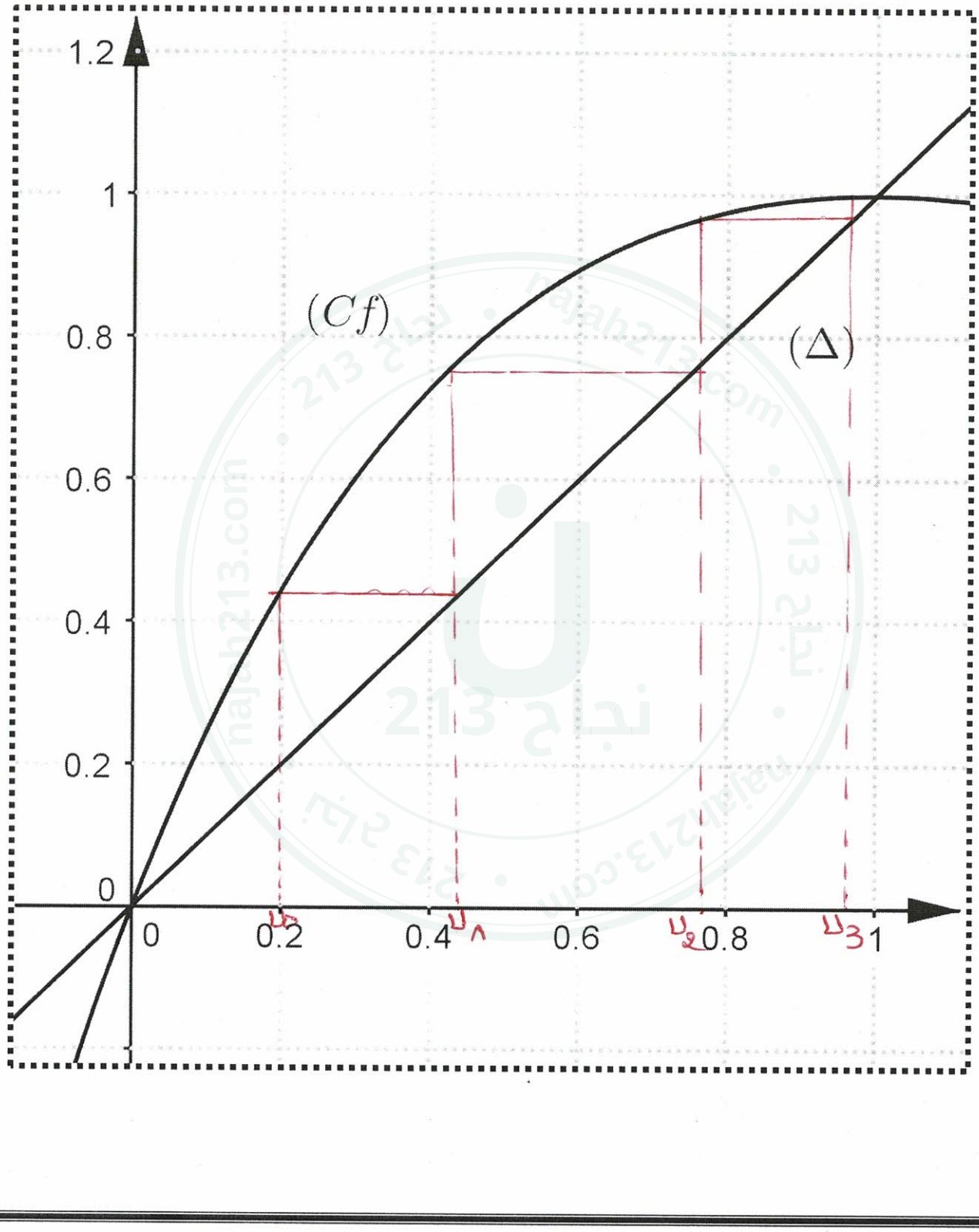
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الوثيقة المرفقة

الاسم:

اللقب:



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com