najah213.com · نجاح 213

كراس العبقري في الرياضيات

الإحتمالات

- دروس.
- ملخص شامل.
- تمارين محلولة بالتفصيل.
- للشعب: الثانية علوم تجريبية، تقني رياضي.

الأستاذ بوعزة مصطفى

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

دروس الإحتمالات// التحضير الجيد للبكالوريا// 2 علوم تجريبية؛ 2 تقني رياضي.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

يوم: .

الموضوع: محاكاة تجربة عشوائية -مفردات الاحتمالات.

① نشاط:

نعتبر التجربة التالية: نرمي P مرة زهرة نرد مكعبة غير مزيفة ذات ستة أوجه، مرقمة من 1 إلى 6 ونهتم بثلاثة وسائط.



- التواتر f_n لظهور الرقم 6 على الوجه العلوي من أجل n رمية الأولى.
- الوسط الحسابي m_n لـ n رقما الأولى التي تظهر على الوجه العلوي.
- التباين لهذه الأرقام (n الأولى ظهورا) $(n \leq p)$

المرحلة الأولى: - القيام بالتجربة جماعيا.

❶ كل تلميذ يرمي زهرة النرد 30 مرة ويسجل في كل مرة الرقم الظاهر على الوجه العلوي.

❷ يحسب التلميذ الوسط الحسابي للأرقام.

❸ توضع كل النتائج (لكل تلاميذ القسم) في جدول واحد مشترك حسب النموذج التالي (n تأخذ القيم 30 ثم 60 وهكذا ... حتى التلميذ الأخير)

N	30	60	90	.....
عدد مرات ظهور الرقم 6				
تواتر الرقم 6 f_n				
الوسط الحسابي للأرقام m_n				

ملاحظة: لحساب m_{60} يُمكن استعمال معدلي التلميذين الأولين .....

❹ نمثل بيانيا النقط $(n; f_n)$، ماذا تلاحظ؟

❺ نفس السؤال بالنسبة للنقط $(n; m_n)$

يشير المنحنى في السؤال ❹ إلى أنّ المتتالية (f_n) تؤول إلى عدد قريب من $0,17$ (توازن زهرة النرد يؤكد أنّ للرقم 6 حظا من بين ستة حظوظ للظهور) نقول عندئذ أنّ احتمال ظهور الرقم 6 يساوي $\frac{1}{6}$ $(\frac{1}{6} \simeq 0,17)$

المرحلة الثانية: - استعمال مجدول Excel

❶ أدخل أرقام الرميات من $A1$ إلى $A2500$

❷ باستعمال الطلبية =ENT(ALEA( )*1+6) في الخلية $B1$

ثم استعمال الزالق إلى $B2500$ نحاكي التجربة السابقة (2500 رمية لزهرة النرد)

❸ نحسب f_n تواتر الرقم 6 (في الخانة $C1$) باستعمال الطلبية **=NB.SI($B$1:B1;6)/A1** ثمّ النسخ إلى $C2500$

❹ نمثل بيانيا النقط $(n; f_n)$ [سحابة نقط]، ماذا تلاحظ؟

❺ في الخانة $D1$ نحسب الوسط الحسابي m_n باستعمال الطلبية **=MOYENNE($B$1:B1)** ثمّ النسخ الى $D2500$

❻ مثّل بيانيا النقط $(n; m_n)$. ماذا تلاحظ؟

❼ نفس السؤال بالنسبة للتباينات في العمود E باستعمال الطلبية **=VAR.P($B$1:B1)** ثمّ النسخ إلى $E2500$

❽ باستعمال اللمسة $F9$ كرر المحاكاة ولاحظ.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

② مصطلحات:

- نسمي **تجربة عشوائية** كل تجربة لا يُمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة.
  - ✍ في تجربة عشوائية، **مجموعة النتائج الممكنة** تسمى **مجموعة الإمكانيات** أو **مجموعة المخارج** ويُرمز لها بالرمز Ω.
  - ✍ ليكن A جزءً من Ω، نقول عندئذٍ أنّ A **حادثة** (أو **حدث**).
- إذا احتوت المجموعة الجزئية A على **عنصر وحيد** فإنّها تدعى **حادثة أولية** (أو **بسيطة**).
- Ω هي **الحادثة الأكيدة** و$\varnothing$ هي **الحادثة المستحيلة**. ($\varnothing$ الجزء الخالي)
- إذا كانت A حادثة ما فإنّ **حادثتها العكسية** يرمز لها بـ $\overline{A}$ وهي التي تحوي كل عناصر Ω ما عدا عناصر A.
- لتكن A وB حادثتين. نرمز بـ$A \cap B$ للحادثة "A وB" وهي التي تحوي العناصر المشتركة بين A وB.
  - ✍ إذا كانت $A \cap B$ خالية، أي: $A \cap B = \varnothing$ نقول عندئذٍ أنّ الحادثين A وB **غير متلائمتين** (**منفصلتين**).
- نرمز بـ$A \cup B$ للحادثة "A أوB" وهي التي تحوي عناصر A وعناصر B أيضا.

مثال:

نعتبر التجربة العشوائية التالية: نرمي زهر نرد غير مزيفة ذات ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6.

- المجموعة الشاملة هي: $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
- الحادثة A :"الحصول على رقم فردي"، أي: $A = \{1;3;5\}$.
- الحادثة العكسية لـA هي الحادثة $\overline{A}$:"الحصول على رقم زوجي"، أي: $\overline{A} = \{2;4;6\}$.
- الحادثة B :"الحصول على رقم أكبر أو يساوي 3"، أي: $B = \{3;4;5;6\}$.
- الحادثة العكسية لـB هي الحادثة $\overline{B}$:"الحصول على رقم أصغر تماما من 3"، أي: $\overline{B} = \{1;2\}$.
- الحادثان A وB هما مجموعتان جزئيتان من Ω.
- الحادثة C :"الحصول على الرقم 6"، هي حادثة أولية (بسيطة)، لأنّ $C = \{6\}$.
- الحادثة D :"الحصول على الرقم 7"، هي حادثة مستحيلة أي: $D = \varnothing$.
- الحادثين A وC منفصلتين (غير متلائمتين)، لأنّ $A \cap C = \varnothing$.
- الحادثة $A \cap B$ هي الحادثة: "الحصول على رقم فردي أكبر أو يساوي 3"، أي: $A \cap B = \{3;5\}$.
- الحادثة $A \cup B$ هي الحادثة: "الحصول على رقم فردي أو أكبر أو يساوي 3"، أي: $A \cup B = \{1;3;4;5;6\}$.

تم بحمد الله.

بسم الله الرحمن الرحيم

يوم: .

الموضوع: قانون الاحتمال.

نشاط مقترح من طرف الأستاذ:

يحتوي كيس على 100 كرية ملونة ومن نفس الشكل، تتوزع ألوان الكريات في الكيس كما يلي:

اللون	أبيض B	أحمر R	أسود N	أخضر V	المجموع
عدد الكريات	35	40	15	10	100

أ/ أنجز جدولا للتوترات f_i.
ب/ نسحب إحدى الكريات بصفة عشوائية.
1- ما هو احتمال أن تكون الكرية حمراء؟

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

2- ما هو احتمال أن تكون الكرية بيضاء؟
3- ما هو احتمال أن تكون الكرية سوداء؟

الحل:

أ/ إنجاز جدول التوترات:

اللون	أبيض B	أحمر R	أسود N	أخضر V	المجموع
عدد الكريات	35	40	15	10	100
التواتر f_i	$\frac{35}{100}$	$\frac{40}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{10}{100}$	1

ب/ نسحب إحدى الكريات بصفة عشوائية، إذن: $\boxed{\Omega = \{B; R; N; V\}}$.
1- احتمال أن تكون الكرية حمراء هو $\frac{40}{100}$.
2- احتمال أن تكون الكرية بيضاء هو $\frac{35}{100}$.
3- احتمال أن تكون الكرية سوداء هو $\frac{15}{100}$.

توزيع التوترات في الجدول يُمثل **قانون احتمال تجربة عشوائية.**

قانون الاحتمال:

عند القيام بدراسة لمجتمع نتحصل على توزيع التواترات لكل النتائج الممكنة، نقبل أنّه إذا سحبنا بصفة عشوائية أحد أفراد المجتمع فإنّ توزيع التواترات يُمثل **قانون الاحتمال لتجربة عشوائية** وأنّه من أجل كل نتيجة e_i فإنّ: $\boxed{p_i = f_i}$.

تعريف

لتكن Ω مجموعة ذات n إمكانية لتجربة عشوائية: $\Omega = \{e_1; e_2; e_3; ...; e_n\}$.
يُعرّف قانون احتمال P على Ω، بإرفاق كل إمكانية e_i بعدد موجب p_i حيث مجموع الأعداد p_i يساوي 1.

e_1	e_2	e_3	...	e_n	المجموع
p_1	p_2	p_3	...	p_n	1

مع $0 \leq p_i \leq 1$ و $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

ملاحظات:

- **نمذجة تجربة عشوائية** يعني إرفاقها بمجموعة إمكانيات Ω وقانون احتمال P على Ω.
- يسمى العدد p_i **احتمال** تحقق المخرج e_i (احتمال تحقق الحادثة البسيطة $\{e_i\}$)، نكتب: $\boxed{p_i = P(e_i) = P(\{e_i\})}$.

