najah213.com · نجاح 213

ثانويّة سعدي الصديق - تبسة-

الأستاذ : قرايدية سمير

مسألة أسية رقم 02

الجزء الأوّل:

لتكن g دالّة عدديّة مُعرّفة على $\mathbb{R}$ و تُحقّق العلاقة $g(x)-2g(1-x)=e^{x}-2e^{1-x}-3x+3$.

1) أوجد عبارة $g(x)$ بدلالة x. (**إرشاد:** ضع $t=x$ تارةً و $t=1-x$ تارةً أخرى)

2) نضع : $g(x)=e^{x}-x-1$ حيث $D_g=\mathbb{R}$

أ) أحسب نهايات الدّالّة $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) أدرس إتجاه تغير الدّالة g ثم شكل جدول تغيراتها

3) استنتج اتجاه تغيُّر الدّالّة h المُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=1-g(-x)$.

4) أثبت أنّ المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيثُ :

$$-1,15<\alpha<-1,14 \quad \text{و} \quad 1,84<\beta<1,85$$

5) استنتج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعاً لقيم العدد الحقيقي x.

الجزء الثّاني:

لتكن f دالّة عدديّة مُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{x+g(x)}{1+g(x)}$، و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي.

1) أُحسُب نهايات الدّالّة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. فسِّر هندسيّاً النّتائج.

2) أ) أثبت أنّ الدّالّة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و أنّ $f'(x)=\dfrac{e^{x}\times h(x)}{\left[1+g(x)\right]^{2}}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالّة f ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

3) أحسُب $f(0)$ ثُمّ أرسم (C_f).

بالتوفيق لتلاميز

بكالوريا 2021

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الإجابة النموذجية

الجزء الأوّل:

1) من أجل $t = x$ يكون لدينا

$$g(t) - 2g(1-t) = e^t - 2e^{1-t} - 3t + 3 \ldots (1)$$

من أجل $t = 1 - x$ يكون لدينا

$$g(1-t) - 2g(t) = e^{1-t} - 2e^t + 3t \ldots (2)$$

بضرب المعادلة (2) في 2 والجمع مع المعادلة (1) طرفاً لطرف نجد أنّ $g(t) = e^t - t - 1$، إذن الدّالّة g مُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = e^x - x - 1$.

2) الدّالّة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالّتها المشتقّة $g'(x) = e^x - 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

الدّالّة g متزايدة تماماً على $[0, +\infty[$ و متناقصة تماماً على $]-\infty, 0]$.

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ و

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

، و تغيُّرات الدّالّة g مُوضّحة في الجدول الآتي

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

3) الدّالّة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالّتها المشتقة $h'(x) = e^{-x} - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$

الدّالّة h متناقصة تماماً على $[0, +\infty[$ و متزايدة تماماً على $]-\infty, 0]$.

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$، و تغيُّرات الدّالّة h مُوضّحة في الجدول الآتي

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$+\infty$ ↗	1	↘ $+\infty$

4) الدّالّة h مستمرّة و رتيبة تماماً على كلّ مجال من المجالين $[-1,15; -1,14]$ و $[1,84; 1,85]$ و لدينا $h(-1,15) \times h(-1,14) < 0$ و كذلك $h(1,85) \times h(1,84) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسّطة المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلّين α و β حيثُ $-1,15 < \alpha < -1,14$ و $1,84 < \beta < 1,85$.

5) إشارة $g(x)$ و $h(x)$ مُوضّحتان في الجدولين

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$+$

x	$-\infty$	α	β	1
$h(x)$	$-$	0	$+$	0 $-$

الجزء الثاني:

الدّالّة f مُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

1) لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ و

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{e^x}}{1-\frac{x}{e^x}}=1$$ ، و منه

المستقيمان $(\Delta):y=1$ و $(\Delta'):y=0$ مقاربان أفقيّان لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$ على التّرتيب.

2) أ) الدّالّتان $x\mapsto x$ و $x\mapsto e^x$ قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و عليه تكون الدّالّة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالّتها المشتقة هي $f'(x)=\dfrac{e^x\times h(x)}{\left[e^x-x\right]^2}$.

ب) بما أنّ $\dfrac{e^x}{\left[e^x-x\right]^2}>0$ من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$.

الدّالّة f متناقصة تماماً على $]-\infty,\alpha]\cup[\beta,+\infty[$ و متزايدة تماماً على $[\alpha,\beta]$، و جدول تغيُّراتها هو

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$f(\beta)$	↘	1

3) لدينا $f(0)=0$، و (C_f) مُوضّح في الرّسم المُرفق

