الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

التمرين رقم 01 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

2) نعتبر النقطتين A , B التي لا حقتاهما على الترتيب $z_A=4\sqrt{3}-4i$ و $z_B=4\sqrt{3}+4i$.

أ) أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي.

ب) أحسب الأطوال OA, OB, AB واستنتج طبيعة المثلث OAB.

3) لتكن النقطة C التي لاحقتها $z_C=-\sqrt{3}+i$ ، وليكن الدوران r الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$. عين اللاحقة z_D للنقطة D صورة C بالدوران r.

4) نسمي G مرجح الجملة المثقلة $\{(O,-1),(D,+1),(B,+1)\}$

أ) تحقق من وجود G وبين أن لاحقتها $z_G=4\sqrt{3}+6i$.

ب) علّم النقط A , B , C , D , G في شكل .

ت) بين أن الرباعي $OBGD$ متوازي أضلاع.

5) ما هي طبيعة المثلث AGC ؟

حل التمرين رقم 01:

1) نحل المعادلة $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$ باستعمال المميز نجد

$\Delta=64\times3-64\times4=-64=64i^2$ والمعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين :

$$S=\{4\sqrt{3}-4i\ ;\ 4\sqrt{3}+4i\}$$

2) أ) $z_A=4\sqrt{3}-4i$ ، $|z_A|=8$ نستطيع الكتابة $z_A=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=8e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_B=4\sqrt{3}+4i$ ، $|z_B|=8$ نستطيع الكتابة $z_A=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=8e^{i\frac{\pi}{6}}$

ب)لدينا $AB=|z_B-z_A|=|8i|=8$, $OB=|z_B|=8$, $OA=|z_A|=8$

إذن المثلث OAB متقايس الأضلاع.

3) $z_D=\left(-\sqrt{3}+i\right)e^{-i\frac{\pi}{3}}=\left(-\sqrt{3}+i\right)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2i$

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

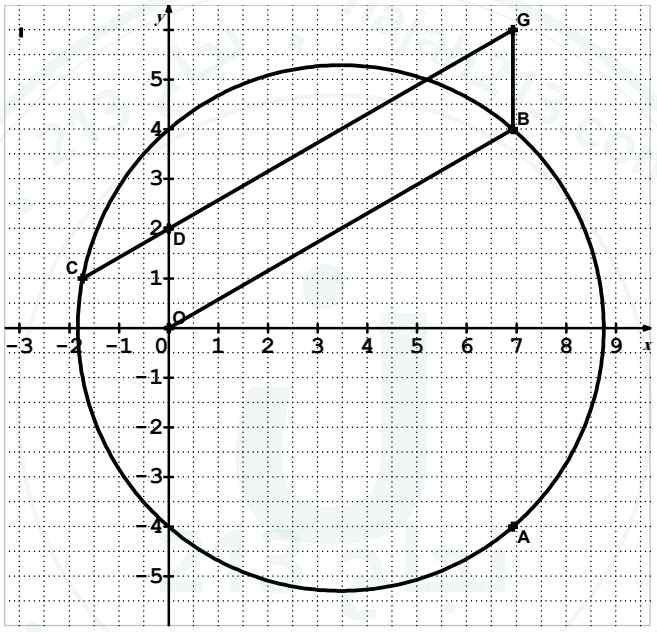
4)أ) مجموع المعاملات يساوي 1 وهو غير معدوم إذن النقطة G موجودة. بالتعريف لدينا :

$-\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ تكافئ $z_G=\dfrac{-z_O+z_D+z_B}{-1+1+1}=4\sqrt{3}+6i$

ب) لإنشاء A و B نستعمل الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 8.و لإنشاء C و D نستعمل الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2.

ت) لدينا $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{OD}$ ومنه $OBGD$ متوازي أضلاع.

5) نجد بسرعة $GA=CA=CG=10$ وبالتالي ACG متقايس الأضلاع.



التمرين رقم 02:

معادلة من الدرجة الثالثة ـــ دراسة $Z=\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ **ـــ المرجح ـــ مجموعة النقط**

بحيث $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$

1) نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة C كثير الحدود $P(z)=z^3-12z^2+48z-128$

أ)بين أن $P(z)$ يكتب على الشكل $P(z)=(z-8)(\alpha z^2+\beta z+\gamma)$ حيث $\alpha\ ,\beta\ ,\gamma$ أعدادا حقيقية يطلب تعيينها.

ب) حل في C المعادلة $P(z)=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس ، نعتبر النقط $A\ ,B\ ,C$ التي لواحقها على الترتيب هي : $z_A=2-2\sqrt{3}i$, $z_B=2+2\sqrt{3}i$, $z_C=8$

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

أ) أحسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $z_A = 2 - 2\sqrt{3}\,i$. علّم النقط $A\ ,\ B\ ,\ C$.

