najah213.com · نجاح 213

**الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية**

**وزارة التربية الوطنية** — **مديرية التربية لولاية تيارت**

**امتحان بكالوريا تجريبية** — **ثانوية العقيد لطفي –تخمارت–**

**الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية** — **دورة: ماي 2021**

**اختبار في مادة: الرياضيات** — **المدة: 02 ساعة ونصف**

**على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:**

## الموضوع الأول

### التمرين الأول: (05 نقاط)

$(u_n)$ متتالية حسابية معرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = -\frac{2}{5}n + \frac{5}{4}$.

1)بيّن أنّ $(u_n)$ متتالية حسابية يُطلب تعيين حدّها الأول $u_1$ وأساسها $r$، استنتج اتجاه تغيّرها.

2)احسب المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

3)عيّن العدد الطبيعي $n$ بحيث: $S_n = 1$.

### التمرين الثاني: (07 نقاط)

لتكن الأعداد الطبيعية $a$، $b$ وَ $c$ حيث $a = 2021$، $b = 1954$ وَ $c = 1442$.

1)أ/ عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد $a$، $b$ وَ $c$ على 5.

ب/ بيّن أنّ $b \equiv -1[5]$، ثمّ استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين $b^{2971}$ وَ $b^{1962}$ على 5.

جـ/ هل العددين $a$ وَ $b^{1962}$ متوافقين بتردد 5؟ برّر إجابتك.

2)أ/ عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد $3^0$، $3^1$، $3^2$، $3^3$ وَ $3^4$ على 5.

ب/ بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $k$: $3^{4k} \equiv 1[5]$، ثمّ استنتج أنّ $3^{4k+1} \equiv 3[5]$.

جـ/ تحقّق أنّ $3^{2021} \equiv 3[5]$.

د/ عيّن الأعداد الطبيعية $n$ بحيث يكون $8^n - 1 \equiv 0[5]$.

### التمرين الثالث: (08 نقاط)

الدّالة العددية $f$ معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$،

وَ $(C_f)$ التمثيل البياني لـ $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1)أُحسب نهاية الدّالة $f$ عند كلّ من $-\infty$ و $+\infty$.

2)أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$: $f'(x) = 3x(x-2)$، ثمّ ادرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$.

ب. استنتج اتجاه تغيّر $f$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أُكتب معادلة لـ$(T)$ المماس للمنحنى $(C_f)$ في النقطة $A$ التي فاصلتها 1.

4)أ. تحقّق أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x$: $f(x) = (x-2)^2(x+1)$.

ب. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ ثمّ استنتج نقط تقاطع $(C_f)$ وحامل محور الفواصل.

5) ارسم كلا من $(T)$ و $(C_f)$.

**انتهى الموضوع الأول**



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213



# الموضوع الثاني

## التمرين الأول: (05 نقاط)

$(v_n)$ المتتالية الهندسية ذات الحدود الموجبة التي حدّها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$ وحدّها الخامس $v_4 = 8$.

1)عيّن أساس هذه المتتالية ثمّ اكتب $v_n$ بدلالة $n$.

2)اثبت أنّ العدد 2048 حد في المتتالية $(v_n)$.

3)احسب بدلالة $n$ المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

4)احسب المجموع: $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2048$.

## التمرين الثاني: (07 نقاط)

$a$ وَ $b$ عددان صحيحان حيث $a \equiv -1[9]$، وَ $b = 2021$.

1)أ/ عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين $a$، وَ $b$ على 9.

ب/ بيّن أنّ $a + 2b$ يقبل القسمة على 9.

جـ/ استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $(a + 2b)^2 - 8$ على 9.

2)أ/ ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي $n$، بواقي قسمة $4^n$ على 9.

ب/ عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من $1962^{1442}$ وَ $1954^{2021}$ على 9.

جـ/ تحقّق أنّ $1962^{1442} + 1954^{2021} + a^{2n} - 2 \equiv 0[9]$.

د/ عيّن الأعداد الطبيعية $n$ بحيث يكون $4^{3n} + n - 1 \equiv 0[9]$.

## التمرين الثالث: (08 نقاط)

نعتبر $f$ الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$،

وَ $(C_f)$ التمثيل البياني للدّالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1)أُحسب نهاية الدّالة $f$ عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.

2)أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$: $f'(x) = (-x + 3)(x - 1)$، ثمّ ادرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$.

ب. استنتج اتجاه تغيّر $f$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) بيّن أنّ النقطة $A\left(2; \frac{-2}{3}\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى $(C_f)$.

4) أُكتب معادلة لـ$(D)$ المماس للمنحنى $(C_f)$ في النقطة $A$.

5) احسب $f(0)$ ثمّ ارسم كلا من $(D)$ و $(C_f)$.

**انتهى الموضوع الثاني**



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# التصحيح المفصل للبكالوريا التجريبية/ مادة الرياضيات/ ثالثة آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية 2021

## حل الموضوع الأول

**حل التمرين الأول:** (05 نقاط)

لدينا: $(u_n)$ متتالية **حسابية** معرّفة على **مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة** $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = -\frac{2}{5}n + \frac{5}{4}$.

**1)تبيان أنّ $(u_n)$ متتالية حسابية يُطلب تعيين حدّها الأول $u_1$ وأساسها $r$:**

نُبين أنّ $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت:

لدينا: $u_n = -\frac{2}{5}n + \frac{5}{4}$

ومنه:

$$u_{n+1} = -\frac{2}{5}(n+1) + \frac{5}{4}$$
$$= -\frac{2}{5}n - \frac{2}{5} + \frac{5}{4}$$
$$= -\frac{2}{5}n + \frac{-8+25}{20}$$
$$= -\frac{2}{5}n + \frac{17}{20}$$

وعليه:
$$u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{2}{5}n + \frac{17}{20}\right) - \left(-\frac{2}{5}n + \frac{5}{4}\right)$$
$$= -\frac{2}{5}n + \frac{17}{20} + \frac{2}{5}n - \frac{5}{4}$$
$$= \frac{17-25}{20} = -\frac{8}{20} = -\frac{2}{5}$$

إذن: $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $r = -\frac{2}{5}$، وحدّها الأوّل $u_1 = -\frac{2}{5}(1) + \frac{5}{4} = -\frac{2}{5} + \frac{5}{4} = \frac{-8+25}{20} = \frac{17}{20}$.

**استنتاج اتجاه تغيّر $(u_n)$:**

بما أنّ: $(u_n)$ متتالية **حسابية**، وَأساسها **سالب تماما** $(r = -\frac{2}{5} < 0)$، فإنّها: **متناقصة تماما**.

**2)حساب المجموع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$:**

لدينا:
$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$= (n - 1 + 1)\left(\frac{u_1 + u_n}{2}\right)$$
$$= \frac{n}{2}\left(\frac{17}{20} - \frac{2}{5}n + \frac{5}{4}\right)$$
$$= \frac{n}{2}\left(-\frac{2}{5}n + \frac{17+25}{20}\right)$$
$$= \frac{n}{2}\left(-\frac{2}{5}n + \frac{42}{20}\right)$$
$$= -\frac{1}{5}n^2 + \frac{21}{20}n$$

**3)تعيين العدد الطبيعي $n$ بحيث $S_n = 1$:**

$S_n = 1$ تُكافئ: $-\frac{1}{5}n^2 + \frac{21}{20}n = 1$

ومنه: $-4n^2 + 21n - 20 = 0$

**مميزها:**
$$\Delta = (21)^2 - 4(-4)(-20)$$
$$= 441 - 320 = 121 = (11)^2$$

للمعادلة حلين متمايزين هما:

$n' = \frac{-21+11}{-8} = \frac{-10}{-8} = \frac{5}{4} \notin \mathbb{N}$،

وَ $n'' = \frac{-21-11}{-8} = \frac{-32}{-8} = 4 \in \mathbb{N}$.

$(S_4 = 1)$

**حل التمرين الثاني:** (07 نقاط)

لدينا: $a = 2021$، $b = 1954$ وَ $c = 1442$.

**1)أ/ تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد $a$، $b$ وَ $c$ على 5:**

- لدينا: $a = 5(404) + \mathbf{1}$، أي: $\boxed{a \equiv \mathbf{1}[5]}$

إذن: باقي قسمة $a$ على 5 هو **1**.

- لدينا: $b = 5(390) + \mathbf{4}$، أي: $\boxed{b \equiv \mathbf{4}[5]}$

إذن: باقي قسمة $b$ على 5 هو **4**.

- لدينا: $c = 5(288) + \mathbf{2}$، أي: $\boxed{c \equiv \mathbf{2}[5]}$

إذن: باقي قسمة $c$ على 5 هو **2**.

**ب/ تبيان أنّ $b \equiv -1[5]$:**

نُبين أنّ الفرق $b - (-1)$ مضاعف لـ5:

لدينا: $b - (-1) = b + 1 = 1955 = 5(391)$

إذن: $\boxed{b \equiv -1[5]}$.

**استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين $b^{2971}$ وَ $b^{1962}$ على 5:**

- لدينا: $b \equiv -1[5]$،

ومنه: $b^{2971} \equiv (-1)^{2971}[5]$

وعليه: $b^{2971} \equiv -1[5]$ (لأنّ: 2971 **عدد فردي**)

ويكون: $\boxed{b^{2971} \equiv \mathbf{4}[5]}$،

إذن: باقي قسمة $b^{2971}$ على 5 هو **4**.

- لدينا: $b \equiv -1[5]$،

ومنه: $b^{1962} \equiv (-1)^{1962}[5]$

وعليه: $\boxed{b^{1962} \equiv \mathbf{1}[5]}$ (لأنّ: 1962 **عدد زوجي**)،

إذن: باقي قسمة $b^{1962}$ على 5 هو **1**.

**جـ/ دراسة توافق العددين $a$ وَ $b^{1962}$ بتردد 5، مع تبرير الإجابة:**

لدينا: $\begin{cases} a \equiv \mathbf{1}[5] \\ b^{1962} \equiv \mathbf{1}[5] \end{cases}$، إذن: $\boxed{a \equiv b^{1962}[5]}$.

**2)أ/ تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد $3^0$، $3^1$، $3^2$، $3^3$ وَ $3^4$ على 5:**

لدينا: $3^0 \equiv \mathbf{1}[5]$، ومنه: باقي قسمة $3^0$ على 5 هو **1**.

$3^1 \equiv \mathbf{3}[5]$، ومنه: باقي قسمة $3^1$ على 5 هو **3**.

$3^2 \equiv \mathbf{4}[5]$، ومنه: باقي قسمة $3^2$ على 5 هو **4**.

$3^3 \equiv \mathbf{2}[5]$، ومنه: باقي قسمة $3^3$ على 5 هو **2**.

$3^4 \equiv \mathbf{1}[5]$، ومنه: باقي قسمة $3^4$ على 5 هو **1**.

**ب/ تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي $k$، $3^{4k} \equiv 1[5]$:**

لدينا: $3^4 \equiv 1[5]$، ومنه: $(3^4)^k \equiv (1)^k[5]$

وعليه: $\boxed{3^{4k} \equiv 1[5]}$.

**استنتاج أنّ $3^{4k+1} \equiv 3[5]$:**

لدينا: $\begin{cases} 3^{4k} \equiv 1[5] \\ 3^1 \equiv 3[5] \end{cases}$ ومنه: $3^{4k} \times 3^1 \equiv (1 \times 3)[5]$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

أي: $\boxed{3^{4k+1} \equiv 3[5]}$.

**جـ/ التحقّق أنّ $3^{2021} \equiv 3[5]$:**

لدينا: $2021 = 4(505) + 1$ من الشكل $4k + 1$

إذن: $\boxed{3^{2021} \equiv 3[5]}$.

**د/ تعيين الأعداد الطبيعية $n$ بحيث يكون $8^n - 1 \equiv 0[5]$:**

لدينا: $8^n - 1 \equiv 0[5]$ تُكافئ: $3^n - 1 \equiv 0[5]$

ومنه: $3^n \equiv 1[5]$

وحسب نتيجة السؤال 2)ب/، فإنّ: $\boxed{n = 4k}$ $(k \in \mathbb{N})$.

**حل التمرين الثالث: (08 نقاط)**

لدينا: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$، وَ $D_f = \mathbb{R}$.

وَ $(C_f)$ التمثيل البياني لـ $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

**1)حساب نهاية الدّالة $f$ عند كلّ من $-\infty$ و$+\infty$:**

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$ ،

وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$.

**2)أ. تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$، $f'(x) = 3x(x-2)$:**

لدينا: $f'(x) = 3x^2 - 6x$،

ولدينا من جهة أخرى: $3x(x-2) = 3x^2 - 6x$

إذن: $\boxed{f'(x) = 3x(x-2)}$.

**دراسة إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:**

**الطريقة 01:**

(في حالة $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$)

نضع: $f'(x) = 0$، نجد: $3x^2 - 6x = 0$

أي: $3x(x-2) = 0$

ومنه: $x = 0$ أو $x - 2 = 0$

وعليه: $\boxed{x = 0}$ أو $\boxed{x = 2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**ب. استنتاج اتجاه تغيّر $f$، ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:**

الدّالة $f$ **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ وَ $[2; +\infty[$، و**متناقصة تماما** على المجال $[0; 2]$؛

**ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $4$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

حيث: $f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 4 = 4$،

وَ $f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$.

**3) كتابة معادلة لـ$(T)$ المماس للمنحنى $(C_f)$ في النقطة $A$ التي فاصلتها 1:**

معادلة $(T)$ من الشكل $y = f'(1)(x-1) + f(1)$،

ولدينا: $\begin{cases} f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = -3 \\ f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 4 = 2 \end{cases}$

وبالتعويض نجد: $y = -3(x-1) + 2$،

ومنه: $y = -3x + 3 + 2$

إذن: $\boxed{(T): y = -3x + 5}$.

**4)أ. التحقق أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x$، $f(x) = (x-2)^2(x+1)$:**

لدينا: $(x-2)^2(x+1) = (x^2 - 4x + 4)(x+1)$

$= x^3 + x^2 - 4x^2 - 4x + 4x + 4$

$= x^3 - 3x^2 + 4 = f(x)$

**ب. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$:**

$f(x) = 0$، تُكافئ: $(x-2)^2(x+1) = 0$

ومنه: $(x-2)^2 = 0$ **أو** $x + 1 = 0$

وعليه: $x - 2 = 0$ **أو** $x = -1$

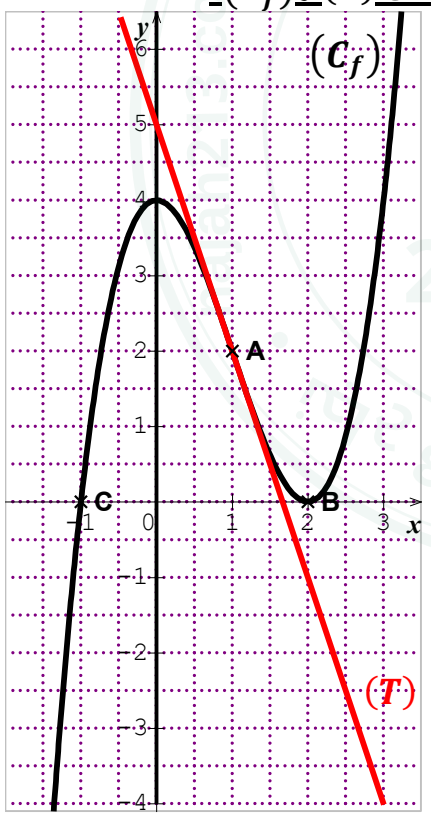
وبالتالي: $\boxed{x = 2}$ **أو** $\boxed{x = -1}$

إذن: $\boxed{S = \{2; -1\}}$.

**استنتاج نقط تقاطع $(C_f)$ وحامل محور الفواصل:**

$(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين $B(2; 0)$؛ وَ $C(-1; 0)$.

**5) رسم كلا من $(T)$ و$(C_f)$:**




## حل الموضوع الثاني

**حل التمرين الأول: (05 نقاط)**

لدينا: $(v_n)$ المتتالية **الهندسية ذات الحدود الموجبة** التي **حدّها الأول** $v_0 = \frac{1}{2}$ و**حدّها الخامس** $v_4 = 8$.

**1)تعيين أساس هذه المتتالية:**

نعلم أنّ: $v_n = v_0 \times q^n$، ومنه: $v_4 = v_0 \times q^4$

بالتعويض نجد: $8 = \frac{1}{2} \times q^4$

ويكون: $q^4 = 16 = 2^4$، إذن: $\boxed{q = 4}$.

**كتابة $v_n$ بدلالة $n$:**

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$، ومنه: $\boxed{v_n = \frac{1}{2} \times 2^n}$.

**2)اثبات أنّ العدد 2048 حد في المتتالية $(v_n)$:**

نضع: $v_n = 2048$، نجد: $\frac{1}{2} \times 2^n = 2048$

ومنه: $2^n = 4096$

وعليه: $2^n = 2^{12}$

وبالتالي: $\boxed{n = 12}$ $(v_{12} = 2048)$

إذن: 2048 حد من حدود المتتالية $(v_n)$.

**3)حساب بدلالة $n$ المجموع، $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$:**

لدينا: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

$= v_1 \left(\frac{1-q^{n-1+1}}{1-q}\right)$

$= \left(\frac{1}{2} \times 2^1\right)\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right) = 2^n - 1$

**4)حساب المجموع، $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2048$:**

لدينا: $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2048$

$= v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \cdots + v_{12}$

$= 2^{12} - 1$

$= 4096 - 1 = 4095$

**حل التمرين الثاني: (07 نقاط)**

لدينا: $a$ وَ $b$ عددان صحيحان حيث $a \equiv -1[9]$، وَ $b = 2021$.

**1)أ/ تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين $a$، وَ $b$ على 9:**

لدينا: $a \equiv -1[9]$، ومنه: $a \equiv (-1 + 9)[9]$

أي: $\boxed{a \equiv 8[9]}$

إذن: باقي قسمة $a$ على 9 هو **8**.

لدينا: $b = 9(224) + 5$، أي: $\boxed{b \equiv 5[9]}$

إذن: باقي قسمة $b$ على 9 هو **5**.

**ب/ تبيان أنّ $a + 2b$ يقبل القسمة على 9:**

لدينا: $a + 2b \equiv (-1 + 2(5))[9]$

ومنه: $a + 2b \equiv 9[9]$

وعليه: $\boxed{a + 2b \equiv 0[9]}$، إذن: $a + 2b$ **يقبل القسمة** على 9.

**جـ/ استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $(a + 2b)^2 - 8$ على 9:**

لدينا: $(a + 2b)^2 - 8 \equiv ((0)^2 - 8)[9]$

ومنه: $(a + 2b)^2 - 8 \equiv -8[9]$

وعليه: $(a + 2b)^2 - 8 \equiv (-8 + 9)[9]$

أي: $\boxed{(a + 2b)^2 - 8 \equiv 1[9]}$،

إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد $(a + 2b)^2 - 8$ على 9 هو **1**.

**2)أ/ دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي $n$، بواقي قسمة $4^n$ على 9:**

لدينا: $4^0 \equiv 1[9]$،

$4^1 \equiv 4[9]$،

$4^2 \equiv 7[9]$،

$4^3 \equiv 1[9]$،

ومنه: بواقي قسمة $4^n$ على 9 تُشكل متتالية دورية، دورها 3 وبالتالي:

| $k \in \mathbb{N}$ | $3k$ | $3k+1$ | $3k+2$ | $n =$ |
|---|---|---|---|---|
| $[9]$ | 1 | 4 | 7 | $4^n \equiv$ |

**ب/ تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من $1962^{1442}$ وَ $1954^{2021}$ على 9:**

لدينا: $1962 \equiv 0[9]$

ومنه: $1962^{1442} \equiv 0^{1442}[9]$

أي: $\boxed{1962^{1442} \equiv 0[9]}$، إذن: باقي قسمة $1962^{1442}$ على 9 هو **0**.

لدينا: $1954 \equiv 1[9]$

ومنه: $1954^{2021} \equiv 1^{2021}[9]$

أي: $\boxed{1954^{2021} \equiv 1[9]}$، إذن: باقي قسمة $1954^{2021}$ على 9 هو **1**.

**جـ/ التحقق أنّ $1962^{1442} + 1954^{2021} + a^{2n} - 2 \equiv 0[9]$:**

لدينا: $1962^{1442} + 1954^{2021} + a^{2n} - 2 \equiv (0 + 1 + (-1)^{2n} - 2)[9]$

ومنه: $1962^{1442} + 1954^{2021} + a^{2n} - 2 \equiv (1 + 1 - 2)[9]$

(لأنّ: $2n$ عدد **زوجي**)

أي: $\boxed{1962^{1442} + 1954^{2021} + a^{2n} - 2 \equiv 0[9]}$.

**د/ تعيين الأعداد الطبيعية $n$ بحيث يكون $4^{3n} + n - 1 \equiv 0[9]$:**

$4^{3n} + n - 1 \equiv 0[9]$ تُكافئ: $1 + n - 1 \equiv 0[9]$

ومنه: $n \equiv 0[9]$

إذن: $\boxed{n = 9k}$ (حيث $k \in \mathbb{N}$)

**حل التمرين الثالث: (08 نقاط)**

لدينا: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$، وَ $D_f = \mathbb{R}$.

وَ $(C_f)$ التمثيل البياني للدّالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

**1)حساب نهاية الدّالة $f$ عند كل من $-\infty$ و$+\infty$:**

لدينا: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{3}x^3\right) = +\infty$،

وَ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{3}x^3\right) = -\infty$.

**2)أ. تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$، $f'(x) = (-x + 3)(x - 1)$:**

لدينا: $f'(x) = -x^2 + 4x - 3$،

ولدينا من جهة أخرى:

$(-x + 3)(x - 1) = -x^2 + x + 3x - 3$

najah213.com · نجاح 213

$= -x^2 + 4x - 3$

إذن: $\boxed{f'(x) = (-x+3)(x-1)}$.

**دراسة إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:**

**الطريقة 01:** (في حالة $f'(x) = -x^2 + 4x - 3$)

نضع: $f'(x) = 0$، نجد: $-x^2 + 4x - 3 = 0$

**مميزها:** $\Delta = (4)^2 - 4(-1)(-3)$

$= 16 - 12 = 4 = (\mathbf{2})^2$

للمعادلة حلين متمايزين هما:

$x' = \frac{-4+\mathbf{2}}{2(-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$، وَ $x'' = \frac{-4-\mathbf{2}}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | $0$ | + | $0$ | - | |

**الطريقة 02:** (في حالة $f'(x) = (-x+3)(x-1)$)

نضع: $f'(x) = 0$، نجد: $(-x+3)(x-1) = 0$

ومنه: $-x+3 = 0$ أو $x-1 = 0$

وعليه: $\boxed{x = 3}$ أو $\boxed{x = 1}$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | $0$ | + | $0$ | - | |

**ب. استنتاج اتجاه تغيّر $f$، ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها:**

الدّالة $f$ **متناقصة تماما** على كل من المجالين $]-\infty;1]$ وَ $[3;+\infty[$، و**متزايدة تماما** على المجال $[1;3]$؛

**ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | $0$ | + | $0$ | - | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $\frac{-4}{3}$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

حيث: $f(1) = -\frac{1}{3}(1)^3 + 2(1)^2 - 3(1)$

$= -\frac{1}{3} + 2 - 3 = \frac{-1+6-9}{3} = \frac{-4}{3}$

وَ $f(3) = -\frac{1}{3}(3)^3 + 2(3)^2 - 3(3)$

$= -\frac{1}{3}(27) + 2(9) - 9$

$= -9 + 18 - 9 = 0$

**3) تبيان أنّ النقطة $A\left(2;\frac{-2}{3}\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى $(C_f)$:**

لدينا: $\boxed{f''(x) = -2x + 4}$.

**إشارة $f''(x)$:**

نضع: $f''(x) = 0$ نجد: $-2x + 4 = 0$

ومنه: $\boxed{x = \frac{-4}{-2} = 2}$.

**وبالتالي:**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | + | $0$ | - | |

نلاحظ أنّ $f''(x)$ **تنعدم** عند 2، **وَتُغيّر إشارتها** إذن: النقطة $A(2;f(2))$ أي: $A\left(2;-\frac{2}{3}\right)$ **نقطة انعطاف** لـ$(C_f)$.

(لأنّ: $f(2) = -\frac{1}{3}(2)^3 + 2(2)^2 - 3(2) = -\frac{2}{3}$)

**4) كتابة معادلة لـ$(D)$ المماس للمنحنى $(C_f)$ في النقطة $A$:**

معادلة $(D)$ من الشكل $y = f'(2)(x-2) + f(2)$،

ولدينا: $\begin{cases} f'(2) = -(2)^2 + 4(2) - 3 = 1 \\ f(1) = -\frac{2}{3} \quad (A \text{ ترتيب}) \end{cases}$

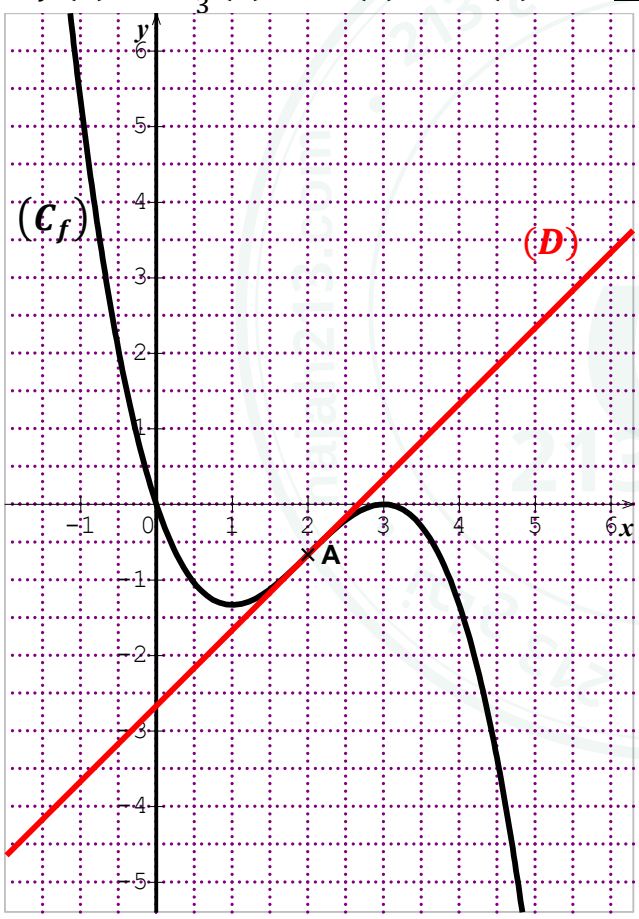
وبالتعويض نجد: $y = 1(x-2) - \frac{2}{3}$،

ومنه: $y = x + \frac{-6-2}{3}$

إذن: $\boxed{(D): y = x - \frac{8}{3}}$.

**5) حساب $f(0)$ ثمّ رسم كلا من $(D)$ و$(C_f)$:**

لدينا: $f(0) = -\frac{1}{3}(0)^3 + 2(0)^2 - 3(0) = 0$




انتهى ـــــــــ مُحبكم في الله أستاذ المادة ـــــــــ بالتوفيق في بكالوريا دورة جوان 2021.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | $\bigcirc$ | + | $\bigcirc$ | - | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{-4}{3}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | + | $\bigcirc$ | - | |

najah213.com • نجاح 213