مثال:

- العدد p_2 هو احتمال وقوع الإمكانية e_2.
- وفي النشاط السابق: العدد $\frac{10}{100}$ هو احتمال وقوع الحادثة "سحب كرية خضراء"، أي: $\boxed{p_4 = \frac{10}{100}}$ هو احتمال وقوع الحادثة البسيطة $\{V\}$.

تمرين تطبيقي رقم 01:

يُمثل الجدول التالي توزيع تلاميذ ثانوية ما، حسب الجنس وسنة التمدرس.

الجنس \ المستوى	1 ثا	2 ثا	3 ثا	المجموع
الذكور %	23	14	11	48
إناث %	19	17	16	52
المجموع	42	31	27	100

1- نختار تلميذا واحدا بصفة عشوائية، ما هو احتمال أن يكون: - ذكرا، - تلميذا في السنة الثالثة، - ذكرا في السنة الثانية.
2- نختار بنتا واحدة بصفة عشوائية، ما هو احتمال أن تكون تلميذة من السنة الأولى.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

3– نختار تلميذا واحدا من السنة الأولى بصفة عشوائية، ما هو احتمال أن يكون أنثى؟

الحل:

1– **نختار تلميذا واحدا بصفة عشوائية،**

- احتمال أن يكون التلميذ المختار، ذكرا هو $\boxed{\frac{48}{100}}$.
- احتمال أن يكون التلميذ المختار، تلميذا في السنة الثالثة هو $\boxed{\frac{27}{100}}$.
- احتمال أن يكون التلميذ المختار، ذكرا في السنة الثانية هو $\boxed{\frac{14}{100}}$.

2– **نختار بنتا واحدة بصفة عشوائية،** احتمال أن تكون تلميذة من السنة الأولى هو $\boxed{\frac{19}{52}}$.

3– **نختار تلميذا واحدا من السنة الأولى بصفة عشوائية،** احتمال أن يكون أنثى هو $\boxed{\frac{19}{42}}$.

تمرين 13 ص390: (لا يُكتب على الكراس)

زهرة نرد وجوهها مرقمة من 1 إلى 6، احتمال ظهور الوجوه الست يُحقق العلاقة: $P(1)=P(2)=2P(3)=3P(4)=P(5)=P(6)$
احسب احتمال ظهور كل وجه.

الحل:

حساب احتمال ظهور كل وجه:

نعلم أنّ: $\boxed{P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=1}$، ومنه: $P(1)+P(1)+\frac{1}{2}P(1)+\frac{1}{3}P(1)+P(1)+P(1)=1$

وعليه: $\frac{6+6+3+2+6+6}{6}P(1)=1$،

وبالتالي: $\frac{29}{6}P(1)=1$،

إذن: $\boxed{P(1)=\frac{6}{29}}$، $\boxed{P(2)=\frac{6}{29}}$، $\boxed{P(3)=\frac{3}{29}}$، $\boxed{P(4)=\frac{2}{29}}$، $\boxed{P(5)=\frac{6}{29}}$ و $\boxed{P(6)=\frac{6}{29}}$.

تم بحمد الله.

بسم الله الرحمن الرحيم

يوم: .

الموضوع: **تساوي الاحتمال.**

① تعريف:

لتكن Ω مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية. إذا كان، **لكل الإمكانيات نفس احتمال الظهور (لكل الحوادث الأولية نفس الاحتمال)**، نقول أنّ قانون **الاحتمال متساوي التوزيع أو متساوي الاحتمال.**

بمعنى: إذا كان n عدد عناصر Ω، فإنّ احتمال وقوع كل عنصر e_i من Ω هو: $\boxed{p_i=P(e_i)=P(\{e_i\})=\frac{1}{n}}$.

ملاحظة: بعض التعابير تدل على وضعية متساوية الاحتمال:

- نختار **بصفة عشوائية.**
- نرمي قطعة نقدية **متوازنة.**
- نرمي زهر نرد **غير مزيف.**
- القريصات أو الكريات الموجودة داخل الكيس **لا نفرق بينها عند اللمس.**

أمثلة:

- عند رمي قطعة نقدية متوازنة، فإنّ احتمال ظهور الوجه أو الظهر يساوي $\frac{1}{2}$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

■ عند رمي زهر النرد ذي 6 أوجه **غير مزيف**، فإنّ احتمال الحصول على أحد الأوجه هو $\frac{1}{6}$.

② نظرية:

في حالة **قانون متساوي الاحتمال** على مجموعة Ω وَإذا كانت A حادثة من Ω، فإنّ **احتمال** A يساوي حاصل قسمة عدد عناصر A على عدد عناصر Ω.

أي: إذا كان a عدد عناصر A وَn عدد عناصر Ω، فإنّ: $\boxed{P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{a}{n}}$.

ملاحظات:

■ نسمي عناصر الحادثة A **الحالات المواتية** (أو **الملائمة**) لهذه الحادثة، وعناصر Ω **الحالات الممكنة**.

■ تسمى النظرية السابقة أيضا **قانون لبلاس (Laplace)**.

تمرين 17 ص390: (لا يُكتب على الكراس)

نرمي ثلاث قطع نقدية مرقمة 1، 2، 3. نسجل النتائج على شكل ثلاثية (مثال PFP: القطعة 1 ظهر، القطعة 2 وجه، القطعة 3 ظهر).

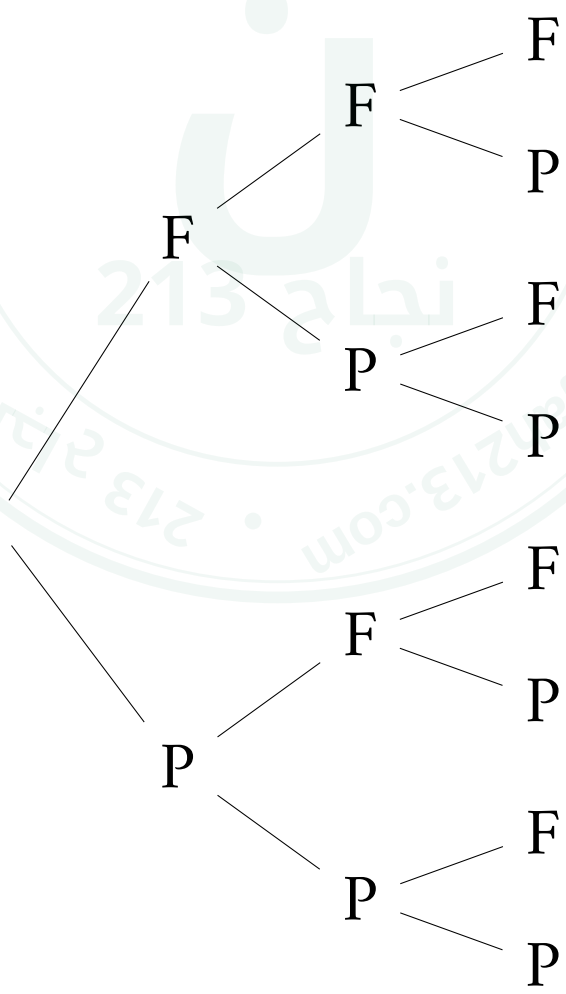
1) مثّل النتائج بمخطط أو شجرة.

2) ما هو عدد كل الإمكانيات؟

3) لماذا كل الإمكانيات متساوية الاحتمال؟ احسب احتمال كل إمكانية.

الحل:

1) تمثيل النتائج بمخطط أو شجرة:



2) عدد كل الإمكانيات هو 8.

3) الإمكانيات متساوية الاحتمال، لأن $p(F) = p(P) = \frac{1}{2}$، واحتمال كل إمكانية هو $\boxed{\frac{1}{8}}$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

تمرين 18 ص390: (لا يُكتب على الكراس)

يحتوي كيس على 3 كرات بيضاء، 4 كرات خضراء و3 كرات صفراء. نسحب عشوائيا كرة من الكيس.

هل يوجد تساوي احتمال إذا كانت مجموعة الإمكانيات Ω هي: 1) $\Omega=\{B;V;J\}$؟ 2) Ω هي الكرات العشر؟

الحل:

1) إذا أخذنا المجموعة الشاملة $\Omega=\{B;V;J\}$، فإنّ المخارج B، V وJ ليس لهم نفس الاحتمال، لأن $p(B)=\frac{3}{10}$، $p(V)=\frac{4}{10}$ و$p(J)=\frac{3}{10}$.

2) لكن لو اعتبرنا المجموعة الشاملة Ω هي الكرات العشر، تُصبح المخارج متساوية الاحتمال.

تم بحمد الله.

بسم الله الرحمن الرحيم

يوم: .

الموضوع: احتمال حادثة -خواص الاحتمالات.

① احتمال حادثة:

تعريف:

لتكن Ω مجموعة نتائج تجربة عشوائية مرفقة بقانون احتمال P وA حادثة. **احتمال الحادثة** A هو مجموع احتمالات إمكانيات هذه الحادثة.

أمثلة:

- إذا كان $P(\{a\})=0,2$ و$P(\{b\})=0,1$، فإنّ: $\boxed{P(\{a;b\})=P(\{a\})+P(\{b\})=0,2+0,1=0,3}$.
- النتائج المحصل عليها بعد رمي زهر نرد مزيف عددا كبيرا من المرات، سمحت باقتراح قانون الاحتمال المعرف كما يلي:

e_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

احتمال الحصول على رقم زوجي يساوي: $\boxed{P(\{2;4;6\})=P(\{2\})+P(\{4\})+P(\{6\})=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1+4+3}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}}$.

② خواص الاحتمالات:

❶ بما أنّ الاحتمال $P(A)$ لحادثة A هو مجموع جزئي للاحتمالات p_i والمجموع الكلي لهذه الاحتمالات يساوي 1، فإنّ $P(A)$ هو عدد محصور بين 0 و1: $\boxed{0\leq P(A)\leq 1}$.

❷ احتمال الحادثة المستحيلة معدوم: $\boxed{P(\varnothing)=0}$.

❸ احتمال الحادثة الأكيدة يساوي 1: $\boxed{P(\Omega)=1}$.

❹ إذا كان A وB حادثتين من نفس المجموعة Ω، فإنّ: $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$.

ملاحظة: إذا كانت الحادثتان A وB غير متلائمتين (منفصلين)، فإنّ: $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$ (لأنّ: $P(A\cap B)=P(\varnothing)=0$).

❺ A حادثة من المجموعة Ω و$\overline{A}$ الحادثة العكسية لها، في هذه الحالة يكون: $\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)}$.

البرهان: بما أنّ $\overline{A}$ عكسية للحادثة A، فإنّ: $\begin{cases}A\cap\overline{A}=\varnothing\\A\cup\overline{A}=\Omega\end{cases}$،

ومنه: $\begin{cases}P(A\cap\overline{A})=P(\varnothing)=0\\P(A\cup\overline{A})=P(\Omega)=1\end{cases}$، وعليه: $P(A)+P(\overline{A})=1$، إذن: $\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)}$.

❻ إذا كانت الحادثة A جزءا من الحادثة B $(A\subset B)$، فإن: $\boxed{P(A)\leq P(B)}$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

أمثلة:

■ نعتبر حادثتين A وB حيث: $P(A\cup B)=0,78$، $P(B)=0,54$، $P(A\cap B)=0,235$.

لنحسب $P(A)$:

لدينا: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$، ومنه: $P(A)=P(A\cup B)-P(B)+P(A\cap B)=0,78-0,54+0,235=0,475$.

■ نعتبر حادثتين A وB حيث: $P(A\cup B)=0,257$، $P(A)=0,158$، $P(A\cap B)=0,125$.

لنحسب $P(\overline{B})$: (أولا نحسب $P(B)$)

لدينا: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$، ومنه: $P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A\cap B)=0,257-0,158+0,125=0,224$،

إذن: $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,224=0,776$.

■ ليكن قانون الاحتمال P المعرّف على Ω. نعتبر حادثتين غير متلائمتين A وB حيث: $P(A)=0,23$ و$P(B)=0,38$.

1) لنحسب $P(\overline{A})$ و$P(\overline{B})$: لدينا: $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,23=0,77$، ولدينا: $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,38=0,62$.

2) لنعين $P(A\cap B)$ و$P(A\cup B)$: لدينا: $P(A\cap B)=P(\varnothing)=0$، ولدينا: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0,23+0,38=0,61$.

③ الأمل الرياضياتي، التباين والإنحراف المعياري لمتغير عشوائي:

تعاريف:

لتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية (نعتبر هذه النتائج أعدادا حقيقية)، $\Omega=\{e_1;e_2;e_3;...;e_n\}$. ليكن P احتمالا على Ω، نرمز بالرمز p_i للاحتمال $P(e_i)$.

✍ **أمل قانون الاحتمال** هو العدد E حيث $\boxed{E=\sum_{i=1}^{n}e_ip_i}$.

✍ **تباين قانون الاحتمال** هو العدد V حيث $\boxed{V=\sum_{i=1}^{n}(e_i-E)^2p_i=\left(\sum_{i=1}^{n}{e_i}^2p_i\right)-E^2}$.

✍ **الانحراف المعياري لقانون الاحتمال** هو العدد $\boxed{\sigma=\sqrt{V}}$.

ملاحظة: الأمل يُمثل الوسط الحسابي في سلسلة إحصائية إذا اعتبرنا أنّ قيم الطبع هي عناصر Ω والتواترات النظرية هي القيم p_i.

تم بحمد الله.

بسم الله الرحمن الرحيم

يوم: .

الموضوع: **المتغير العشوائي.**

نشاط تمهيدي:

نرمي قطعة نقود متوازنة 3 مرات متتابعة، ونسجل النتيجة "وجه=F"، "ظهر=P"،

1) مجموعة المخارج هي $\Omega=\{FFF;FFP;FPF;FPP;PFF;PFP;PPF;PPP\}$.

2) نعتبر اللعبة التالية: "يربح اللاعب دينارا واحدا كلما ظهر (وجه F)، ويخسر دينارا واحدا كلما ظهر (ظهر P).

■ نعتبر الدّالة X التي تُرفق بكل نتيجة الربح (أو الخسارة) المناسب لها. يسمى X **المتغير العشوائي** المُعرف على Ω.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

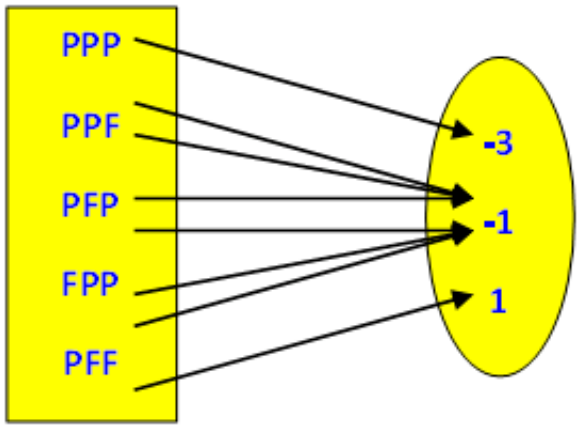
najah213.com · نجاح 213

❑ "تكون الخسارة 3 دنانير"، مثلا: نعبّر عن هذه الحادثة بالكتابة $(X=-3)$، تتحقق هذه الحادثة لما تتحقق الحادثة A حيث: $A=\{PPP\}$،
لكن: $P(A)=\frac{1}{8}$، نكتب عندئذ: $\boxed{P(X=-3)=\frac{1}{8}}$.

❑ "تكون الخسارة دينارا واحدا"، مثلا: نعبّر عن هذه الحادثة بالكتابة $(X=-1)$، تتحقق هذه الحادثة لما تتحقق الحادثة B حيث: $B=\{FPP;PFP;PPF\}$،
لكن: $P(B)=\frac{3}{8}$، نكتب عندئذ: $\boxed{P(X=-1)=\frac{3}{8}}$.

❑ "يكون الربح دينارا واحدا"، مثلا: نعبّر عن هذه الحادثة بالكتابة $(X=+1)$، تتحقق هذه الحادثة لما تتحقق الحادثة C حيث: $C=\{FPF;FFP;PFF\}$،
لكن: $P(C)=\frac{3}{8}$، نكتب عندئذ: $\boxed{P(X=+1)=\frac{3}{8}}$.

❑ "يكون الربح 3 دنانير"، مثلا: نعبّر عن هذه الحادثة بالكتابة $(X=+3)$، تتحقق هذه الحادثة لما تتحقق الحادثة D حيث: $D=\{FFF\}$،
لكن: $P(D)=\frac{1}{8}$، نكتب عندئذ: $\boxed{P(X=+3)=\frac{1}{8}}$.



■ القيم -3، -1، $+1$ و$+3$ تسمى قيم المتغير العشوائي X، نكتب: $\boxed{X\in\{-3;-1;+1;+3\}}$.

نُلخص النتائج في جدول (الجدول يُمثل قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X):

القيم x_i	-3	-1	$+1$	$+3$	المجموع
$p_i=P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

3) ✍ **الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X، يُرمز له بـ$E(X)$ حيث:**

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_ip_i=(-3)\times\frac{1}{8}+(-1)\times\frac{3}{8}+(+1)\times\frac{3}{8}+(+3)\times\frac{1}{8}=\frac{0}{8}=0.$$

✍ **التباين للمتغير العشوائي X، يُرمز له بـ$V(X)$ حيث:**

$$V(X)=\left(\sum_{i=1}^{4}{x_i}^2p_i\right)-[E(X)]^2=\left((-3)^2\times\frac{1}{8}+(-1)^2\times\frac{3}{8}+(+1)^2\times\frac{3}{8}+(+3)^2\times\frac{1}{8}\right)-(0)^2=\frac{24}{8}=3.$$

✍ **الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي X، يُرمز له بـ$\sigma(X)$ حيث:** $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{3}\simeq 1,73$.

① المتغير العشوائي:

تعريف:

Ω المجموعة الشاملة لتجربة عشوائية . نسمي متغيرا عشوائيا كل دّالة عددية معرّفة على Ω.

② قانون الإحتمال لمتغير عشوائي:

تعريف:

قانون إحتمال لمتغير عشوائي X هو الدّالة المعرّفة على I (مجموعة قيم X) والتي تُرفق بكل قيمة من I العدد $P(X=x_i)$.

ملاحظة: قانون إحتمال متغير عشوائي X، يُعطى على شكل جدول كما يلي:

القيم x_i	x_1	x_2	...	x_n	المجموع
الإحتمال $p_i=P(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n	1

مع $0\le p_i\le 1$ وَ$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

③ الأمل الرياضياتي، التباين والإنحراف المعياري لقانون الاحتمال:

تعاريف:

ليكن X متغير عشوائي، نرمز بالرمز p_i للاحتمال $P(X=x_i)$.

✍ **الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي** X هو العدد $E(X)$ حيث $\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$.

✍ **تباين المتغير العشوائي** X هو العدد $V(X)$ حيث $\boxed{V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x))^2 p_i=\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i\right)-[E(x)]^2}$.

✍ **الانحراف المعياري للمتغير العشوائي** X هو العدد $\boxed{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$.

تمرين 45 ص390: (لا يُكتب على الكراس)

صندوق يحتوي على كرة حمراء، كرتين بيضاوين وثلاث كرات سوداء. نسحب عشوائياً كرتين على التوالي. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

1) عيّن قانون احتمال المتغير X.

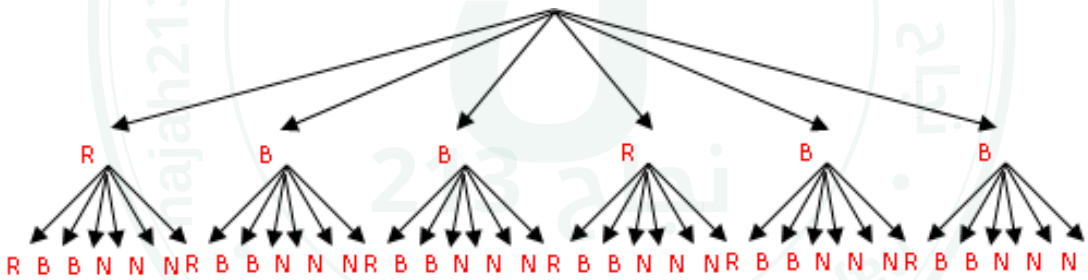
2) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير X.

3) احسب تباين المتغير X.

الحل:

صندوق يحتوي على كرة حمراء، كرتين بيضاوين وثلاث كرات سوداء. نسحب عشوائياً كرتين على التوالي. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة، نُميز حالتين.

الحالة ❶: (بإعادة الكرة) لدينا:



1) تعيين قانون احتمال المتغير X:

لدينا: $\boxed{X\in\{0;1;2\}}$.

2) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير X.

3) احسب تباين المتغير X.

■ الحادثة $(X=0)$، معناه: "عدم ظهور أية كرة بيضاء"، ومنه: $\boxed{P(X=0)=\frac{16}{36}}$.

■ الحادثة $(X=1)$، معناه: "إحدى الكرتين المسحوبتين بيضاء"، ومنه: $\boxed{P(X=1)=\frac{16}{36}}$.

■ الحادثة $(X=2)$، معناه: "الكرتين المسحوبتين بيضاوين"، ومنه: $\boxed{P(X=2)=\frac{4}{36}}$.

وبالتالي:

x_i	0	1	2	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{16}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{4}{36}$	1

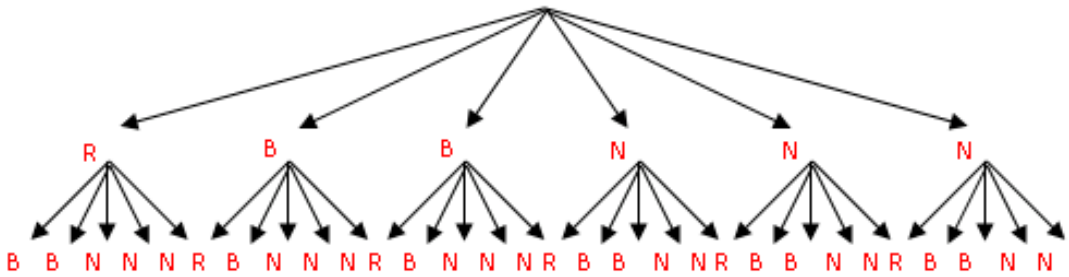
2) حساب الأمل الرياضياتي للمتغير X: لدينا: $E(X)=$

3) حساب تباين المتغير X: لدينا: $V(X)=$

الحالة ❷: (بدون إعادة الكرة) لدينا:

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213



1) تعيين قانون احتمال المتغير X:

لدينا: $\boxed{X \in \{0;1;2\}}$.

2) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير X.

3) احسب تباين المتغير X.

■ الحادثة $(X=0)$، معناه: "عدم ظهور أية كرة بيضاء"، ومنه: $\boxed{P(X=0)=\frac{12}{30}}$.

■ الحادثة $(X=1)$، معناه: "إحدى الكرتين المسحوبتين بيضاء"، ومنه: $\boxed{P(X=1)=\frac{16}{30}}$.

■ الحادثة $(X=2)$، معناه: "الكرتين المسحوبتين بيضاوين"، ومنه: $\boxed{P(X=2)=\frac{2}{30}}$.

وبالتالي:

x_i	0	1	2	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{12}{30}$	$\frac{16}{30}$	$\frac{2}{30}$	1

2) حساب الأمل الرياضياتي للمتغير X: لدينا: $E(X)=$

3) حساب تباين المتغير X: لدينا: $V(X)=$

تمرين: (عمل منزلي)

يرمي شخص زهري نرد ويهتم بالمجموع. يحصل خلالها على دينار واحد إذا كان المجموع مضاعفا لـ3، ودينارين إذا كان المجموع مضاعف لـ5 و3 دنانير إذا كان المجموع يساوي 2. X المتغير العشوائي الذي يأخذ قيمة الربح المحتمل.

عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X، ثمّ احسب الانحراف المعياري.

تمرين 42 وَ43 ص390: (عمل منزلي)

تم بحمد الله.

ملخص الإحتمالات// التحضير الجيد للبكالوريا// 2 علوم تجريبية؛ 2 تقني رياضي.

محاكاة تجربة عشوائية -مفردات الاحتمالات.

مصطلحات:

■ نسمي **تجربة عشوائية** كل تجربة لا يُمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة.

✍ في تجربة عشوائية، **مجموعة النتائج الممكنة** تسمى **مجموعة الإمكانيات** أو **مجموعة المخارج** ويُرمز لها بالرمز Ω.

✍ ليكن A جزءً من Ω، نقول عندئذٍ أنّ A **حادثة** (أو **حدث**).

■ إذا احتوت المجموعة الجزئية A على **عنصر وحيد** فإنّها تدعى **حادثة أولية** (أو **بسيطة**).

■ Ω هي **الحادثة الأكيدة** و$\varnothing$ هي **الحادثة المستحيلة**. ($\varnothing$ الجزء الخالي)

■ إذا كانت A حادثة ما فإنّ **حادثتها العكسية** يرمز لها بـ $\overline{A}$ وهي التي تحوي كل عناصر Ω ما عدا عناصر A.

■ لتكن A وB حادثتين. نرمز بـ$A\cap B$ للحادثة "A وB" وهي التي تحوي العناصر المشتركة بين A وB.

✍ إذا كانت $A\cap B$ خالية، أي: $A\cap B=\varnothing$ نقول عندئذٍ أنّ الحادثتين A وB **غير متلائمتين** (**منفصلتين**).

■ نرمز بـ$A\cup B$ للحادثة "A أوB" وهي التي تحوي عناصر A وعناصر B أيضا.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

قانون الاحتمال.

قانون الاحتمال:

عند القيام بدراسة لمجتمع نتحصل على توزيع التواترات لكل النتائج الممكنة، نقبل أنّه إذا سحبنا بصفة عشوائية أحد أفراد المجتمع فإنّ توزيع التواترات يُمثل **قانون الاحتمال لتجربة عشوائية** وأنّه من أجل كل نتيجة e_i فإنّ: $\boxed{p_i = f_i}$.

تعريف

لتكن Ω مجموعة ذات n إمكانية لتجربة عشوائية: $\Omega = \{e_1; e_2; e_3; ...; e_n\}$.
يُعرّف قانون احتمال P على Ω، بإرفاق كل إمكانية e_i بعدد موجب p_i حيث مجموع الأعداد p_i يساوي 1.

e_1	e_2	e_3	...	e_n	المجموع
p_1	p_2	p_3	...	p_n	1

مع $0 \leq p_i \leq 1$ وَ $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

ملاحظات:

- **نمذجة تجربة عشوائية** يعني إرفاقها بمجموعة إمكانيات Ω وقانون احتمال P على Ω.
- يسمى العدد p_i **احتمال** تحقق المخرج e_i (احتمال تحقق الحادثة البسيطة $\{e_i\}$)، نكتب: $\boxed{p_i = P(e_i) = P(\{e_i\})}$.

مثال:

- العدد p_2 هو احتمال وقوع الإمكانية e_2.

تساوي الاحتمال.

① تعريف:

لتكن Ω مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية. إذا كان، **لكل الإمكانيات نفس احتمال الظهور (لكل الحوادث الأولية نفس الاحتمال)**، نقول أنّ **قانون الاحتمال متساوي التوزيع أو متساوي الاحتمال.**

بمعنى: إذا كان n عدد عناصر Ω، فإنّ احتمال وقوع كل عنصر e_i من Ω هو: $\boxed{p_i = P(e_i) = P(\{e_i\}) = \frac{1}{n}}$.

ملاحظة: بعض التعابير تدل على وضعية متساوية الاحتمال:

- نختار **بصفة عشوائية.**
- نرمي قطعة نقدية **متوازنة.**
- نرمي زهر نرد **غير مزيف.**
- القريصات أو الكريات الموجودة داخل الكيس **لا نفرق بينها عند اللمس.**

أمثلة:

- عند رمي قطعة نقدية **متوازنة**، فإنّ احتمال ظهور الوجه أو الظهر يساوي $\frac{1}{2}$.
- عند رمي زهر النرد ذي 6 أوجه **غير مزيف**، فإنّ احتمال الحصول على أحد الأوجه هو $\frac{1}{6}$.

② نظرية:

في حالة **قانون متساوي الاحتمال** على مجموعة Ω وَإذا كانت A حادثة من Ω، فإنّ **احتمال** A يساوي حاصل قسمة عدد عناصر A على عدد عناصر Ω.

أي: إذا كان a عدد عناصر A وَ n عدد عناصر Ω، فإنّ: $\boxed{P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{a}{n}}$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ملاحظات:

- نسمي عناصر الحادثة A **الحالات المواتية** (أو الملائمة) لهذه الحادثة، وعناصر Ω **الحالات الممكنة**.
- تسمى النظرية السابقة أيضا **قانون لبلاس (Laplace)**.

احتمال حادثة - خواص الاحتمالات.

① احتمال حادثة:

تعريف:

لتكن Ω مجموعة نتائج تجربة عشوائية مرفقة بقانون احتمال P وA حادثة. **احتمال الحادثة** A هو مجموع احتمالات إمكانيات هذه الحادثة.

مثال:

- إذا كان $P(\{a\})=0,2$ و$P(\{b\})=0,1$، فإنّ: $\boxed{P(\{a;b\})=P(\{a\})+P(\{b\})=0,2+0,1=0,3}$.

② خواص الاحتمالات:

❶ $P(A)$ هو عدد محصور بين 0 و1: $\boxed{0\leq P(A)\leq 1}$.

❷ احتمال الحادثة المستحيلة معدوم: $\boxed{P(\varnothing)=0}$.

❸ احتمال الحادثة الأكيدة يساوي 1: $\boxed{P(\Omega)=1}$.

❹ إذا كان A وB حادثتين من نفس المجموعة Ω، فإنّ: $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$.

ملاحظة: إذا كانت الحادثتان A وB غير متلائمتين (منفصلين)، فإنّ: $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$ (لأنّ: $P(A\cap B)=P(\varnothing)=0$).

❺ A حادثة من المجموعة Ω و$\overline{A}$ الحادثة العكسية لها، في هذه الحالة يكون: $\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)}$.

❻ إذا كانت الحادثة A جزءا من الحادثة B $(A\subset B)$، فإن: $\boxed{P(A)\leq P(B)}$.

③ الأمل الرياضياتي، التباين والإنحراف المعياري لقانون الاحتمال:

تعاريف:

لتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية (نعتبر هذه النتائج أعدادا حقيقية)، $\Omega=\{e_1;e_2;e_3;...;e_n\}$. ليكن P احتمالا على Ω، نرمز بالرمز p_i للاحتمال $P(e_i)$.

✍ **أمل قانون الاحتمال** هو العدد E حيث $\boxed{E=\sum_{i=1}^{n}e_ip_i}$.

✍ **تباين قانون الاحتمال** هو العدد V حيث $\boxed{V=\sum_{i=1}^{n}(e_i-E)^2p_i=\left(\sum_{i=1}^{n}{e_i}^2p_i\right)-E^2}$.

✍ **الانحراف المعياري لقانون الاحتمال** هو العدد $\boxed{\sigma=\sqrt{V}}$.

ملاحظة: الأمل يُمثل الوسط الحسابي في سلسلة إحصائية إذا اعتبرنا أنّ قيم الطبع هي عناصر Ω والتواترات النظرية هي القيم p_i.

المتغير العشوائي.

① المتغير العشوائي:

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

تعريف:

Ω المجموعة الشاملة لتجربة عشوائية . نسمي متغيرا عشوائيا كل دّالة عددية معرّفة على Ω.

② قانون الإحتمال لمتغير عشوائي:

تعريف:

قانون إحتمال لمتغير عشوائي X هو الدّالة المعرّفة على I (مجموعة قيم X) والتي تُرفق بكل قيمة من I العدد $P(X=x_i)$.

ملاحظة: قانون إحتمال متغير عشوائي X، يُعطى على شكل جدول كما يلي:

القيم x_i	x_1	x_2	...	x_n	المجموع
الإحتمال $p_i = P(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n	1

مع $0 \leq p_i \leq 1$ وَ $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

③ الأمل الرياضياتي، التباين والإنحراف المعياري لمتغير عشوائي:

تعاريف:

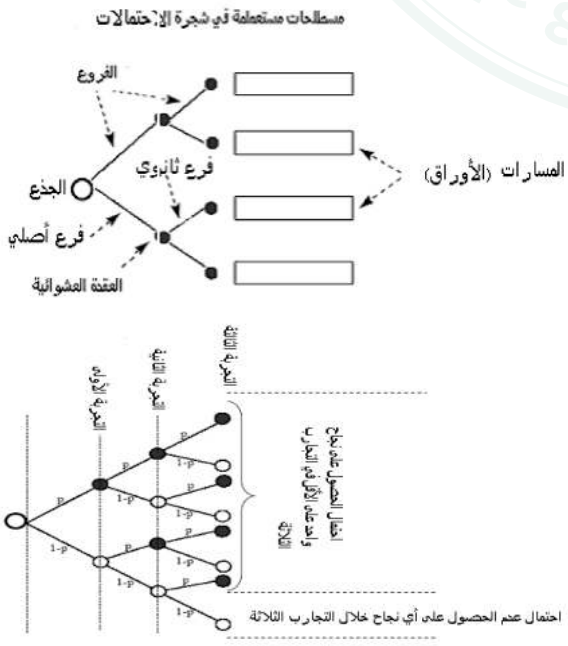
ليكن X متغير عشوائي، نرمز بالرمز p_i للاحتمال $P(X=x_i)$.

✍ **الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي** X هو العدد $E(X)$ حيث $\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$.

✍ **تباين المتغير العشوائي** X هو العدد $V(X)$ حيث $\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x))^2 p_i = \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i\right) - [E(x)]^2}$.

✍ **الانحراف المعياري للمتغير العشوائي** X هو العدد $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$.

شجرة الإحتمالات.



✍ مبدأ الشجرة أو جدعها هي العقدة الابتدائية التي ينطلق منها المسار أي مبدأ المسار.

✍ غصن ابتدائي هو خط واصل بين الجدع وعقدة ما.

✍ غصن ثانوي هو خط واصل بين عقدتين.

✍ المسار الطريق الواصل بين الجذع وعقدة الوصول.

✍ وزن غصن ابتدائي هو احتمال الحادثة المتواجد عند عقدة هذا الغصن.

✍ وزن غصن ثانوي هو الاحتمال الشرطي للحدث المتواجد عند عقدة النهاية لهذا الغصن، علما أن الطريق الذي يصل هذه العقدة بالجذع (عقدة البداية) قد تحقق.

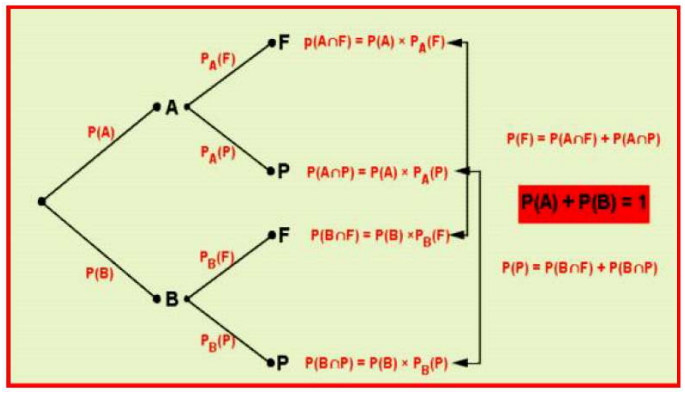
✍ مجموع أوزان الأغصان المنبثقة من نفس العقدة يساوي الواحد.

✍ احتمال مسار ما يساوي حاصل ضرب أوزان كل الأغصان المؤلفة له.

✍ احتمال حادثة مؤلف من عدة مسارات يساوي مجموع الاحتمالات لكل منها. فيكون احتمال الفشل هو p لدينا تجربة مؤلفة من مخرجين إحداهما نجاح والأخرى فشل. نفرض أن احتمال النجاح هو وعدد p . من شجرة الاحتمالات الممثلة لهذه التجربة يمكن حساب أي حادثة متعلق بالتجربة وذلك عند معرفة $(1-p)$ مرات تكرار التجربة.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213



تمارين الإحتمالات// التحضير الجيد للبكالوريا// 2 علوم تجريبية؛ 2 تقني رياضي.

التمرين 01: (بكالوريا 2018/ الموضوع الأوّل/ شعبة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

صندوق به 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس مرقمة من 11 إلى 20، نسحب عشوائيا كرية واحدة.

احتمال الحصول على كرية تحمل عددا مضاعفا لـ3 هو: أ) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{3}{10}$ ج) $\frac{7}{10}$.

احتمال الحصول على كرية تحمل عددا فرديا ومضاعفا لـ3 هو: أ) $\frac{9}{10}$ ب) $\frac{3}{10}$ ج) $\frac{1}{10}$.

التمرين 02: (بكالوريا 2020// الموضوع 01// الشعبة: علوم تجريبية)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كلّ حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

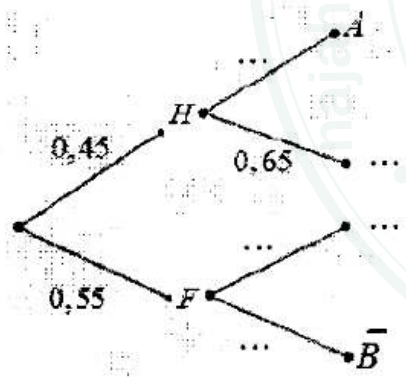
1) قانون احتمال المتغيّر العشوائي X معرّف بالجدول المُقابل:

x_i	-2	0	1	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغيّر العشوائي X هو: أ) $\frac{-1}{20}$ ب) $\frac{-1}{10}$ ج) $\frac{-3}{20}$.

التمرين 03: (بكالوريا 2011/ الموضوع الأوّل/ شعبة تسيير وإقتصاد)

يتكوّن مجتمع من 55% نساء و45% رجال، 25% من النساء يتحدثن لغة أجنبية و35% من الرجال يتحدثون أيضا لغة أجنبية.



نختار عشوائيا شخصا من هذا المجتمع ونعتبر الحوادث التالية:

H "رجل"

F "امرأة"

A "رجل يتحدث لغة أجنبية"

B "امرأة تتحدث لغة أجنبية"

1) أنقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثمّ أكملها:

2) احسب احتمال أن يكون الشخص المختار:

أ. "رجلا يتحدث لغة أجنبية"

ب. "امرأة لا تتحدث لغة أجنبية"

ج. "شخصا يتحدث لغة أجنبية"

التمرين 04: (بكالوريا 2011/ الموضوع الثاني/ شعبة تسيير وإقتصاد)

عدد تلاميذ هو 900، يتوزعون حسب المستوى والصنف (داخلي أو خارجي) كما يلي:

المستوى / الصنف	السنة الأولى	السنة الثانية	السنة الثالثة	المجموع
خارجيون	250	200	150	600
داخليون	100	120	80	300

نختار تلميذا بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

1) احتمال أن يكون التلميذ خارجيا.

2) احتمال أن يكون التلميذ من السنة الأولى.

3) احتمال أن يكون التلميذ من السنة الأولى وخارجيا.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين 05: (بكالوريا 2012/ الموضوع الأوّل/ شعبة تسيير وإقتصاد)

(تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال).

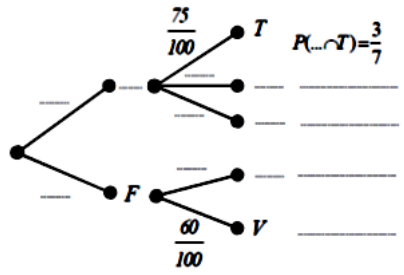
عدد تلاميذ قسم دراسي هو 35 تلميذا من بينهم 15 بنتا. يَختار كل تلميذ من القسم رياضة واحدة وواحدة فقط يمارسها في إطار نشاطات النادي الرياضي للمؤسسة. 75% من الأولاد اختاروا ممارسة كرة القدم و15% اختاروا ممارسة كرة اليد بينما اختار 10% ممارسة الكرة الطائرة. 60% من البنات اختارن ممارسة الكرة الطائرة والبقية اختارن ممارسة كرة اليد. لتمثيل هذا القسم في منافسة رياضية، يتم اختيار تلميذ واحد منه بطريقة عشوائية.

يُرمز G إلى الحادثة "التلميذ المختار ولد"، ويُرمز F إلى الحادثة "التلميذ المختار بنت".

يُرمز T إلى الحادثة "التلميذ المختار يمارس كرة القدم".

يُرمز M إلى الحادثة "التلميذ المختار يمارس كرة اليد".

يُرمز V إلى الحادثة "التلميذ المختار يمارس الكرة الطائرة".



1) انقل الشجرة المقابلة على ورقة الإجابة، ثم أكملها.

2) أُحسب $P(V)$ احتمال أن تتحقق الحادثة V.

3) أُحسب احتمال أن يكون التلميذ المختار لا يمارس كرة القدم.

التمرين 06: (بكالوريا 2012/ الموضوع الثاني/ شعبة تسيير وإقتصاد)

بيّنت دراسة إحصائية لتلاميذ السنة الثالثة ثانوي بإحدى الثانويات أنّ 30% من التلاميذ قدموا من الإكالية A و45% من الإكالية B والبقية من الإكالية C.

بعد اجتياز التلاميذ لامتحان البكالوريا تبيّن ما يلي: نجح في الامتحان 25% من التلاميذ القادمين من الإكالية A و18% من الذين قدموا من الإكالية B و84% من الذين قدموا من الإكالية C.

نختار تلميذا من تلاميذ السنة الثالثة ثانوي بطريقة عشوائية بعد اجتياز امتحان البكالوريا.

يُرمز R إلى الحادثة "التلميذ المختار نجح في الامتحان".

يُرمز A إلى الحادثة "التلميذ المختار قادم من الإكالية A".

يُرمز B إلى الحادثة "التلميذ المختار قادم من الإكالية B".

يُرمز C إلى الحادثة "التلميذ المختار قادم من الإكالية C".

1) أنجز شجرة الاحتمالات التي تُنمذج هذه الوضعية.

2) أثبت أنّ $P(C \cap R) = 0,21$.

3) احسب $P(R)$ احتمال الحادثة R.

التمرين 07: (بكالوريا 2014/ الموضوع الثاني/ شعبة تسيير وإقتصاد)

عيّن مع التبرير الجواب الصحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة في كل حالة من الحالات الآتية:

1) أعضاء الطاقم الصحي لمؤسسة استشفائية موزعين حسب الجدول المقابل،

	أطباء	ممرضون
ذكور	12	25
إناث	08	15

أُختير عشوائيا عضو من هذا الطاقم.

احتمال أن يكون العضو المختار أنثى هو: أ) $\frac{1}{23}$ ب) $\frac{23}{60}$ ج) $\frac{8}{23}$.

2) الجدول المقابل يُعرف قانون احتمال لتجربة عشوائية:

e_i	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,1	0,3

تباين قانون الاحتمال هو: أ) 1,12 ب) 2,5 ج) 1,25.

التمرين 08: (بكالوريا 2017-د2/ الموضوع الثاني/ شعبة تسيير وإقتصاد)

في كل حالة من الحالات الآتية، اقتُرحت ثلاث إجابات واحدة منها فقط صحيحة، عيّن الاقتراح الصّحيح مع التّبرير.

1) A وB حادثتان. إذا كان: $P(A) = 0,4$ و$P(B) = 0,5$ و$P(\overline{A \cup B}) = 0,55$ فإنّ:

أ) $P(A \cap B) = 0,2$ ب) $P(A \cap B) = 0,45$ ج) $P(A \cap B) = 0,9$.

2) الجدول التالي يُعرّف قانون احتمال تجربة عشوائية.

x_i	-2	-1	α	3
$P(X = x_i)$	0,12	0,50	β	0,30

قيمتا α وβ حتّى يكون الأمل الرّياضياتي للمتغيّر العشوائي X يساوي 0,32 هما:

أ) $\alpha = 1$ و$\beta = 0,08$ ب) $\alpha = 2$ و$\beta = 0,03$ ج) $\alpha = 2$ و$\beta = 0,08$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين 09: (بكالوريا 2019/ الموضوع الأول/ شعبة تسيير وإقتصاد)

نرمي نردا غير مزيف ذا ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 مرتين متتاليتين ونسجل الرقم الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة.

1) ما احتمال الحصول على رقمين زوجيين؟

2) ما احتمال الحصول على رقمين جداؤهما يساوي 6؟

3) ما احتمال الحصول على رقمين أحدهما ضعف الآخر؟

4) ما احتمال الحصول على رقمين زوجيين أحدهما هو 2؟

التمرين 10: (بكالوريا 2019/ الموضوع الثاني/ شعبة تسيير وإقتصاد)

1) حل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المعادلة: $(E)...(x^2-5x+6)(4x^2+3x-1)=0$.

2) كيس به أربع كريات تحمل الأرقام 1، 2، 3، 4 نسحب منه كرية واحدة ونرمز بـ p_i إلى احتمال سحب الكرية التي تحمل الرقم i ونضع $p_1=3\alpha^2$، $p_2=\alpha^2$، $p_3=\alpha$ و $p_4=2\alpha$.

-حدد قيمة α.

3) نضع $\alpha=\frac{1}{4}$، احسب احتمال الأحداث التالية:

A :"سحب كرية تحمل رقما فرديا".

B :" سحب كرية تحمل الرقم 4".

C :" سحب كرية تحمل رقما أصغر من أو يساوي 3".

D :" سحب كرية تحمل رقما حلا للمعادلة (E)".

التمرين 11: (الموقع الأوّل للدراسة في الجزائر)

نقترح اللعبة التالية: يدفع اللاعب M دينارا ثمّ يرمي زهر نرد غير مزيف ذات 12 وجها مرقمة من 1 إلى 12. إذا ظهر رقم زوجي يحصل اللاعب على دينارين إثنين. إذا ظهر أحد الأرقام 7، 9، 11 يحصل على ثمانية دنانير. أما إذا ظهر أحد الأرقام 1، 3، 5 فإنّه يحصل على ثلاثة دنانير.

نُعرّف المتغير العشوائي X الذي يأخذ قيمة الربح المحتمل في اللعبة.

1) عيّن القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.

2) عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X.

3) عيّن قيمة M بالدينار المدفوع حتى تكون اللعبة عادلة (الأمل الرياضياتي معدوم).

4) إذا كان $M=4$، هل المشاركة في هذه اللعبة في صالح اللاعب؟

التمرين 12: (الموقع الأوّل للدراسة في الجزائر)

فوج من قسم السنة الثانية يتكون من 3 تلاميذ ذكور و5 إناث، يُراد تكوين لجنة تتكون من ثلاثة أفراد من هذا الفوج.

■ ما هو عدد اللجان الممكن تكوينها؟

1. احسب احتمال الحادثتين: الحادثة A: "أعضاء اللجنة من نفس الجنس"؛ الحادثة B: "أعضاء اللجنة من الجنسين معاً".

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل لجنة عدد الإناث فيها.

أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X.

ب) عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X، ثمّ أحسب أمله الرياضياتي.

التمرين 13: (الموقع الأوّل للدراسة في الجزائر)

كيس به 6 كريات منها 3 حمراء مرقمة بـ 1، 2، 3؛ و2 سوداء مرقمة بـ 2، 3؛ و1 بيضاء مرقمة بـ 3. نسحب عشوائيا وفي آنٍ واحد كريتين من الكيس.

1. بإستعمال مخطط عين جميع الإمكانيات.

2. أحسب احتمال الأحداث التالية:

الحدث A: "سحب كريتين من نفس اللون"،

الحدث B: "سحب كرية حمراء على الأقل"

الحدث C: "سحب كريتين تحملان رقمين مجموعهما مضاعف لـ2"

3) أحسب ما يلي: $P(A\cap B)$، $P(\overline{A})$، و$P(\overline{A\cup C})$.

4. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يُرفق بكل عملية سحب مجموع رقمي الكريتين المسحوبتين.

أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X، ثمّ عرّف قانون احتماله.

ب) أحسب الأمل الرياضياتي والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X.

التمرين 14: (الموقع الأوّل للدراسة في الجزائر)

قررت كل من فاطمة ورقية أن تشتري كل منهما هدية لصديقتهما المشتركة سارة بمناسبة نجاحها في شهادة البكالوريا، وكانتا مترددتان في اختيار نوع هذه

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الهدية، وأخيرا قررا أن يكون اختيارهما بين كتاب (L)، قارورة عطر (P) أو ساعة يد (M).

1)أ- تلقت سارة هديتان من فاطمة ورقية (الترتيب مهم)، مثّل جميع الحالات الممكنة لهذه التجربة العشوائية بواسطة مخطط بالشجرة، ثمّ عيّن المجموعة الشاملة.

ب- نعتبر الأحداث الثلاثة الآتية:

الحدث A: "تلقت سارة ساعتان".

الحدث B: "سارة لم تتلقى أي كتاب".

الحدث C: "على الأقل تلقت سارة قارورة عطر".

- احسب احتمال كل من الأحداث A، B وC.

2) إذا علمت أنّ سعر الكتاب هو $1500DA$ وسعر قارورة العطر هو $1000DA$ وسعر الساعة هو $2000DA$. نرمز بـ X للمتغير العشوائي الذي يُعطينا المبلغ الإجمالي بالدينار الذي تم إنفاقه من طرف الصديقتين.

أ- عيّن القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.

ب- عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X.

ج- احسب الأمل الرياضياتي للمتغير X.

التمرين 15: (الموقع الأوّل للدراسة في الجزائر)

يحتوي كيس على 6 كريات مرقمة من 1 إلى 6 لا نفرق بينها عند اللمس نسحب من الكيس كريتين على التوالي ودون الارجاع.

1) أنشئ مخطط يُبين كلّ الحالات (شجرة الإحتمالات).

2) أحسب احتمال أن تكون الكرية الثانية تحمل الرقم 5.

3) أحسب احتمال أن تكون الكريتان تحملان رقمين أوليين.

4) أعد نفس الأسئلة السابقة الثلاث في حالة السحب مع الإرجاع.

التمرين 16: (الموقع الأوّل للدراسة في الجزائر)

يحتوي كيس على 3 كرات حمراء مرقمة من 1 إلى 3، وكرتين خضراوين مرقمين بـ 4 و5، الكرات جميعا لا نفرق بينها عند اللمس.

الجزء الأول: نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس.

1. احسب احتمال سحب كرة حمراء.
2. احسب احتمال سحب كرة حمراء تحمل رقما فرديا.
3. احسب احتمال سحب كرة تحمل جذرا لكثير الحدود $P(x)$ حيث $P(x) = -x^2 + 7x - 12$.

الجزء الثاني: في لعبة يدفع اللاعب $50DA$ ويسحب عشوائيا كرة من الكيس، يسجل رقمها ثمّ يعيدها ويسحب كرة أخرى، إذا كان جداء الرقمين المسحوبين عددا فرديا يحصل على $80DA$ وإلا خسر ما دفعه.

1. أكمل الجدول المقابل ثمّ استنتج عدد الحالات الممكن.:
2. المتغير العشوائي X يمثل قيم ربح اللاعب.

×	1				
1	1				

أ/ بيّن أنّ قيم المتغير العشوائي X هي 30 و-50.

ب/ عرّف قانون إحتمال المتغير العشوائي X.

ج/ احسب الأمل الرياضياتي والتباين للمتغير العشوائي X.

التمرين 17: (الموقع الأوّل للدراسة في الجزائر)

يوجد في علبة 4 كريات متماثلة $(V;J;B_2;B_1)$، كريتان بيضاوان وواحدة صفراء وواحدة خضراء، نسحب بصفة عشوائية كرية واحدة ونسجل لونها ولا نُرجعها إلى العلبة ثم نسحب كرية أخرى ونسجل لونها.

1)أ- أنجز شجرة الإمكانيات للتّجربة العشوائية.

ب- أحسب احتمال الحادثتين التّاليتين:

A :"الكريتان المسحوبتان بيضاوان"،

B :"الحصول على كرية صفراء على الأقل".

2) نعتبر اللّعبة التّالية: يربح اللاعب 2 دج عند سحب كرية صفراء ويربح 1 دج عند سحب كرية خضراء ويخسر 1 دج عند كل سحب لكرية بيضاء، ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل إمكانية الرّبح (أو الخسارة) المناسب لها.

أ- عيّن قيم المتغيّر العشوائي X.

ب- عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X.

ج- هل اللّعبة في صالح اللاّعب؟ علّل.

د- أحسب الإنحراف المعياري.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين 18: (الموقع الأوّل للدراسة في الجزائر)

نرمي ثلاث مرات متتالية قطعة نقدية متوازنة، نرمز إلى الوجه بالحرف "F"، وإلى الظهر بالحرف "P".

1) شكّل شجرة الإحتمالات وأعط مجموعة النتائج الممكنة Ω، ثمّ عرّف قانون إحتمال هذه التجربة.

2) ما هو احتمال الحصول على الوجه "F" في الرمية الثانية فقط.

3) نستعمل الآن هذه التجربة لإجراء اللعبة التالية: يربح اللاعب 20 نقطة إذا تحصل على ظهر "P"، ويخسر 10 نقاط إذا تحصل على وجه "F"، وليكن X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل إمكانية مجموع النقط المحصل عليها.

أ/ عيّن $X(\Omega)$، ثمّ أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X.

ب/ احسب أمله الرياضياتي، واستنتج إن كانت اللعبة مربحة أم لا.

التمرين 19: (الموقع الأوّل للدراسة في الجزائر)

نرمي قطعة نقدية غير مزيفة ثلاث مرات متتابعة ونسجل الوجه العلوي في كل مرة نرمز الى الوجه بالرمز "F" وإلى الظهر بالرمز "P".

1) عيّن عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة.

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يُرفق بكل ثلاث رميات متتابعة عدد الأوجه "F" الظاهرة.

أ/ بالإستعانة بمخطط مناسب، عيّن قيم المتغير العشوائي X.

ب/ عرّف قانون احتمال X.

ج/ احسب كلا من الأمل الرياضياتي، التباين والانحراف المعياري.

التمرين 20: (الموقع الأوّل للدراسة في الجزائر)

صندوق يحتوي على 3 كرات حمراء وكرتان بيضاوان لا نفرق بينهما عند اللمس، نسحب عشوائيا من هذا الصندوق كرتين على التوالي مع إرجاع الكرة المسحوبة.

1. شكّل شجرة الإمكانيات الموافقة لهذه الوضعية.
2. ما هو عدد الحالات الممكنة لهذا السحب؟
3. أحسب احتمال الحوادث التالية: أ- A :"الكرتان المسحوبتان بيضاوان".

ب- B :"إحدى الكرتين تكون حمراء فقط".

ج- C :"الكرتين المسحوبتين مختلفتين في اللون والكرة المسحوبة الأولى تكون بيضاء".

التمرين 21: (الموقع الأوّل للدراسة في الجزائر)

نرمي زهر نرد غير مزيف أوجهه تحمل الأرقام من 1 إلى 6، ونهتم بالرقم الذي يظهر في الوجه العلوي.

1) نعتبر الحوادث التالية:

A :" الحصول على عدد مضاعف لـ3".

B :"الحصول على عدد أولي".

C :"الحصول على عدد أكبر تماما من 2".

- أحسب: $P(A)$، $P(B)$، $P(C)$، $P(A\cap B)$، $P(A\cup B)$ وَ $P(\overline{A})$.

2) نُعرف اللعبة التالية: اللاعب يربح $30DA$ إذا ظهر رقم أولي، ويخسر $20DA$ إذا ظهر الرقم 6 أو الرقم 4، ويخسر $70DA$ إذا ظهر الرقم 1، وليكن X المتغير العشوائي الذي يُعطي الربح أو الخسارة.

أ/ عيّن القيم الممكنة للمتغير العشوائي X، أي: $X(\Omega)$.

ب/ عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X.

ج/ أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير X، هل اللعبة مربحة؟

د/ أحسب التباين $V(X)$ والإنحراف المعياري $\sigma(X)$.

التمرين 22: (الموقع الأوّل للدراسة في الجزائر)

يحتوي صندوق على 6 كرات لا نفرق بينها باللمس، من بين هذه الكرات كرة تحمل الرقم 2 وكرتان تحملان الرقم 3 وثلاث كرات تحمل الرقم 4.

نسحب عشوائيا كرتين على التوالي دون إرجاع ونسجل في كل مرة رقم الكرة المسحوبة فنتحصل على عدد مُكون من رقمين.

1) مثّل شجرة الإحتمالات.

2) أحسب إحتمال الحوادث التالية: A :"الحصول على عدد فردي"، B :"الحصول على عدد رقم عشراته زوجي".

3) نستعمل الآن هذه التجربة لإجراء اللعبة التالية: يربح اللاعب 10 نقطة إذا تحصل على عدد يشمل رقمين زوجيين و5 نقاط إذا تحصل على عدد يشمل رقما زوجيا واحدًا ويخسر 70 نقطة إذا تحصل على عدد لا يشمل رقما زوجيا. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل إمكانية عدد النقاط المحصل عليها.

أ/ عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ب/ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$، ثم اذكر إن كانت اللعبة في صالح اللاعب.

التمرين 23: (الموقع الأوّل للدراسة في الجزائر)

يحتوي صندوق على 5 قطع نقدية معدنية متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس بحيث توجد: قطعتان من فئة 50 دينار، قطعتان من فئة 20 دينار وقطعة واحدة من فئة 10 دينار؛

نسحب عشوائيا من هذا الصندوق وعلى التوالي قطعتين بحيث لا نعيد القطعة المسحوبة إلى الصندوق.

1- مثّل بمخطط (شجرة) كل الإمكانيات.

2- احسب احتمال الحوادث التالية:

سحب قطعتان من نفس الفئة.

سحب قطعتان من فئتين مختلفتين.

سحب قطعتان مجموعهما 70 دينار.

سحب قطعتان مجموعهما 60 دينار.

التمرين 24: (الموقع الأوّل للدراسة في الجزائر)

- يحتوي كيس على خمس كرات حمراء تحمل الأرقام: 1، 2، 2، 3، 3، وأربع كرات بيضاء تحمل الأرقام: 1، 2، 3، 3 لا نفرق بينها عند اللمس. نسحب عشوائيا من هذا الكيس كرتين على التوالي مع إرجاع الكرة المسحوبة.

1) شكّل شجرة الإحتمالات الموافقة لهذه التجربة في الحالتين: أ/ باعتماد ألوان الكرات، ب/ باعتماد الأرقام المسجلة على الكرات.

2) أحسب إحتمال الحوادث التالية:

A :"الكرتان المسحوبتان بيضاوان".

B :"إحدى الكرتين المسحوبتين فقط حمراء".

C :"الكرتان المسحوبتان تحملان رقمان زوجيان".

D :"لا يظهر الرقم 1".

التمرين 25: (الموقع الأوّل للدراسة في الجزائر)

يضم صندوق 5 كرات متشابهة مرقمة من 0 إلى 4.

1) نسحب على التوالي كرتين بدون إرجاع حيث لا نرجع الكرة الأولى إلى الصندوق ونسجل مجموع رقميهما.

أ/ بيّن أن أصغر وأكبر نتيجتين يُمكن الحصول عليهما هما 1 و7 على الترتيب.

ب/ عيّن المجموعة الكلية Ω (يُمكن إنشاء جدول أو شجرة الاحتمالات).

2)أ/ ما هو عدد الطرق للحصول على 5.

ب/ بين أنّ إحتمال الحصول على 5 هو $\frac{1}{5}$.

ج/ عيّن قانون الاحتمال.

التمرين 26: (الموقع الأوّل للدراسة في الجزائر)

كيس يحتوي 4 كريات بيضاء و3 كريات حمراء وكريتين سوداوين لا نفرق بينها عند اللمس. نسحب بطريقة عشوائية كريتين على التوالي بحيث لا نعيد الكرية المسحوبة قبل السحب الموالي (بدون ارجاع)

نرمز للكرية البيضاء بالرمز B وللكرية الحمراء بالرمز R وللسوداء بالرمز N.

1) شكّل شجرة الاحتمالات.

2) أحسب احتمال الحصول على:

- كريتين من نفس الون.
- الكرية الأولى في السحب سوداء.
- كرية على الأقل حمراء.

3) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية السحب عدد الكريات الحمراء.

- عيّن قيم المتغير العشوائي X.
- عرّف قانون الاحتمال للمتغير X.
- أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير X.

التمرين 27: (الموقع الأوّل للدراسة في الجزائر)

يحتوي كيس على 2 كريات بيضاء و2 كريات خضراء وكرية واحدة سوداء لانفرق بينها باللمس.

I) يسحب اللاعب من الكيس كريتين على التوالي وبدون إرجاع.

1. أنشىء مخططا يُبين كل الحالات الممكنة.

2. عيّن مجموعة الإمكانيات، ثمّ عرّف قانون الإحتمال عليها.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

3. أحسب احتمال الحصول على:
- كريتين من نفس اللون.
- كريتين مختلفتين في اللون.
- الكرية الأولى خضراء.

II) يربح اللاعب $2x$ عند سحب كرية سوداء، x عند سحب كرية بيضاء، و-1 عند سحب كرية خضراء. X عدد طبيعي غير معدوم.

نعتبر لمتغير العشوائي X الذي يُرفق بكل سحب جداء الربح المحصل عليه عند كل سحب.

1. عيّن جميع القيم الممكنة للربح بدلالة بدلالة x.
2. عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X.

التمرين 28: (الموقع الأوّل للدراسة في الجزائر)

قسم 2 علوم تجريبية به 17 تلميذا، 11 ذكر و6 إناث من بينهم صفاء وَأسامة (يوجد بنت وحيدة إسمها صفاء وولد وحيد إسمه أسامة).

نريد تشكيل لجنة مكونة من رئيس ونائبه لذا نختار تلميذين بصفة عشوائية (اللجنة تُشكّل بهذا الترتيب: الرئيس ثمّ النائب).

1. عيّن عدد إمكانيات هذه التجربة.
2. شكّل شجرة الإحتمالات.
3. ما إحتمال أن تكون:
أ/ "لجنة مكونة من ذكرين".
ب/ "لجنة مكونة من ذكر وأنثى".
ج/ "لجنة رئيسها أسامة".
د/ "لجنة نائبتها صفاء".

التمرين 01:

نص التمرين

حلول تمارين الإحتمالات// التحضير الجيد للبكالوريا// 2 علوم تجريبية؛ 2 تقني رياضي.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com