ب) أحسب $Z = \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ ثم عين الطويلة وعمدة لـ Z ، واستنتج طبيعة المثلث ABC

ت)عين إحداثيي النقطة D مرجح الجملة $\{(A,|z_A|),(B,|z_B|),(C,|z_C|)\}$ ثم علم النقطة D.

ج) عين مجموعة النقط E للنقط M من المستوي بحيث :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|.$$

حل التمرين رقم 02:

1) أ) بما أن $P(8)=0$ فإن 8 هو جذر لكثير الحدود P فهو إذن يُحلّل على الشكل التالي :

$$P(z)=(z-8)(\alpha z^2+\beta z+\lambda)$$

بعد النشر والتبسيط نجد : $\alpha=1\ ,\ \beta=-4\ ,\ \gamma=16$ وبالتالي

$$P(z)=(z-8)(z^2-4z+16)$$

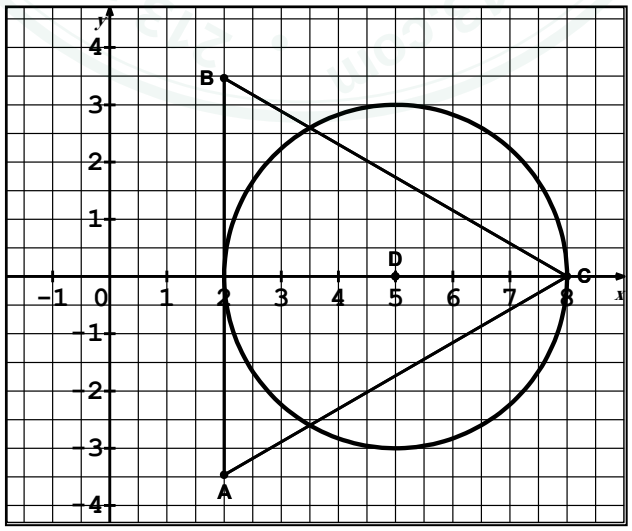
ب) $P(z)=0$ يكافئ $z=8$ أو $z^2-4z+16=0$.

حلا المعادلة $z^2-4z+16=0$ هما : $z_1=2-2i\sqrt{2}$ ، $z_2=2+2i\sqrt{2}$.

مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي $\{8\ ,\ 2-2i\sqrt{2}\ ,\ 2+2i\sqrt{2}\}$.

2) أ) $|z_A|=\left|2-2i\sqrt{2}\right|=4$ ، $z_A=4\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=4\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

ونستنتج أن $-\dfrac{\pi}{3}$ هي عمدة للعدد المركب $z_A=2-2i\sqrt{2}$.



الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

ب) $Z=\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\dfrac{2-2i\sqrt{3}-8}{2+2i\sqrt{3}-8}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $|Z|=1$ و $\dfrac{\pi}{3}$ عمدة للعدد المركب Z ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع .

ت) لدينا : $|z_A|=4$ ، $|z_B|=4$ ، $|z_C|=8$ ، D مرجح الجملة $\{(A,4),(B,4),(C,8)\}$

أو كذلك D مرجح الجملة $\{(A,1),(B,1),(C,2)\}$.

ويكون لدينا : $z_D=\dfrac{z_A+z_B+2z_C}{4}=5$ ومنه $D(5,0)$.

ج) بما أن D مرجح الجملة $\{(A,1),(B,1),(C,2)\}$ فإن $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MD}$

ومن أجل كل نقطة M لدينا :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$$

وبالتالي $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$

يكافئ $\left\|4\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right\|$ أو $\left\|\overrightarrow{MD}\right\|=\dfrac{1}{4}\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right\|$

ولكن $\dfrac{1}{4}\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right\|=3$ ومنه مجموعة النقط E هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها 3.

التمرين رقم 03 :

P كثير حدود معرف في مجموعة الأعداد المركبة $\boldsymbol{C}$ كما يلي : $P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$.

1. بين أنه يوجد ثلاث أعداد $a;b;c$ يطلب تعيينها بحيث من أجل كل عدد مركب z لدينا :

$$P(z)=\left(z^2+3\right)\left(az^2+bz+c\right)$$

2. حل في $\boldsymbol{C}$ المعادلة $P(z)=0$.
3. المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

أنشئ النقط A ، B ، C ، D التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=i\sqrt{3}$ ، $z_B=-i\sqrt{3}$ ، $z_C=3+2i\sqrt{3}$ ، $z_D=\overline{z_C}$.

بين أن هذه النقط الأربعة تنتمي إلى نفس الدائرة يُطلب تحديد مركزها ونصف قطرها .

4. لتكن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة إلى O. ما هي طبيعة المثلث BEC ؟

حل التمرين رقم 03 :

$P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63.$

1) $\left(z^2+3\right)\left(az^2+bz+c\right)=az^4+bz^3+(3a+c)z^2+3bz+3c$ بالمطابقة نجد :

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

$a=1\,;b=-6\,;c=21$ ومنه $P(z)=\left(z^2+3\right)\left(z^2-6z+21\right)$.

2) $P(z)=0$ يكافئ : $\left(z^2+3\right)=0$ أو $\left(z^2-6z+21\right)=0$.

- حلا المعادلة $\left(z^2+3\right)=0$ هما $i\sqrt{3}$ و $-i\sqrt{3}$
- حلا المعادلة $\left(z^2-6z+21\right)=0$ هما $3+2i\sqrt{3}$ و $3-2i\sqrt{3}$

وأخيرا حلول المعادلة $P(z)=0$ هي : $i\sqrt{3}$ ، $-i\sqrt{3}$ ، $3+2i\sqrt{3}$ و $3-2i\sqrt{3}$.

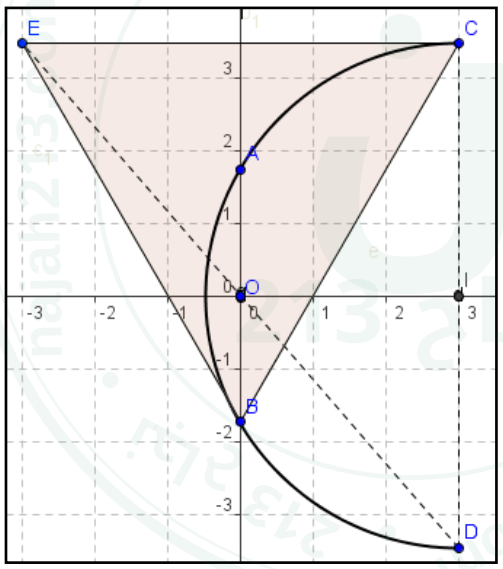
3) نبين أن النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها $I(3,0)$

$AI^2=\left|3-i\sqrt{3}\right|^2=9+3=12$. $BI^2=\left|3+i\sqrt{3}\right|^2=9+3=12$

$CI^2=\left|2i\sqrt{3}\right|^2=12$ ، $DI^2=\left|-2i\sqrt{3}\right|^2=12$

نستنتج أن: $AI=BI=CI=DI=2\sqrt{3}$

وهذا يعني أن النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها $I(3,0)$



ونصف قطرها $2\sqrt{3}$.

4) بما أن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة إلى O فإن :

$z_E=-z_D=-3+2i\sqrt{3}$

نحسب أطوال القطع المستقيمة : BC ; EC ; BE

$BE=\left|z_E-z_B\right|=\left|-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right|=\left|-3+3i\sqrt{3}\right|=\sqrt{36}=6$

$EC=\left|z_C-z_E\right|=\left|3+2i\sqrt{3}+3-2i\sqrt{3}\right|=6$

$BC=\left|z_C-z_B\right|=\left|3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right|=\left|3+3i\sqrt{3}\right|=\sqrt{36}=6$

najah213.com · نجاح 213

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

وبالتالي $BE=EC=BC$ ومنه المثلث BEC متقايس الأضلاع.

التمرين رقم 04 :

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أنشئ النقط A ، B ، I التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=3+2i$ ، $z_B=-3$ ، $z_I=1-2i$.

1) علم النقط السابقة في المعلم ثم نكمل ين.

ل في بقية التمر $Z=\dfrac{z_I-z_A}{z_I-z_B}$. ما هي طبيعة المثلث IAB ؟.

2) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب

3) أحسب اللاحقة Z_C للنقطة C ، صورة النقطة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2.

4) لتكن النقطة D مرجح الجملة $A,1\ ;B(,-1);C(,1)$ أحسب اللاحقة z_D للنقطة D.

5) بين أن $ABCD$ مربع.

6) عين وانشئ Γ_1 مجموعة النقط M من المستوي بحيث :

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

7) لتكن Γ_2 مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$

- بين أن النقطة B تنتمي إلى Γ_2.
- عين وانشئ Γ_2.

حل التمرين رقم 04 :

2) $Z=\dfrac{z_I-z_A}{z_I-z_B}=\dfrac{(1-2i)-(3+2i)}{(1-2i-(-3)}=\dfrac{-2-4i}{4-2i}=-i$

لدينا من جهة : $\dfrac{z_I-z_A}{z_I-z_B}=-i$ وبالتالي : $\left|\dfrac{z_I-z_A}{z_I-z_B}\right|=\dfrac{AI}{BI}=|-i|=1$ أي $AI=BI$

ولدينا من جهة أخرى : $\dfrac{z_I-z_A}{z_I-z_B}=-i$ وبالتالي : $\arg\left(\dfrac{z_I-z_A}{z_I-z_B}\right)=\arg\ -i\ =-\dfrac{\pi}{2}$ أي

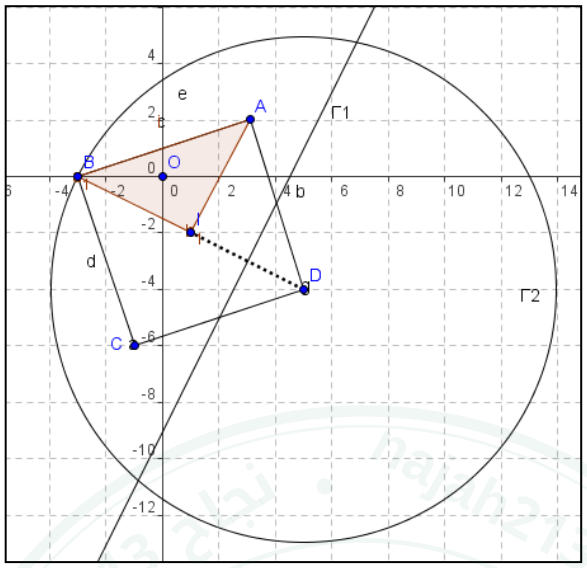
$\overrightarrow{IA}\perp\overrightarrow{IB}$

إذن المثلث IAB قائم في I ومتساوي الساقين .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة



3) لاحقة النقطة C

C صورة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 معناه $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$ أي

$z_C-z_A=2(z_I-z_A)$

ومنه $z_C=z_A+2(z_I-z_A)$ أي $z_C=3+2i+2(1-2i-3-2i)=-1-6i$.

4) النقطة D مرجح الجملة $A,1\ ;B(\ ,\ 1);C(,1)$ معناه $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ أي

$(z_A-z_D)-(z_B-z_D)+(z_C-z_D)=0$ ومنه: $-z_D+z_A-z_B+z_C=0$ وبالتالي

$z_D=z_A-z_B+z_C=\ 3+2i\ -\ -3\ +\ -1-6i\ =5-4i$

5) طبيعة $ABCD$.

لاحقة $\overrightarrow{AB}$ هي $z_B-z_A=-3-\ 3+2i\ =-6-2i$

لاحقة $\overrightarrow{DC}$ هي $z_C-z_D=\ -1-6i\ -\ 5-4i\ =-6-2i$ ومنه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ إذن

$ABCD$ متوازي الأضلاع. بالإضافة إلى ذلك :

لاحقة $\overrightarrow{AD}$ هي $z_D-z_A=\ 5-4i\ -\ 3+2i\ =2-6i$

بما أن $i^2=-1$ يمكن كتابة $z_D-z_A=2-6i$ على الشكل

$z_D-z_A=i\ -6-2i\ =i(z_B-z_A)$

أي $z_D-z_A=e^{i\frac{\pi}{2}}\ z_B-z_A$ وهذا يعني أن النقطة D هي صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$. وأخيرا $ABCD$ متوازي الأضلاع فيه ضلعان متتاليان متقايسان ومتعامدان فهو إذن مربع.

6) Γ_1 مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$

لدينا : $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}$ لأن D مرجح الجملة $A,1\ ;B(,-1);C(,1)$

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

وكذلك $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MJ}$ حيث J هو منتصف القطعة المستقيمة AC إذن :

$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MD}\right\|=\frac{1}{2}\left\|2\overrightarrow{MJ}\right\|$ أي $\left\|\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|\overrightarrow{MJ}\right\|$

ولدينا لاحقة J هي : $z_J=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{3+2i\ -1-6i}{2}=1-2i=z_I$ إذن I هي منتصف AC

$\left\|\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|\overrightarrow{MJ}\right\|$ تكافئ إذن $MD=MI$ وأخيرا مجموعة النقط Γ_1 هي محور القطعة المستقيمة ID.

7) B تنتمي إلى Γ_2 مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$

نعوض M بالنقطة B فنجد في الطرف الأول : $\left\|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BD}\right\|$

لأن $ABCD$ مربع فهو متوازي أضلاع.ولكن

$\left\|\overrightarrow{BD}\right\|=|z_D-z_B|=|5-4i\ +3|=|8-4i\,|=4\sqrt{5}$

ومنه B تنتمي إلى Γ_2.

- تعيين Γ_2: $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MD}\right\|=MD=4\sqrt{5}$ لأن D مرجح الجملة $A,1\ ;B(,-1);C(,1)$ وبالتالي Γ_2 هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $4\sqrt{5}$.

التمرين رقم 05 :

A,B,C ، D نقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، لواحقها على الترتيب

$z_A=2+3i\sqrt{3}$ ، $z_B=-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_C=-4-3i\sqrt{3}$ ، $z_D=-2+i\frac{\sqrt{3}}{3}$

1. بين أن الرباعي $ABCD$ هو متوازي الأضلاع.
2. بين أن $\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}$ تخيلي صرف.
3. استنتج طبيعة متوازي الأضلاع $ABCD$.

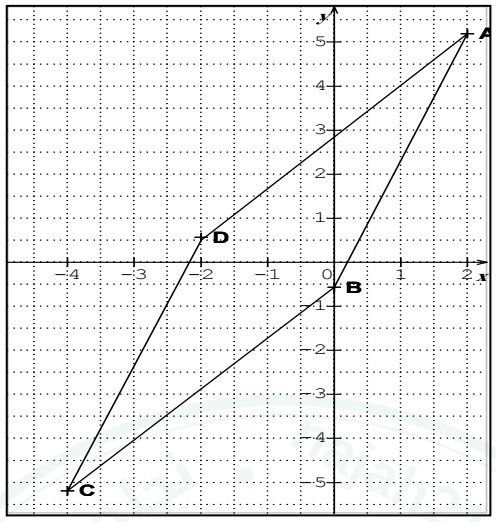
حل التمرين رقم 05:

1. $ABCD$ متوازي الأضلاع معناه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=-i\frac{\sqrt{3}}{3}-2-3i\sqrt{3}=-2-i\frac{10\sqrt{3}}{3}$

$z_{\overrightarrow{DC}}=z_C-z_D=-4-3i\sqrt{3}+2-i\frac{\sqrt{3}}{3}=-2-i\frac{10\sqrt{3}}{3}$

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة



ومنه $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ أي $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ إذن $ABCD$ هو متوازي الأضلاع.

2. $\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = \dfrac{-2 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3} - \left(-i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)}{-4 - 3i\sqrt{3} - \left(2 + 3i\sqrt{3}\right)} = \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{9 + 9i\sqrt{3}} = \dfrac{-i\sqrt{3}}{9}$

ومنه $\arg\left(\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) = \dfrac{-\pi}{2} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$، أي أن $(AC) \perp (BD)$.

وبالتالي الشكل $ABCD$ معين (القطران متعامدان)

التمرين رقم 06:

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

تُعطى النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب :

$z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = -\sqrt{3} + i$ ، $z_C = -2i$.

1) أنشئ النقط A ، B ، C.

2) أكتب على الشكل المثلثي كلا من z_A ، z_B ، z_C.

3) ليكن z_0 عدد مركب بحيث $z_0 = 1 + i$.أكتب على الشكل الجبري كلا من :

$m = z_A \times z_0; n = z_B \times z_0; p = z_C \times z_0$.

4) أكتب على الشكل المثلثي العدد المركب z_0.

5) إستنتج الشكل المثلثي لكل من الأعداد المركبة $m;n;p$.

6) أنشئ النقط $M;N;P$ التي لواحقها على الترتيب $m;n;p$.

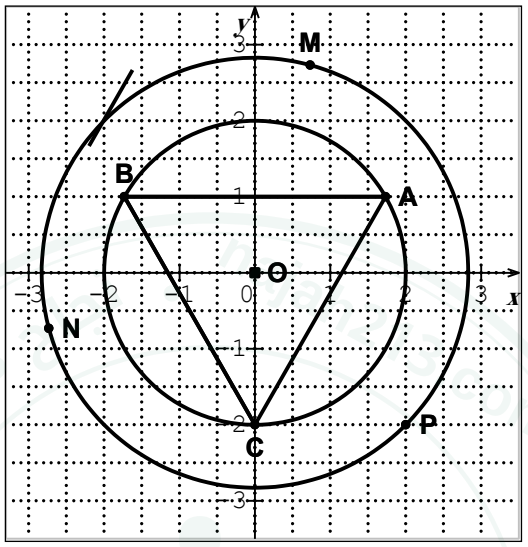
7) أحسب الأطوال $AB;BC;CA$ و ما هي طبيعة المثلث ABC ؟.

حل التمرين رقم 06:

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

1) $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=-\sqrt{3}+i$ ، $z_C=-2i$.

2) $z_A=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ، $z_B=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ ، $z_C=2\left(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2}\right)$.



3) الشكل الجبري لـ : $m=z_A\times z_0;n=z_B\times z_0;p=z_C\times z_0$.

$$m=z_A\times z_0=\left(\sqrt{3}+i\right)(1+i)=\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)$$

$$n=z_B\times z_0=\left(-\sqrt{3}+i\right)(1+i)=\left(-\sqrt{3}-1\right)+i\left(-\sqrt{3}+1\right)$$

$$p=z_C\times z_0=(-2i)(1+i)=2-2i$$

4) الشكل المثلثي للعدد z_0.

$z_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

6)الشكل المثلثي لكل من $m;n;p$.

لدينا سابقا : $m=z_A\times z_0;n=z_B\times z_0;p=z_C\times z_0$

$$m=z_A\times z_0=z_A=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$n=z_B\times z_0=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$$

$$p=z_C\times z_0=2\left(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2}\right)\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

$$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+i\ \sin\cos\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\ \sin\frac{-\pi}{4}\right)$$

7) حساب الأطوال $AB;BC;CA$

$$AB = |z_B - z_A| = |-2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |-3i+\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$ ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع.

$$CA = |z_A - z_C| = |3i+\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

التمرين رقم 07:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A , B , C التي لواحقها على الترتيب هي : $z_A = 2$, $z_B = 1+i\sqrt{3}$, $z_C = 1-i\sqrt{3}$.

أولا :

أ) أعط الشكل الأسي لكل من $z_B = 1+i\sqrt{3}$, $z_C = 1-i\sqrt{3}$.

ب) أنشئ النقط A , B , C.

ت) عين طبيعة الرباعي $OBAC$.

ج) عين وانشئ مجموعة النقط (D) للنقط M ذات اللاحقة z من المستوي بحيث : $|z| = |z-2|$.

ثانيا :

بكل نقطة M ذات اللاحقة z حيث $z \neq z_A$ نرفق النقطة M' ذات اللاحقة $z' = \dfrac{-4}{z-2}$.

1) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $z = \dfrac{-4}{z-2}$.

ب) استنتج النقط المرفقة بالنقطتين B و C .

ت) عين وانشئ النقطة G' المرفقة بالنقطة G بمركز ثقل المثلث OAB.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد مركب z المختلف عن 2 ، $|z'-2| = \dfrac{2|z|}{|z-2|}$.

ب) نفرض أن M تنتمي إلى (D) ((D) المجموعة المعرفة في الفقرة الأولى).

بين أن النقطة M' المرفقة بالنقطة M تنتمي إلى دائرة (Γ) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها . أنشئ (Γ).

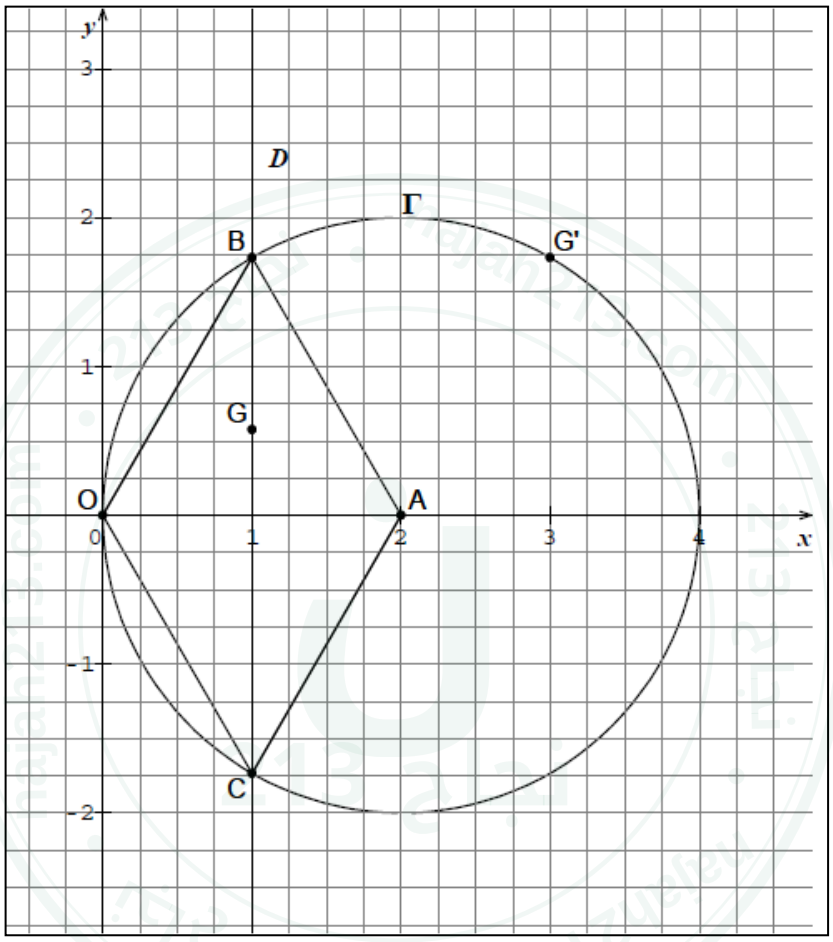
حل التمرين رقم 07:

اولا :

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

1) لدينا $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ ، $|z_B| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$ ومنه

$z_B = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ وبما أن $z_C = \overline{z_B}$ فإن $z_C = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$



ت)

لدينا من جهة : $z_B - z_O = z_B$ و $z_A - z_C = 2 - 1 + i\sqrt{3} = z_B$ ومنه $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA}$ إذن $OBAC$ متوازي أضلاع.

ولدينا من جهة أخرى $|z_B| = |z_C|$ أي $OB = OC$.

$OBAC$ متوازي أضلاع وفيه ضلعين متتابعين لهما نفس الطول فهو إذن معين.

ج) تعيين وإنشاء مجموعة النقط (D) بحيث : $|z| = |z-2|$.

$M \in (D)$ تكافئ $|z| = |z-2|$ أي $OM = AM$ وهذا يكافئ أن النقطة M تنتمي إلى محور القطعة المستقيمة $[OA]$.

مجموعة النقط (D) للنقط M بحيث : $|z| = |z-2|$ هي محور القطعة المستقيمة $[OA]$.

ثانيا :

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

1)أ) نحل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $z=\dfrac{-4}{z-2}$.

من أجل $z\neq z_A$ ، $z=\dfrac{-4}{z-2}$ تكافئ $z(z-2)=-4$ أي $z^2-2z+4=0$

نحل هذه المعادلة فنجد $z_B=1+i\sqrt{3}$ ، $z_C=1+i\sqrt{3}$.

ب) نستنتج أن النقطتين المرفقتين بالنقطتين B و C هما B و C .

ت) اللاحقة z_G لمركز ثقل المثلث OAB هي : $z_G=\dfrac{1}{3}\left(z_0+z_A+z_B\right)=1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ومنه $z_{G'}=\dfrac{-4}{z_G-2}=\dfrac{-4}{1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}-2}=3+i\sqrt{3}$

2) أ) نبين أنه من أجل كل عدد مركب z المختلف عن 2 ، $|z'-2|=\dfrac{2|z|}{|z-2|}$.

$$|z'-2|=\left|\frac{-4}{z-2}-2\right|=\left|\frac{-4-2z+4}{z-2}\right|=\left|\frac{-2z}{z-2}\right|=\frac{2|z|}{|z-2|}$$

ب) $M\in(D)$ تكافئ $|z|=|z-2|$ وتكافئ $\dfrac{|z|}{|z-2|}=1$ وحسب ما سبق كذلك تكافئ

$\dfrac{|z'-2|}{2}=1$

أي $|z'-2|=2$ أو $AM'=2$ أي M' تنتمي إلى دائرة مركزها A ونصف قطرها 2.

التمرين رقم 08:

في كل سؤال توجد 4 تأكيدات: واحدة فقط صحيحة عينها مع التعليل

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) n عدد طبيعي ، يكون العدد المركب $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ تخيليا صرفا إذا وفقط إذا كان n يكتب على الشكل :

أ) $n=6k+1$ ، ب) $n=6k+2$ ، ت) $n=6k+3$ ، ج) $n=6k$.

2) A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : $z_A=i$ ، $z_B=\sqrt{3}$. أحد أقياس الزاوية $\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)$ هو :

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

أ) $-\frac{5\pi}{6}$ ، ب) $\frac{\pi}{6}$ ، ت) $\frac{47\pi}{6}$ ، ج) $\frac{5\pi}{6}$.

3) لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ هي :

أ) $z_C=-i$ ، ب) $z_C=2i$ ، ت) $z_C=\sqrt{3}+i$ ، ج) $z_C=\sqrt{3}+2i$

4) مجموعة النقط M ذات اللاحقة $z=x+iy$ والتي تحقق $|z-1|=|z+i|$ هي المستقيم الذي معادلته :

أ) $y=x-1$ ، ب) $y=-x$ ، ت) $y=-x+1$ ، ج) $y=x$

حل التمرين رقم 08:

1) التأكيدة ت) $n=6k+3$ هي الصحيحة : التعليل

$\left(\sqrt{3}+i\right)^n=\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n=2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$ يكون تخيليا صرف إذا

كان $\cos\frac{n\pi}{6}=0$ تكافئ $\frac{n\pi}{6}=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ومنه $n=6k+3$.

2) التأكيدة ت) $\frac{47\pi}{6}$ هي الصحيحة : التعليل

مع العلم أن $\left(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{AB}\right)=\arg(z_B-z_A)=\arg\left(\sqrt{3}-i\right)=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$

$\frac{47\pi}{6}=\frac{48\pi-\pi}{6}=8\pi-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2(4)\pi$.

3) التأكيدة ج) $z_C=\sqrt{3}+2i$ هي الصحيحة . التعليل :

ومنه $z_C-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_A)$

$z_C=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_A)+z_A=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)+i=\sqrt{3}+2i$.

4) التأكيدة ب) $y=-x$ هي الصحيحة . التعليل :

$|z-1|=|z+i|$ تكافئ $|z-z_D|=|z-z_E|$ حيث $z_E=-i$, $z_D=1$.

$|z-z_D|=|z-z_E|$ تكافئ $MD=ME$ إذن $y=-x$.

التمرين رقم 09

يوجد في كل سؤال جواب واحد فقط صحيح. عين هذا الجواب الصحيح بدون تبرير.

1) حل المعادلة $2z+\overline{z}=9+i$ هو :

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

أ) 3 ، ب) i ، ت) $3+i$

2) z عدد مركب. $|z+i|$ تساوي :

أ) $|z|+1$ ، ب) $|z-1|$ ، ت) $|i\bar{z}+1|$

3) z عدد مركب غير معدوم عمدته θ. عمدة العدد المركب $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ هي :

أ) $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$ ، ب) $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ ، ت) $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$

4) n عدد طبيعي .يكون العدد المركب $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ تخيليا صرفا إذا وفقط إذا كان :

أ) $n=3$ ، ب) $n=3+6k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ، ت) $n=6k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

5) A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب هما i و -1. مجموعة النقط M التي لاحقتها $z=x+iy$ والتي تحقق $|z-i|=|z+1|$ هي :

أ) المستقيم (AB) ، ب) الدائرة التي قطرها $[AB]$ ، ت) المستقيم العمودي على (AB) المار من المبدأ O.

6) Ω النقطة ذات اللاحقة $1-i$. مجموعة النقط M التي لاحقتها $z=x+iy$ والتي تحقق $|z-1+i|=|3-4i|$ معادلتها هي :

أ) $y=-x+1$ ، ب) $(x-1)^2+y^2=\sqrt{5}$ ، ت) $z=1-i+5e^{i\theta}$ حيث $\theta\in\mathbb{R}$

7) A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب هما 4 و $3i$. لاحقة النقطة C بحيث يكون المثلث ABC متساوي الساقين مع $\left(\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ هي :

أ) $1-4i$ ، ب) $-3i$ ، ت) $7+4i$

8) مجموعة حلول المعادلة $\dfrac{z-2}{z-1}=z$ في $\mathbb{C}$ هي :

أ) $\{1-i\}$ ، ب) مجموعة خالية ، ت) $\{1-i\ ,\ 1+i\}$

حل التمرين رقم 09:

السؤال رقم	1	2	3	4	5	6	7	8
الجواب رقم	ت	ت	ب	ب	ت	ت	أ	ت

التمرين رقم 10 :

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O\ ,\vec{u}\ ,\vec{v}\right)$. الوحدة $1cm$.

نعتبر النقط $A\ ,\ B\ ,\ S\ ,\ \Omega$ التي لواحقها على الترتيب هي :

$z_A=-2+4i\ ,\ z_B=-4+2i\ ,\ z_S=-5+5i\ ,\ z_\Omega=-2+2i$

1) أوجد الشكل المثلثي لكل من $z_B\times z_A$; $z_\Omega\times z_S$.

2) نسمي C و D النقطتان بحيث $\overrightarrow{SC}=3\overrightarrow{SA}$ و $\overrightarrow{SD}=3\overrightarrow{SB}$.

بين أن لاحقة النقطة C هي $z_C=4+2i$ ولاحقة النقطة D هي $z_D=-2-4i$

3) بين أن النقط $A\ ,\ B\ ,\ C\ ,\ D$ تنتمي إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

4) أ) عين مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z والتي تحقق

$|z+2-4i|=|z+4-2i|$.

ب)بين أن المستقيم $(S\Omega)$ هو محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

5) لتكن H منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$. عين $Arg\left(\frac{z_\Omega-z_H}{z_D-z_B}\right)$ واستنتج قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{BD}\ ,\overrightarrow{H\Omega}\right)$.

حل التمرين رقم 10

1) $z_B\times z_A=(-2+4i)(-4+2i)=-20i$

إذن $z_B\times z_A=20\left(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2}\right)$

ومنه $z_\Omega\times z_S=(-2+2i)(-5+5i)=-20i$

$z_\Omega\times z_S=20\left(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2}\right)$

2) $\overrightarrow{SC}=3\overrightarrow{SA}$ تكافئ $z_C-z_S=3(z_A-z_S)$ ومنه $z_C=3z_A-2z_S=4+2i$

$\overrightarrow{SD}=3\overrightarrow{SB}$ تكافئ $z_D-z_S=3(z_B-z_S)$ ومنه $z_D=3z_B-2z_S=-2-4i$

3) نتحقق بسهولة أن $OA=OB=OC=OD=|z_A|=|z_B|=|z_C|=|z_D|=\sqrt{20}$

ومنه النقط $A\ ,\ B\ ,\ C\ ,\ D$ تنتمي إلى دائرة مركزها O و نصف قطرها $\sqrt{20}$.

4)أ) $|z+2-4i|=|z+4-2i|$ تكافئ $|z-(-2+4i)|=|z-(-4+2i)|$ تكافئ

$|z-z_A|=|z-z_B|$ ومجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

الأعداد المركبة : 10 تمارين نماذج بكالوريا محلولة

ب) لدينا $\overrightarrow{S\Omega}(3,-3)$ و $\overrightarrow{AB}(-2,-2)$ متعامدان لان الجداء السلمي لهما يساوي صفر هذا من جهة و من جهة اخرى $I(-3,3)$ تنتمي غلى المستقيم $(S\Omega)$. ومنه $(S\Omega)$ هو محور القطعة المستقيمة $[AB]$

5) لتكن النقطة $H(2,3)$ منتف القطعة المستقيمة $[AC]$ ونكتب $z_H = 1+3i$

$$Arg\left(\frac{z_\Omega - z_H}{z_D - z_B}\right) = \frac{-2+2i\ -1-3i}{-2-4i\ +4-2i} = \frac{-3-i}{2-6i} = -\frac{1}{2}i$$

ومنه $Arg\left(\frac{z_\Omega - z_H}{z_D - z_B}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

$$Arg\left(\frac{z_\Omega - z_H}{z_D - z_B}\right) = \left(\overrightarrow{BD}\ ,\overrightarrow{H\Omega}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً