najah213.com · نجاح 213

مسألة أسية رقم 03

1) عيّن جميع الدّوال $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ التي تحقّق من أجل كل عدد حقيقي $x \notin \{-1,1\}$ العلاقة:

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x....(1)$$

2) نعتبر الدّالّة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{(2-2x^2)f(x)}$.

أ) أحسب نهايات الدالة g عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب) أحسب g' مشتقة الدّالة g .

ج) إستنتج إتجاه تغير الدّالة g . ثم شكل جدول تغيراتها .

3) عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى C_g عند النّقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$.

4) أرسم C_g التّمثيل البياني للدّالّة g والمماس (T) في معلم $O, \vec{i}, \vec{j}$.

الإجابة النموذجية

1) لتكن f هي حل المعادلة (1) . من أجل كل عدد حقيقي $x \notin \{-1,1\}$ ، نقوم بإجراء التّبديلين البسيطين التّاليين للمتغيّر:

- نضع $t = \frac{x-3}{x+1}$ فنجد أنّ $x = \frac{3+t}{1-t}$ من أجل $t \notin \{-1,1\}$ ، والمعادلة (1) تكتب على الشكل:

$$f(t) + f\left(\frac{t-3}{t+1}\right) = \frac{3+t}{1-t}....(*)$$ من أجل كل $x \notin \{-1,1\}$.

- نضع $t = \frac{x+3}{1-x}$ فنجد أنّ $x = \frac{t-3}{1+t}$ من أجل $t \notin \{-1,1\}$ ، والمعادلة (1) تكتب على الشكل:

$$f(t) + f\left(\frac{t+3}{1-t}\right) = \frac{t-3}{1+t}....(**)$$ من أجل كل $x \notin \{-1,1\}$.

- بجمع المعادلتين $(*)$ و $(**)$ طرفاً لطرف نحصل على: $2f(t) + f\left(\frac{t+3}{1-t}\right) + f\left(\frac{t-3}{t+1}\right) = \frac{3+t}{1-t} + \frac{t-3}{1+t}$

ومن كون $f\left(\frac{t+3}{1-t}\right) + f\left(\frac{t-3}{t+1}\right) = t$ (من المعادلة (1))، نحصل على $2f(t) + t = \frac{3+t}{1-t} + \frac{t-3}{1+t}$ ومنه

$f(t) = \frac{4t}{1-t^2} - \frac{t}{2}$ ، وعليه الدّالّة المطلوبة معرّفة على $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ بـ: $f(x) = \frac{4x}{1-x^2} - \frac{x}{2} = \frac{x^3+7x}{2-2x^2}$.

2) أ) نهايات الدّالّة g هي: $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x^3+7x} =$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب أفقي لـ C_g في جوار $-\infty$ ، كذلك $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x^3+7x} = +\infty$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

• الدّالّة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالّتها المشتقّة هي: $g'(x)=(3x^2+7)e^{x^3+7x}$، وكون $e^{x^3+7x}>0$ و $3x^2+7>0$ من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ $g'(x)>0$ وبالتّالي الدّالّة g متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$، وجدول تغيّرات الدّالّة f هو:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

3) معادلة المماس (T) للمنحنى C_g عند النّقطة ذات الفاصلة $x_0=0$ تُعطى بـ: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

أي: $(T): y=7x+1$

4) التّمثيل البياني في الشكل الموالي:

