najah213.com · نجاح 213

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الحسن ابن الهيثم النزلة — المستوى : 3 ثانوي

الأستاذ: بوقفة عبد الفتاح — شعبة : ع ت - ت ر - ر

الملخص الشامل في الأعداد المركبة

الرياضيات ليست إبرة تحقن في جسمك في بداية السنة لتصبح ممتازا فيها

الرياضيات = حبها + التركيز + المرافقة اليومية

1 الأعداد المركبة

تعريف : نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل $z = x + iy$ ، حيث x و y عددان حقيقيان و $i^2 = -1$

ملاحظات وترميز : نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ : $\mathbb{C}$

$$Z = \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$$

$\boldsymbol{x}$: الجزء الحقيقي $Re(z)$ — $\boldsymbol{y}$: الجزء التخيلي $Im(z)$

- إذا كان $y = 0$ ، فإن العدد z حقيقي .
- إذا كان $x = 0$ ، فإن العدد z تخيلي صرف .
- يكون z معدوما إذا وفقط إذا كان جزؤه الحقيقي معدوما وجزؤه التخيلي معدوما
- يتساوى عددان مركبان z و z' إذا وفقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي ونفس الجزء التخيلي

تمرين : z عدد المركب حيث : $z = (x^2 + x) + i(x^2 + y - 1)$

عين العددين الحقيقين x و y حتى يكون العدد المركب z معدوما

الحل :

$z = 0$ معناه $x^2 + x = 0$ و $x^2 + y - 1 = 0$ ، أي $x(x + 1) = 0$ و $x^2 + y - 1 = 0$

إذا كان $x = 0$ ، فإن $(0)^2 + y - 1 = 0$ ، أي أن $y = 1$ ومنه يكون z معدوما من أجل النقطة $(0; 1)$

إذا كان $x = -1$ ، فإن $(-1)^2 + y - 1 = 0$ ، أي أن $y = 0$ ومنه يكون z معدوما من أجل النقطة $(-1; 0)$

مرافق عدد مركب : z عدد مركب حيث : $z = x + iy$ ، حيث x و y عددان حقيقيان

العدد المركب $x - iy$ والذي نرمز له : $\bar{z}$ يسمى مرافق العدد المركب z

ملاحظة : للحصول على مرافق مركب z نغير إشارة الجزء التخيلي .

أمثلة :

$\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$ ، $\overline{4 - 7i} = 4 + 7i$ ، $\overline{5i} = -5i$ ، $\bar{2} = 2$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

الشكل الجبري لعدد مركب :

الكتابة $z = x + iy$ يسمى الشكل الجبري للعدد المركب z حيث x و y عددان حقيقيان

تمرين : أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري

$z_1 = \frac{-5}{i}$ ☺ ، $z_2 = \frac{7}{-3-i}$ ☺ ، $z_3 = \frac{4}{3+i\sqrt{2}}$ ☺ ، $z_4 = \frac{1+i}{1-i}$ ☺

الحل :

$$z_1 = \frac{-5}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{-5i}{i^2} = \frac{-5i}{-1} = 5i$$

$$z_2 = \frac{7}{-3-i} \times \frac{-3+i}{-3+i} = \frac{-21+7i}{(-3)^2+(1)^2} = \frac{-21+7i}{10} = \frac{-21}{10} + \frac{7}{10}i$$

$$z_3 = \frac{4}{3+i\sqrt{2}} \times \frac{3-i\sqrt{2}}{3-i\sqrt{2}} = \frac{12-4\sqrt{2}i}{(3)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{12-4\sqrt{2}i}{11} = \frac{12}{11} - \frac{4\sqrt{2}}{11}i$$

$$z_4 = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{(1)^2+(1)^2} = \frac{1+2i-1}{2} = i$$

حل معادلة من الدرجة الأولى :

تمرين : حل المعادلات الآتية

❶ $(1-i)z = 3+i$ ، ❷ $(3-4i)z^2 = iz$ ، ❸ $\frac{Z+1}{Z-1} = 2i$

الحل :

❶ لدينا : $(1-i)z = 3+i$ ، ومنه $z = \frac{3+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{3+3i+i-1}{(1)^2+(1)^2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$

❷ لدينا : $(3-4i)z^2 = iz$ ، ومنه $(3-4i)z^2 - iz = 0$ ، ومنه $z[(3-4i)z - i] = 0$

ومنه $z = 0$ أو $(3-4i)z - i = 0$ ، ومنه $(3-4i)z - i = 0$

ومنه $z = \frac{i}{3-4i}$ بالضرب في المرافق نجد $z = \frac{i}{3-4i} \times \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{3i-4}{(3)^2+(4)^2} = \frac{-4}{25} + \frac{3}{25}i$

ومنه حلول المعادلة هي : $z = 0$ أو $z = \frac{-4}{25} + \frac{3}{25}i$

❸ لدينا : $\frac{Z+1}{Z-1} = 2i$ ، ومنه $z+1 = 2iz - 2i$ ، ومنه $z - 2iz = -1 - 2i$ ، ومنه

$z(1-2i) = -1-2i$ ، ومنه $z = \frac{-1-2i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{-1-2i-2i+4}{(1)^2+(2)^2} = \frac{3-4i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

التمثيل الهندسي لعدد مركب :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، لكل نقطة $M(x;y)$ من المستوي نرفق العدد المركب $z = x + iy$

- ✓ نقول إن النقطة M هي صورة العدد المركب z ، و الشعاع $\overrightarrow{OM}$ يسمى كذلك صورة العدد المركب z
- ✓ كل نقطة M هي صورة عدد مركب وحيد $z = x + iy$ ، ونقول أن z لاحقة النقطة M والشعاع $\overrightarrow{OM}$
- ✓ محور الفواصل يسمى المحور الحقيقي ، ومحور التراتيب يسمى المحور التخيلي .

تمرين : A نقطة من المستوي لاحقتها $z_A = -1 + 2i$

عين لاحقة النقطة M نظيرة A بالنسبة لمبدأ المعلم ، ومحور الفواصل ، محور التراتيب

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

الحل : لاحقة النقطة M نظيرة A بالنسبة لمبدأ المعلم هي $z_M = 1 - 2i$

لاحقة النقطة M نظيرة A بالنسبة لمحور الفواصل هي $z_M = -1 - 2i$

لاحقة النقطة M نظيرة A بالنسبة لمحور التراتيب هي $z_M = 1 + 2i$

خواص المرافق :

$\bar{\bar{z}} = z$ ، $z + \bar{z} = 2Re(z)$ ، $z - \bar{z} = 2iIm(z)$ ، $z \times \bar{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2$

المرافق و العمليات :

من أجل كل عددين مركبين z و z' لدينا :

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ ، $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ ، $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ مع $z \neq 0$ ، $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ مع $z' \neq 0$

$\overline{z^n} = \bar{z}^n$

تمرين : حل في $\mathbb{C}$ المعادلات الآتية :

❶ $2\bar{z} = -1 + i$ ، ❷ $\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = i$ ، ❸ $z^2 + z\bar{z} - 4 - 6i = 0$

الحل :

❶ $2\bar{z} = -1 + i$ ، ومنه $\bar{z} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i$ ، ومنه $z = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i$

❷ $\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = i$ ، $\bar{z} - 1 = i\bar{z} + i$ ، ومنه $\bar{z} - i\bar{z} = 1 + i$ ، ومنه $\bar{z}(1 - i) = 1 + i$

ومنه $\bar{z} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i+i+i^2}{(1)^2+(1)^2} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i$ ، ومنه $z = -i$

❸ $z^2 + z\bar{z} - 4 - 6i = 0$

نضع $z = x + iy$ ، ومنه $\bar{z} = x - iy$ ، بالتعويض نجد

$(x + iy)^2 + (x + iy)(x - iy) - 4 - 6i = 0$

$x^2 - y^2 + 2ixy + x^2 + y^2 - 4 - 6i = 0$

$2x^2 + 2ixy - 4 - 6i = 0$

$(2x^2 - 4) + i(2xy - 6) = 0$

ومنه $\begin{cases} 2x^2 - 4 = 0 \\ \text{و} \\ 2xy - 6 = 0 \end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases} x^2 = 2 \\ \text{و} \\ xy = 3 \end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases} x = \sqrt{2} \text{ أو } x = -\sqrt{2} \\ y = \frac{3}{x} \end{cases}$

❖ إذا كان $x = \sqrt{2}$ ، فإن $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$ ، ومنه $y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ، ومنه نستنتج أن : $z = \sqrt{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}$

❖ إذا كان $x = -\sqrt{2}$ ، فإن $y = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ ، ومنه $y = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ، ومنه نستنتج أن : $z = -\sqrt{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}$

طويلة عدد مركب :

تعريف : z عدد مركب حيث : $z = x + iy$ ، حيث x و y عددان حقيقيان

نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له : $|z|$ حيث : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

أمثلة : $|3-4i|=\sqrt{(3)^2+(-4)^2}=5$ ☺ ، $|-5i|=5$ ☺ ، $\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ ☺

خواص الطويلة :

☺ $|\bar{z}|=|z|$ ، ☺ $|-z|=|z|$ ، ☺ $|z.z'|=|z|.|z'|$ ، ☺ $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ مع $z'\neq 0$

☺ $|z^n|=|z|^n$ ، ☺ $|z+z'|\leq|z|+|z'|$

أمثلة :

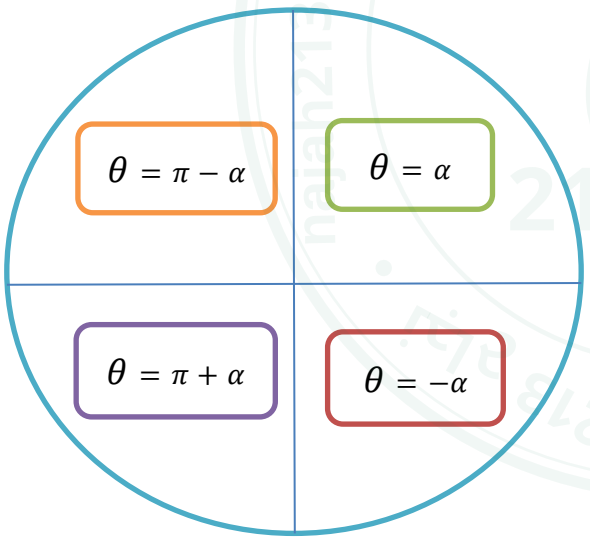
$$|(1+i)(2+3i)|=|1+i|\times|2+3i|=\sqrt{2}\times\sqrt{13}=\sqrt{26}$$

$$\left|\frac{3-4i}{\sqrt{3}-i}\right|=\frac{|3-4i|}{|\sqrt{3}-i|}=\frac{5}{2}$$

$$\left|(-1+2i)^4\right|=|-1+2i|^4=\left(\sqrt{5}\right)^4=25$$

عمدة عدد مركب : z عدد مركب حيث : $z=x+iy$ ، $|z|=r$

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{x}{r}\\ \sin\theta=\dfrac{y}{r}\end{cases}\Rightarrow\theta=\cdots+2k\pi$$



جيب وجيب تمام زوايا شهيرة

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

تمرين : عين عمدة لكل من الأعداد المركبة التالية :

❶ $z_1=\sqrt{3}-i$ ، ❷ $z_2=6i$ ، ❸ $z_3=-3i$ ، ❹ $z_4=-1+i$

❺ $z_5=-1-i$ ، ❻ $z_6=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

الحل :

لدينا $|z_1|=\sqrt{3+1}=2$ ، نسمي $Arg(z_1)=\theta_1$

لدينا $\begin{cases}\cos\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_1=\frac{-1}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta_1=\frac{-\pi}{6}+2k\pi$

ب قيمة cos موجبة وقيمة sin سالبة فإننا في الربع الرابع

لدينا $|z_2|=|6i|=6$ ، نسمي $Arg(z_2)=\theta_2$

$\begin{cases}\cos\theta_2=\frac{0}{6}=0\\ \sin\theta_2=\frac{6}{6}=1\end{cases}\Rightarrow\theta_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

قيمة cos موجبة وقيمة sin موجبة إذن الربع الأول

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

لدينا $|z_3| = |-3i| = 3$ ، نسمي $Arg(z_3) = \theta_3$

$$\begin{cases} \cos\theta_3 = 0 \\ \sin\theta_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \theta_3 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$ لدينا

قيمة cos موجبة وقيمة sin سالبة فإننا في الربع الرابع

لدينا $|z_4| = |-1+i| = \sqrt{2}$ ، نسمي $Arg(z_4) = \theta_4$

$$\begin{cases} \cos\theta_4 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_4 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

قيمة cos سالبة وقيمة sin موجبة إذن الربع الثاني

لدينا $|z_5| = |-1-i| = \sqrt{2}$ ، نسمي $Arg(z_5) = \theta_5$

$$\begin{cases} \cos\theta_5 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_5 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_5 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

قيمة cos سالبة وقيمة sin سالبة فإننا في الربع الثالث

لدينا $|z_6| = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$ ، نسمي $Arg(z_6) = \theta_6$

$$\begin{cases} \cos\theta_6 = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_6 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

قيمة cos موجبة وقيمة sin موجبة إذن الربع الأول

ملاحظات :

☺ عمدة أي عدد تخيلي صرف موجب هي $\frac{\pi}{2}$ ☺ عمدة أي عدد تخيلي صرف سالب هي $-\frac{\pi}{2}$

☺ عمدة أي عدد حقيقي موجب هي 0 أو 2π ☺ عمدة أي عدد حقيقي سالب هي π

خواص العمدة : z و z' عددان مركبان غير معدومين

☺ $Arg(z \times z') = Arg(z) + Arg(z')$ ، ☺ $Arg\left(\frac{z}{z'}\right) = Arg(z) - Arg(z')$

☺ $Arg(z^n) = n.Arg(z)$ ، مع $n \in \mathbb{N}^*$ ، ☺ $Arg(\bar{z}) = -Arg(z)$

تمرين : عين عمدة لكل من الأعداد المركبة التالية :

❶ $z_1 = (1+i)(-1-\sqrt{3}i)$ ❷ $z_2 = \frac{1+i}{-1-\sqrt{3}i}$

الحل :

❶ لدينا : $|z_4| = |1+i||-1-\sqrt{3}i| = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$

لدينا : $Arg(z_1) = Arg(1+i) + Arg(-1-\sqrt{3}i)$

نسمي $Arg(1+i) = \theta_1$ نسمي $Arg(-1-\sqrt{3}i) = \theta_2$

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$ ومنه $\Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{-1}{2} = \\ \sin\theta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} = \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

ومنه نستنتج أن $Arg(z_1) = Arg(1+i) + Arg(-1-\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi$

❷ لدينا $Arg(z_2) = Arg(1+i) - Arg(-1-\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{4} - \frac{4\pi}{3} = -\frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

2 الشكل المثلثي والأسي لعدد مركب

تعريف : z عدد مركب غير معدوم

تسمى الكتابة $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ بالشكل المثلثي للعدد المركب z حيث : $|z| = r$ و $\theta = Arg(z)$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

حذاري : إذا كان $r < 0$ فإن الكتابة " $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ " لا تمثل الشكل المثلثي

تعريف : العدد مركب z غير المعدوم الذي طويلته r ، و θ عمدة له : يكتب $z = re^{i\theta}$

هذه الكتابة تسمى الشكل الأسي للعدد المركب z

خاصية : يكون عددان مركبان مكتوبان على الشكل الأسي أو الشكل المثلثي متساويين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس الطويلة وعمدتان متوافقتان بتردد 2π

تمرين : أكتب الشكل المثلثي للعدد المركب z في كل حالة :

❶ $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ، ❷ $z_2 = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

❸ $z_3 = \sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)$ ، ❹ $z_4 = -\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}$

الحل :

طريقة : نستعمل الدائرة المثلثية لإستخراج بعض العلاقات المثلثية

نعلم أن : $\sin(-x) = -\sin x$ ، ومنه $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4}$

نعلم أن : $cos(-x) = \cos x$ ، ومنه $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

❶ لدينا : $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

❷ لدينا :

نعلم أن : $\sin(\pi + x) = -\sin x$ ، ومنه $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

نعلم أن : $cos(\pi + x) = -\cos x$ ، ومنه $\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$z_2 = -3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 3\left[-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 3\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$

❸ لدينا :

نعلم أن : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ ، ومنه $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

نعلم أن : $cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ ، ومنه $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$z_3 = \sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

❹ لدينا :

نعلم أن : $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ ، ومنه $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

نعلم أن : $cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ ، ومنه $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$z_4 = -\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

تمرين : أكتب الشكل الجبري للعدد المركب z حيث $z = \frac{\sqrt{6}}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

الحل : $z = \frac{\sqrt{6}}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] = \frac{\sqrt{6}}{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

دستور موافر :

$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ ☺ $\left(e^{i\theta}\right)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ ☺

$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$ ☺ $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n[\cos n\theta + i\sin n\theta]$ ☺

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

تمرين : ليكن العدد المركب z حيث $z = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

أحسب z^{100} (تعطى النتائج على الشكل الجبري)

الحل : لدينا :

$$z^{100} = 2^{100}\left[\cos\left(\frac{200\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{200\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= 2^{100}\left[\cos\left(\frac{198\pi + 2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{198\pi + 2\pi}{3}\right)\right] = 2^{100}\left[\cos\left(66\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(66\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2^{100}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2^{100}\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

تعيين قيم n حتى يكون z^n :

☺ z^n حقيقي معناه $n\theta = k\pi$ ، ☺ z^n حقيقي موجب معناه $n\theta = 2k\pi$

☺ z^n حقيقي سالب معناه $n\theta = (2k+1)\pi$ ، ☺ z^n تخيلي صرف معناه $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

☺ z^n تخيلي موجب معناه $n\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، ☺ z^n تخيلي سالب معناه $n\theta = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$

تمرين : نعتبر العدد المركب $z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ ، عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون z^n حقيقي موجب ـ تخيلي سالب

الحل : يكون z^n حقيقي موجب معناه $n\frac{\pi}{4} = 2k\pi$ ، ومنه $\frac{n}{4} = 2k$ ، ومنه $n = 8k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

يكون z^n تخيلي سالب معناه $n\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$ ، ومنه $\frac{n}{4} = \frac{1}{2} + 2k + 1$ ، ومنه $n = 8k + 6$

3 القيم المضبوطة لـ cos و sin

Bac 2009

تمرين : z_1 و z_2 عددان حيث : $z_1 = 1 + i$ ، و $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

1. أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري و الأسي
2. إستنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$
3. عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا

الحل : 1 أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-\sqrt{3}i} \times \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{1+\sqrt{3}i+i-\sqrt{3}}{1^2+\sqrt{3}^2} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

لدينا $|z_1| = |1+i| = \sqrt{2}$ ، نسمي $Arg(z_1) = \theta_1$

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$ لدينا

لدينا $|z_2| = |1-\sqrt{3}i| = 2$ ، نسمي $Arg(z_2) = \theta_2$

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

و لدينا : $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، ومنه $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{7\pi}{12}$

ومنه $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi}{12}i}$

2 إستنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$

لدينا من جهة $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$ ، ومن جهة أخرى $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ومنه بالمطابقة : $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{4}\end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{4}\div\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{4}\div\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{cases}$

❸ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا معناه $\frac{n7\pi}{12}=k\pi$ ، ومنه $\frac{7n}{12}=k$ ، ومنه $n=\frac{12k}{7}$

يكون n طبيعي إذا وفقط إذا كان $12k$ يقبل القسمة على 7 ، أي أن k مضاعف لـ 7

المعادلة من الدرجة الثانية :

تمرين : حل في $\mathbb{C}$ المعادلات الآتية :

❶ $z^2-2z+2=0$ ، ❷ $(-iz+3i+3)^2-2(-iz+3i+3)+2=0$ ،

❸ $z^2-2(\cos\theta)z+1=0$

الحل :

❶ لحل المعادلة $z^2-2z+2=0$ نستخدم المميز $\Delta=-4=4i^2$ ، ومنه للمعادلة حلان أو $\begin{cases}z_1=1-i\\ z_2=1+i\end{cases}$

❷ لحل المعادلة $(-iz+3i+3)^2-2(-iz+3i+3)+2=0$ ، نضع $t=-iz+3i+3$ ومنه

تصبح المعادلة كمايلي $t^2-2t+2=0$ ، ومنه أو $\begin{cases}t_1=1-i\\ t_2=1+i\end{cases}$ ، ومنه أو $\begin{cases}-iz_1+3i+3=1-i\\ -iz_2+3i+3=1+i\end{cases}$

أو $\begin{cases}z_1=4-2i\\ z_2=2-2i\end{cases}$

❸ لحل المعادلة $z^2-2(\cos\theta)z+1=0$ ، نستخدم المميز :

$\Delta=4\cos^2\theta-4=4(\cos^2\theta-1)=-4\sin^2\theta=4i^2\sin^2\theta=(2i\sin\theta)^2$

ومنه للمعادلة حلان : أو $\begin{cases}z_1=\frac{2\cos\theta-2i\sin\theta}{2}\\ z_2=\frac{2\cos\theta+2i\sin\theta}{2}\end{cases}$ ، ومنه أو $\begin{cases}z_1=\cos\theta-i\sin\theta\\ z_2=\cos\theta+i\sin\theta\end{cases}$

الجذران التربيعيان لعدد مركب

تعريف : z عدد مركب غير معدوم

الجذر التربيعي للعدد المركب z هو العدد المركب w حيث : $z=w^2$

مثال : الجذران التربيعيان للعدد -9 هما $-3i$ و $3i$

ملاحظة : كل عدد مركب غير معدوم يقبل جذرين تربعيين متناظرين

البحث عن الجذرين التربيعيان لعدد مركب

$z=a+ib$ عدد مركب و $w=x+iy$ جذر تربيعي له أي أن $w^2=z$

$w^2=z$ معناه : $\begin{cases}|w^2|=|z|\\ Re(w^2)=Re(z)\\ Im(w^2)=Im(z)\end{cases}$ معناه $\begin{cases}x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\\ x^2-y^2=a\\ 2xy=b\end{cases}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

تمرين : عين الجذرين التربيعين للعددين : $z_1 = -8 + 6i$ ، $z_2 = 4 + 3i$

الحل :

لدينا $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \ldots . (1) \\ x^2 - y^2 = -8 \ldots . (2) \\ 2xy = 6 \ldots \ldots (3) \end{cases}$ بجمع (1) مع (2) نجد $2x^2 = 2$ ، ومنه $\begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = -1 \end{cases}$

بالتعويض في (3) نجد

✓ إذا كان $x = 1$ ، فإن $2y = 6$ ، أي أن $y = 3$ ، ومنه نستنتج أن : $w = 1 + 3i$

✓ إذا كان $x = -1$ ، فإن $-2y = 6$ ، أي أن $y = -3$ ، ومنه نستنتج أن : $w = -1 - 3i$

لدينا $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \ldots . (1) \\ x^2 - y^2 = 4 \ldots . (2) \\ 2xy = 3 \ldots \ldots (3) \end{cases}$ بجمع (1) مع (2) نجد $2x^2 = 9$ ، ومنه $\begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \text{أو} \\ x = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

بالتعويض في (3) نجد

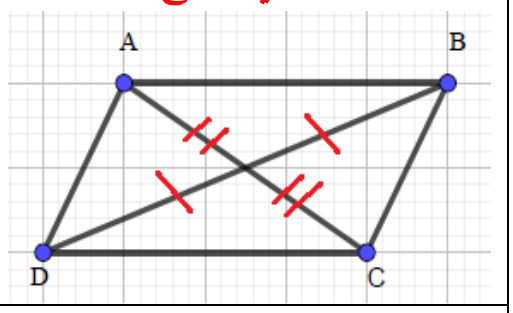
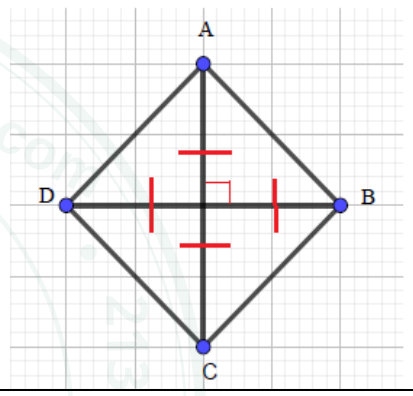
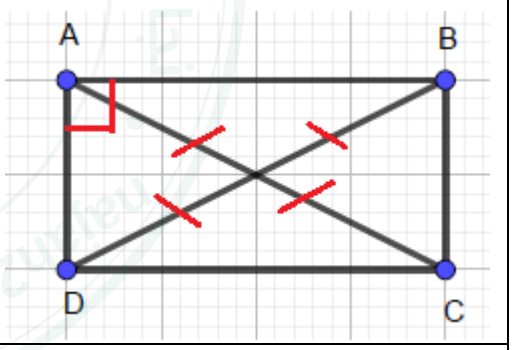
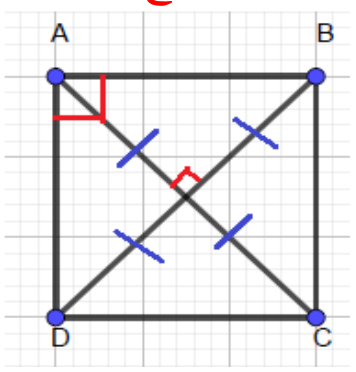
✓ إذا كان $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ، فإن $3\sqrt{2}y = 3$ ، أي أن $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، ومنه نستنتج أن : $w_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

✓ إذا كان $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ، فإن $-3\sqrt{2} = 3$ ، أي أن $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، ومنه نستنتج أن : $w_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

المفهوم الهندسي	التفسير الهندسي بالأعداد المركبة
الطول AB	$AB = \lvert z_B - z_A \rvert$
لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$	$z_{AB} = z_B - z_A$
لاحقة G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,);(C,\gamma)\}$	$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$
لاحقة النقطة H مركز ثقل المثلث ABC	$z_H = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$
لاحقة النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$	$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
لاحقة النقطة B نظيرة A بالنسبة إلى C	$z_C = \frac{z_A + z_B}{2} \Rightarrow z_B = 2z_C - z_A$
لاحقة النقطة M' نظيرة M بالنسبة لمحور الفواصل	$z_{M'} = \overline{z_M}$
لاحقة النقطة M' نظيرة M بالنسبة لمحور التراتيب	$z_M = x + iy \Rightarrow z_{M'} = -x + iy$
لاحقة النقطة M' نظيرة M بالنسبة لمبدأ المعلم	$z_M = x + iy \Rightarrow z_{M'} = -x - iy$
قياس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$	$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$
النقاط A ، B ، C على إستقامة واحدة $(\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC})$	$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$ (عددا حقيقيا)
الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان $(\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC})$	$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ يساوي عددا تخيليا صرفا
طويلة النسبة $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$	$\left\lvert \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right\rvert = \frac{AB}{AC}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

التعرف على طبيعة الرباعي :

طريقة الإثبات / نوع الرباعي	الطريقة 1 للإثبات	الطريقة 2 للإثبات
متوازي أضلاع 	الشعاعان المتقابلان في نفس الإتجاه متساويان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $z_B - z_A = z_D - z_C$	القطران متناصفان $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$
معين 	الشعاعان المتقابلان في نفس الإتجاه متساويان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ الضلعان المتتابعان متساويان $AB = AD$	القطران متناصفان ومتعامدان $\begin{cases} \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} \\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \end{cases}$
مستطيل 	الشعاعان المتقابلان في نفس الإتجاه متساويان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ الضلعان المتتابعان متعامدان $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$	القطران متناصفان ومتساويان $\begin{cases} \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} \\ AC = BD \end{cases}$
مربع 	الشعاعان المتقابلان في نفس الإتجاه متساويان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ الضلعان المتتابعان متعامدان ومتساويان $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \\ AB = AD \end{cases}$	القطران متناصفان ومتعامدان ومتساويان $\begin{cases} \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} \\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \\ AC = BD \end{cases}$

طبيعة المثلث :

❖ **المثلث القائم :** يكون المثلث ABC قائم إذا كان $arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

❖ **المثلث المتساوي الساقين** : يكون المثلث ABC متساوي الساقين إذا كان $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right| = 1$

❖ **المثلث القائم و المتساوي الساقين** : يكون المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين إذا كان

$\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right| = 1$ ، و $arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$

❖ **المثلث المتقايس الأضلاع** : : يكون المثلث ABC متقايس الأضلاع إذا كان

$\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right| = 1$ ، و $arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right) = \frac{\pi}{3}$

ملاحظات مهمة :

✓ تكون النقاط A ، B ، C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها E ونصف قطرها r ، إذا وفقط إذا كان

$|z_E - z_A| = |z_E - z_B| = |z_E - z_C| = r$ ، أي أن $AE = BE = CE = r$

✓ تكون النقاط A ، B ، C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها r ، إذا وفقط إذا كان

$|z_A| = |z_B| = |z_C| = r$ ، أي أن $AO = BO = CO = r$

✓ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث القائم هي منتصف الوتر

✓ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث المتقايس الأضلاع هي مركز ثقل المثلث (مرجح)

4 مجموعات نقط من المستوي

A و B نقطتان من المستوي و z_A ، z_B لاحقتاهما على الترتيب و (E) مجموعة النقط M من المستوي لاحقتها z

❖ **مجموعة النقط M بحيث : $|z - z_A| = |z - z_B|$**

لدينا $|z - z_A| = |z - z_B|$ يكافئ $AM = BM$ ، ومنه مجموعة النقط (E) هي محور القطعة $[AB]$

❖ **مجموعة النقط M بحيث : $|z - z_A| = r$ ، $r > 0$**

لدينا $|z - z_A| = r$ يكافئ $AM = r$ ، ومنه مجموعة النقط (E) هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها r

❖ **مجموعة النقط M بحيث : $(z - z_A)\overline{(z - z_A)} = r$ ، $r > 0$**

لدينا $(z - z_A)\overline{(z - z_A)} = r$ يكافئ $|z - z_A|^2 = r$ ، ويكون $AM^2 = r$ ، ومنه $AM = \sqrt{r}$ ، ومنه مجموعة النقط (E) هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها $\sqrt{r}$

❖ **مجموعة النقط M بحيث : $Arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = k\pi$** ، يكافئ $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right) = k\pi$ ، ومنه مجموعة النقط (E) هي المستقيم (AB) بإستثناء النقطتين A و B

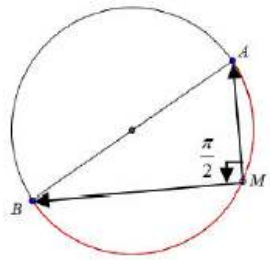
❖ **مجموعة النقط M بحيث : $Arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = 2k\pi$** ، يكافئ $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right) = 2k\pi$ ، ومنه مجموعة النقط (E) هي المستقيم (AB) بإستثناء القطعة $[AB]$

❖ **مجموعة النقط M بحيث : $Arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = (2k+1)\pi$** ، يكافئ $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right) = (2k+1)\pi$ ، ومنه مجموعة النقط (E) هي القطعة $[AB]$ بإستثناء النقطتين A و B

❖ **مجموعة النقط M بحيث : $Arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$** ، يكافئ $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، ومنه مجموعة النقط (E) هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ بإستثناء النقطتين A و B

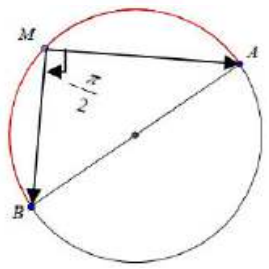
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

❖ **مجموعة النقط M بحيث : $Arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$**



يكافئ $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ، ومنه مجموعة النقط (E) هي نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ بحيث الإتجاه من A إلى B يكون غير مباشر بإستثناء A و B

❖ **مجموعة النقط M بحيث : $Arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$**



يكافئ $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ، ومنه مجموعة النقط (E) هي نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ بحيث الإتجاه من A إلى B يكون مباشر بإستثناء A و B

❖ **مجموعة النقط M بحيث : $z=z_A+ke^{i\theta}$ ، $k\in\mathbb{R}^*$ و $\theta\in\mathbb{R}$**

☺ إذا كان k ثابت و θ متغير يكون $|z-z_A|=|k|$ ، وبالتالي المجموعة (E) هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها $|k|$

☺ إذا كان θ ثابت و k متغير يكون :

👍 من أجل $k>0$ تكون المجموعة (E) نصف المستقيم $[AM)$ المعرف بـ : $(\vec{i};\overrightarrow{AM})=\theta$ بإستثناء A

👍 من أجل $k<0$ تكون المجموعة (E) نصف المستقيم $[AM)$ المعرف بـ : $(\vec{i};\overrightarrow{AM})=\pi+\theta$ بإستثناء A

5 التحويلات النقطية

1- كيفية التعرف على التحويل النقطي وإستخراج عناصره المميزة $z'=az+b$

الكتابة المركبة	طبيعة التحويل	
$z'=az+b$ حيث $a\in\mathbb{C}^*$ و $b\in\mathbb{C}$	$a=1$	إنسحاب شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $z_{\vec{u}}=b$
	$a\neq 1$ $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$	تحاكي نسبته a ومركزه w ذو اللاحقة $z_w=\frac{b}{1-a}$
	$a\neq 1$ $a\in\mathbb{C}^*-\{1\}$ $\lvert a\rvert=1$	دوران زاويته $\theta=Arg(a)$ و مركزه w ذو اللاحقة $z_w=\frac{b}{1-a}$
	$a\neq 1$ $a\in\mathbb{C}^*-\{1\}$ $\lvert a\rvert\neq 1$	تشابه مباشر نسبته $k=\lvert a\rvert$ زاويته $\theta=Arg(a)$ و مركزه w ذو اللاحقة $z_w=\frac{b}{1-a}$

ملاحظة : التحاكي نسبته a ، وهذا يعني أن نسبة التحاكي قد تكون موجبة و قد تكون سالبة أما التشابه فنسبته $|a|$ وهي موجبة دوما

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

2 – في حالة الصيغة المبسطة : $z' - z_w = a(z - z_w)$

❖ إذا كان $z' - z_w = k(z - z_w)$ فإن التحويل هو تحاكي نسبته k و لاحقة مركزه z_w

❖ إذا كان $z' - z_w = e^{i\theta}(z - z_w)$ فإن التحويل هو دوران زاويته θ ومركزه z_w

❖ إذا كان $z' - z_w = ke^{i\theta}(z - z_w)$ فإن التحويل تشابه مباشر زاويته θ ونسبته k ولاحقة مركزه z_w

ملاحظات مهمة :

❶ **أوجد التحويل الذي يحول A إلى B ، ويحول C إلى D**

$$\begin{cases} z_B = az_A + b \dots\dots (1) \\ z_D = az_C + b \dots\dots (2) \end{cases}$$

بالطرح نجد : $a = \frac{z_B - z_D}{z_A - z_C}$ ، نعوض بعد ذلك قيمة a في (1) أو (2) نجد b

❷ **أوجد التحويل حيث M صورة T و S صورة P**

$$\begin{cases} z_M = az_T + b \dots\dots (1) \\ z_S = az_P + b \dots\dots (2) \end{cases}$$

❸ **أوجد التحويل حيث :** $\begin{cases} F(I) = H \\ F(P) = N \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} z_H = az_I + b \\ z_N = az_P + b \end{cases}$

تمرين : أذكر طبيعة التحويل في كل حالة :

❶ $z' = z + 1 - i$ ، ❷ $z' = -3z - 5i$ ، ❸ $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$ ❹ $z' = 2iz + 5 - i$

الحل :

❶ $z' = z + 1 - i$ ، بما أن $a = 1$ فإن التحويل هو إنسحاب لاحقة شعاعه $z_{\vec{u}} = 1 - i$

❷ $z' = -3z - 5i$ ، بما أن $a = -3$ فإنه تحاكي نسبته -3 ولاحقة مركزه $z_w = \frac{-5i}{1-(-3)} = \frac{-5}{4}i$

❸ $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$ ، بما أن $\left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$ فإنه دوران مركزه النقطة O وزاويته $Arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{3}$

ملاحظة : في عبارة التحويل $z' = az + b$ ، وإذا كان $b = 0$ فإن المركز هو النقطة O كما هو موضح أعلاه

❹ $z' = 2iz + 5 - i$ ، بما أن $|2i| = 2$ فإنه تشابه مباشر نسبته 2 وزاويته $Arg(2i) = \frac{\pi}{2}$ ولاحقة مركزه

$$z_w = \frac{5 - i}{1 - 2i} \times \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{5 + 10i - i + 2}{(1)^2 + (2)^2} = \frac{7}{5} + \frac{9}{5}i$$

تمرين : عين في كل حالة مما يأتي العبارة المركبة للتحويل

❶ $\Omega(0;0)$ ، $k = 2$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$ ❷ $\Omega(1;2)$ ، $k = -3$ ،

❸ $\Omega(-1;3)$ ، $k = 1$ ، $\theta = \frac{\pi}{4}$ ❹ $\Omega(0;2)$ ، $k = 3$ ، $\theta = \frac{3\pi}{2}$

ملاحظة : ☺ إذا كان التحويل تشابه أو دوران فإن $a = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

☺ إذا كان التحويل تحاكي فإن a هو نسبة التحاكي أي أن $a = k$

الحل :

❶ $\Omega(0;0)$ ، $k = 2$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، لدينا $z' - z_w = ke^{i\theta}(z - z_w)$ ، ومنه $z' - 0 = 2e^{\frac{\pi}{2}i}(z - 0)$

ومنه $z' = 2iz$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

❷ $\Omega(1;2)$ ، $k=-3$ ، لدينا $z'-z_w=k(z-z_w)$ ، ومنه $z'-(1+2i)=-3(z-(1+2i))$

ومنه $z'-1-2i=-3z+3+6i$ ، ومنه $z'=-3z+4+8i$

❸ $\Omega(-1;3)$ ، $k=1$ ، $\theta=\frac{\pi}{4}$ ، لدينا $z'-z_w=e^{i\theta}(z-z_w)$ ،

ومنه $z'+1-3i=e^{\frac{\pi}{4}i}(z+1-3i)$ ، ومنه $z'+1-3i=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(z+1-3i)$

ومنه $z'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(z+1-3i)-1+3i$

❹ $\Omega(0;2)$ ، $k=3$ ، $\theta=\frac{3\pi}{2}$ ، لدينا $z'-z_w=ke^{i\theta}(z-z_w)$ ، ومنه $z'-2i=3e^{\frac{3\pi}{2}i}(z-2i)$

ومنه $z'-2i=-3i(z-2i)$ ، ومنه $z'=-3iz-6+2i$

إستنتاج طبيعة تحويل من نسبة

تمرين : نعتبر النقاط A ، B ، C ، D التي لواحقها على الترتيب

$z_A=1+2i$ ، $z_B=1+\sqrt{3}+i$ ، $z_C=1+\sqrt{3}-i$ ، $z_D=1-2i$

❶ بين أن $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$

❷ إستنتج أن D صورة A بتشابه مباشر يطلب تعيين مركزه ونسبته وزاويته

الحل :

❶ بين أن $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$

$$\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\frac{1-2i-1-\sqrt{3}-i}{1+2i-1-\sqrt{3}-i}=\frac{-\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}+i}\times\frac{-\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}-i}=\frac{3+\sqrt{3}i+3\sqrt{3}i-3}{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=\sqrt{3}i$$

بما أن $\begin{cases}|\sqrt{3}i|=\sqrt{3}\\ Arg(\sqrt{3}i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$ ، فإن $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$

❷ لدينا : $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$ ، ومنه $z_D-z_B=\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}(z_A-z_B)$

ومنه $z_D-z_B=\sqrt{3}i(z_A-z_B)$

ومنه D صورة A بتشابه مباشر مركزه B و نسبته $\sqrt{3}$ ، وزاويته $\frac{\pi}{2}$

" هجرنا المصاحف وإبتلينا بالهواتف ؛ فاللهم ردنا إليك ردآ جميلا "

"من خان حي على الصلاة ، تخونه حي على الفلاح وميزان الله أعدل"

كل مواجع الحياة تمحواها آية : " وعسى أن تكرهوا شيئًا وهو خيرا لكم "

اقترب من الله يقترب منك كل شيء جميل

"إن لم تقاتل من أجل ما تتمناه، ستقاتل أضعافه من أجل التأقلم مع وضع أنت لا تريده"

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً