najah213.com · نجاح 213

الرياضيات في الثانوية

تمارين في الدوال المثلثية

و حساب المثلثات



للسنة أولى ثانوي

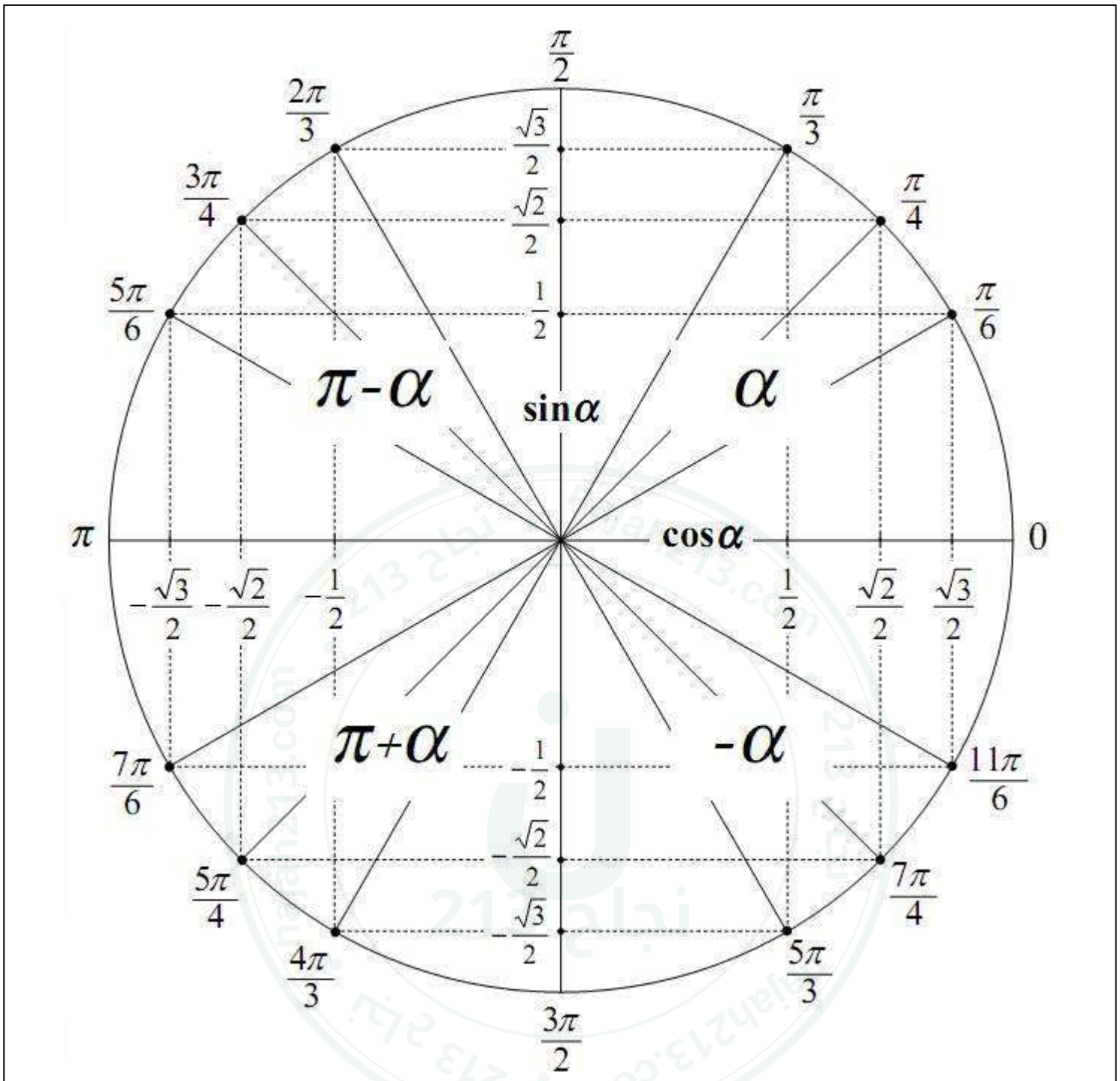
كتابة :

الأستاذ حنـــاش نبيـــل

Avril 2022

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com



بعض العلاقات المثلثية	
$-1 \le \cos x \le 1$	$-1 \le \sin x \le 1$
$\cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$	$\sin(x + 2\pi k) = \sin(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$
$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	

تمارين نموذجية في الدوال المثلثية و حساب المثلثات- كتابة الأستاذ : حناش نبيل

جدول القيم المضبوطة لجيب تمام و جيب الأقواس الشهيرة (للحفظ) :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

التمرين رقم 01 :

1- علم صور الأعداد التالية على الدائرة المثلثية مع الشرح :

$$-\pi/4 \; ، \; 2\pi/3 \; ، \; 3\pi/2 \; ، \; 7\pi/2 \; ، \; 11\pi/4 \; ، \; -29\pi/4 \; ، \; -133\pi/3 \; ، \; 2019\pi/3 \; ، \; -2021\pi/2 \; ،$$

$$3001\pi \; ، \; 2020\pi \; ، \; 25\pi/6 \; ، \; 11\pi/3 \; ، \; -31\pi/4 \; .$$

2- أحسب القيم المضبوطة لجيب تمام و جيب الأعداد السابقة .

3- إذا كان $\sin x = \frac{3}{5}$ حيث $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$ ؛ أوجد قيمة $\cos x$.

حل مقترح :

1- التعليم على الدائرة المثلثية :

$-\pi/4$ عدد سالب ، إذن A تتحرك في الإتجاه غير المباشر و تقطع قوسا طوله $\pi/4$.

$2\pi/3$ عدد موجب ، إذن B تتحرك في الإتجاه المباشر و تقطع قوسا طوله $2\pi/3$ و نكتب :

$2\pi/3 = \frac{3\pi-\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ ، و منه صورتا العددين $\frac{\pi}{3}$ و $2\pi/3$ متناظرتان بالنسبة إلى محور التراتيب .

$3\pi/2$ عدد موجب ، إذن C تتحرك في الإتجاه المباشر و تقطع قوسا طوله $3\pi/2$ و نكتب :

تمارين نموذجية في الدوال المثلثية و حساب المثلثات- كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$3\pi/2 = \frac{4\pi-\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{2}$ ، و منه للعددين $3\pi/2$ و $-\frac{\pi}{2}$ نفس الصورة على الدائرة المثلثية

و هي النقطة C لأن 2π يمثل دورة .

$7\pi/2$ عدد موجب ، إذن D تتحرك في الإتجاه المباشر و تقطع قوسا طوله $7\pi/2$ و نكتب :

$7\pi/2 = \frac{8\pi-\pi}{2} = \frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 4\pi - \frac{\pi}{2}$ ، و منه للعددين $-\frac{\pi}{2}$ و $7\pi/2$ نفس الصورة على الدائرة

المثلثية و هي النقطة D .

$11\pi/4$ عدد موجب ، إذن E تتحرك في الإتجاه المباشر و تقطع قوسا طوله $11\pi/4$ و نكتب :

$11\pi/4 = \frac{8\pi+3\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4}$ ، و منه للعددين $\frac{3\pi}{4}$ و $11\pi/4$ نفس الصورة على الدائرة

المثلثية و هي النقطة E بحيث : $3\pi/4 = \frac{4\pi-\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$ أي أن صورتي العددين $3\pi/4$ و $\frac{\pi}{4}$ متناظرتان

بالنسبة إلى محور التراتيب .

$-29\pi/4$ عدد سالب ، إذن F تتحرك في الإتجاه غير المباشر و تقطع قوسا طوله $29\pi/4$ و نكتب :

$-29\pi/4 = \frac{-32\pi+3\pi}{4} = -8\pi + \frac{3\pi}{4}$ ، و منه للعددين $\frac{3\pi}{4}$ و $-29\pi/4$ نفس الصورة على الدائرة

المثلثية و هي النقطة F بحيث :

$3\pi/4 = \frac{4\pi-\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$ و منه صورتا العددين $\frac{\pi}{4}$ و $3\pi/4$ متناظرتان بالنسبة إلى محور التراتيب .

$-133\pi/3$ عدد سالب ، إذن G تتحرك في الإتجاه غير المباشر و تقطع قوسا طوله $133\pi/3$ و نكتب :

$-133\pi/3 = -\frac{44\times 3\pi+\pi}{3} = -44\pi + \frac{\pi}{3}$ ، و منه للعددين $-133\pi/3$ و $\frac{\pi}{3}$ نفس الصورة على الدائرة

المثلثية و هي النقطة G (لأن -44π يمثل 22 دورة في الإتجاه غير المباشر) .

$2019\pi/3$ عدد موجب ، إذن H تتحرك في الإتجاه المباشر و تقطع قوسا طوله $2019\pi/3$ و نكتب :

$2019\pi/3 = \dfrac{673\times 3\pi}{3} = 673\pi = 672\pi + \pi$ ، و منه للعددين $2019\pi/3$ و π نفس الصورة على الدائرة المثلثية و هي النقطة H (لأن 672π يمثل 336 دورة في الإتجاه المباشر) .

$-2021\pi/2$ عدد سالب ، إذن N تتحرك في الإتجاه غير المباشر و تقطع قوسا طوله $2021\pi/2$ و نكتب :

$-2021\pi/2 = -\dfrac{1010\times 2\pi + \pi}{2} = -1010\pi - \dfrac{\pi}{2}$ ، و منه للعددين $-2021\pi/2$ و $-\dfrac{\pi}{2}$ نفس الصورة على الدائرة المثلثية و هي النقطة N (لأن -1010π يمثل 505 دورة في الإتجاه غير المباشر) .

3001π عدد موجب ، إذن M تتحرك في الإتجاه المباشر و تقطع قوسا طوله 3001π و نكتب :

$3001\pi = 3000\pi + \pi = 1500\times 2\pi + \pi$ و منه للعددين 3001π و π نفس الصورة على الدائرة المثلثية و هي النقطة M لأن $1500\times 2\pi$ يمثل 1500 دورة في الإتجاه المباشر .

2020π عدد موجب ، إذن P تتحرك في الإتجاه المباشر و تقطع قوسا طوله 2020π و نكتب :

$2020\pi = 1010\times 2\pi + 0$ و منه للعددين 2020π و 0 نفس الصورة على الدائرة المثلثية و هي النقطة P لأن $1010\times 2\pi$ يمثل 1010 دورة في الإتجاه المباشر .

$25\pi/6$ عدد موجب ، إذن Q تتحرك في الإتجاه المباشر و تقطع قوسا طوله $25\pi/6$ و نكتب :

$25\pi/6 = \dfrac{24\pi + \pi}{6} = 4\pi + \dfrac{\pi}{6}$ و منه للعددين $25\pi/6$ و $\dfrac{\pi}{6}$ نفس الصورة على الدائرة المثلثية و هي النقطة Q لأن 4π يمثل دورتين في الإتجاه المباشر .

$11\pi/3$ عدد موجب ، إذن R تتحرك في الإتجاه المباشر و تقطع قوسا طوله $11\pi/3$ و نكتب :

$11\pi/3 = \dfrac{12\pi - \pi}{3} = 4\pi - \dfrac{\pi}{3}$ و منه للعددين $11\pi/3$ و $-\dfrac{\pi}{3}$ نفس الصورة على الدائرة المثلثية و هي النقطة

R لأن $4\pi = 2 \times 2\pi$ يمثل دورتين في الإتجاه المباشر .

$-31\pi/4$ عدد سالب ، إذن S تتحرك في الإتجاه غير المباشر و تقطع قوسا طوله $31\pi/4$ و نكتب :

$-31\pi/4 = \dfrac{-32\pi + \pi}{4} = -8\pi + \dfrac{\pi}{4}$ و منه للعددين $-31\pi/4$ و $\dfrac{\pi}{4}$ نفس الصورة على الدائرة المثلثية و هي

النقطة S لأن $-8\pi = 4 \times (-2\pi)$ يمثل 4 دورات في الإتجاه غير المباشر .

2- حساب جيب تمام و جيب الأعداد السابقة :

$$\cos\left(-\pi/4\right) = \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2 \quad \text{و} \quad \sin\left(-\pi/4\right) = -\sin \pi/4 = -\sqrt{2}/2$$

$$\cos\left(2\pi/3\right) = \cos\left(\pi - \pi/3\right) = -\cos \pi/3 = -1/2$$

$$\sin\left(2\pi/3\right) = \sin\left(\pi - \pi/3\right) = \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$$

$$\cos\left(3\pi/2\right) = \cos\left(\pi + \pi/2\right) = -\cos \pi/2 = 0$$

$$\sin\left(3\pi/2\right) = \sin\left(\pi + \pi/2\right) = -\sin \pi/2 = -1$$

أو نكتب $\cos\left(7\pi/2\right) = \cos\left(4\pi - \pi/2\right) = \cos\left(-\pi/2\right) = \cos \pi/2 = 0$

$$\cos\left(7\pi/2\right) = \cos\left(3\pi + \pi/2\right) = \cos\left(2\pi + \left(\pi + \pi/2\right)\right) = \cos\left(\pi + \pi/2\right) = -\cos \pi/2 = 0$$

أو نكتب $\sin\left(7\pi/2\right) = \sin\left(4\pi - \pi/2\right) = \sin\left(-\pi/2\right) = -\sin \pi/2 = -1$

تمارين نموذجية في الدوال المثلثية و حساب المثلثات- كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$$\sin\left(7\pi/2\right)=\sin\left(3\pi+\pi/2\right)=\sin\left(2\pi+\left(\pi+\pi/2\right)\right)=\sin\left(\pi+\pi/2\right)=-\sin\pi/2=-1$$

$$\cos\left(11\pi/4\right)=\cos\left(2\pi+3\pi/4\right)=\cos\left(3\pi/4\right)=\cos\left(\pi-\pi/4\right)=-\cos\pi/4=-\sqrt{2}/2$$

$$\sin\left(11\pi/4\right)=\sin\left(2\pi+3\pi/4\right)=\sin\left(3\pi/4\right)=\sin\left(\pi-\pi/4\right)=\sin\pi/4=\sqrt{2}/2$$

$$\cos\left(-29\pi/4\right)=\cos\left(-8\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(3\pi/4\right)=\cos\left(\pi-\pi/4\right)=-\cos\pi/4=-\sqrt{2}/2$$

أو نكتب كمايلي : (لأن الدالة جيب تمام $x\longmapsto\cos x$ زوجية)

$$\cos\left(-29\pi/4\right)=\cos\left(29\pi/4\right)=\cos\left(\frac{28\pi+\pi}{4}\right)=\cos\left(7\pi+\pi/4\right)=-\cos\pi/4=-\sqrt{2}/2$$

$$\sin\left(-29\pi/4\right)=\sin\left(-8\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(3\pi/4\right)=\sin\left(\pi-\pi/4\right)=\sin\pi/4=\sqrt{2}/2$$

أو نكتب كمايلي : (لأن الدالة جيب $x\longmapsto\sin x$ فردية)

$$\sin\left(-29\pi/4\right)=-\sin\left(29\pi/4\right)=-\sin\left(\frac{28\pi+\pi}{4}\right)=-\sin\left(7\pi+\pi/4\right)=\sin\pi/4=\sqrt{2}/2$$

$$\cos\left(-133\pi/3\right)=\cos\left(-44\pi+\pi/3\right)=\cos\pi/3=1/2$$

و $$\sin\left(-133\pi/3\right)=\sin\left(-44\pi+\pi/3\right)=\sin\pi/3=\sqrt{3}/2$$

$$\cos\left(2019\pi/3\right)=\cos\left(673\pi\right)=\cos\left(672\pi+\pi\right)=\cos\pi=-1$$

و $$\sin\left(2019\pi/3\right)=\sin\left(673\pi\right)=\sin\left(672\pi+\pi\right)=\sin\pi=0$$

$$\cos\left(-2021\pi/2\right)=\cos\left(-1010\pi-\pi/2\right)=\cos\left(-\pi/2\right)=\cos\pi/2=0$$

أو نكتب : $\cos\left(-2021\pi/2\right)=\cos\left(2021\pi/2\right)=\cos\left(1010\pi+\pi/2\right)=\cos\pi/2=0$

أو نكتب : $\sin\left(-2021\pi/2\right)=\sin\left(-1010\pi-\pi/2\right)=\sin\left(-\pi/2\right)=-\sin\pi/2=-1$

$$\sin\left(-2021\pi/2\right)=-\sin\left(2021\pi/2\right)=-\sin\left(1010\pi+\pi/2\right)=-\sin\pi/2=-1$$

$$\cos\left(3001\pi\right)=\cos\left(3000\pi+\pi\right)=\cos\pi=-1$$

و $\sin\left(3001\pi\right)=\sin\left(3000\pi+\pi\right)=\sin\pi=0$

بما أن $2020\pi=2\times1010\pi+0$ فإن : $\cos\left(2020\pi\right)=\cos0=1$ و كذلك

$\sin\left(2020\pi\right)=\sin0=0$.

$\cos\left(25\pi/6\right)=\cos\left(4\pi+\pi/6\right)=\cos\pi/6=\sqrt{3}/2$ و كذلك

$\sin\left(25\pi/6\right)=\sin\left(4\pi+\pi/6\right)=\sin\pi/6=1/2$.

ملاحظة هامة : بالنسبة لتعليم النقط على الدائرة المثلثية و كذلك بالنسبة لحساب قيم الـ cos و الـ sin للأعداد السابقة يمكن الإعتماد على كتابات و صيغ أخرى غير الواردة في الحل أعلاه ؛ مثلا :

لحساب $\sin\frac{3\pi}{2}$ يمكن ملاحظة الصيغة : $\frac{3\pi}{2}=\pi+\frac{\pi}{2}$ و منه

أو ملاحظة الصيغة : $\sin\frac{3\pi}{2}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$

$$\frac{3\pi}{2}=\frac{4\pi-\pi}{2}=\frac{4\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=2\pi-\frac{\pi}{2}$$ و منه

$\sin\frac{3\pi}{2}=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$.

تمارين نموذجية في الدوال المثلثية و حساب المثلثات- كتابة الأستاذ : حناش نبيل

3- إذا كان $\sin x = \frac{3}{5}$ حيث $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$ ؛ إيجاد قيمة $\cos x$:

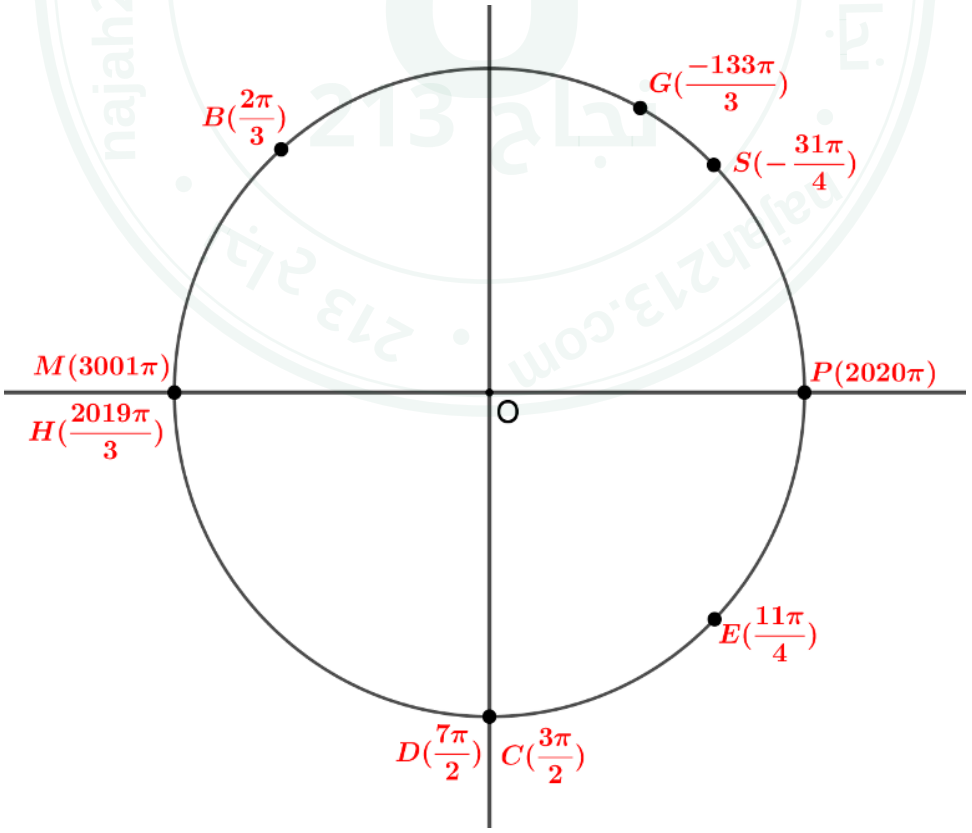
من أجل كل عدد حقيقي x : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ و منه من أجل $\sin x = \frac{3}{5}$ ينتج :

$\cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$ أي $\cos^2 x = 1 - 9/25$ أي $\cos^2 x = 16/25$ و منه نجد :

$\cos x = 4/5$ أو $\cos x = -4/5$ ؛ لكن $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (صورة العدد x إما في الربع الثاني و إما في الربع الثالث من الدائرة المثلثية) و منه $\cos x \leq 0$ ؛ إذن $\cos x = 4/5$ مرفوض .

نتيجة : $\cos x = -4/5$

تعليم بعض النقاط السابقة على الدائرة المثلثية :



تمارين نموذجية في الدوال المثلثية و حساب المثلثات- كتابة الأستاذ : حناش نبيل

التمرين رقم 02 :

1- x عنصر من المجال $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ ؛ إذا علمت أن $\sin x=\frac{2}{3}$ ، أحسب $\cos x$.

2- x عنصر من المجال $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ ؛ إذا علمت أن $\cos x=-\frac{3}{5}$ ، أحسب $\sin x$.

3- x عنصر من المجال $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ ؛ إذا علمت أن $\cos x=\frac{2}{7}$ ، أحسب $\sin x$.

4- باستعمال الدائرة المثلثية ؛ حل في المجال $[0,2\pi]$ المعادلات التالية :

أ) $\cos x=0$ ب) $\cos x=\frac{1}{2}$ ج) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ د) $\cos x=-1$ هـ) $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

أ) $\sin x=\frac{1}{2}$ ب) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ج) $\sin x=1$ د) $\sin x=-1$

حل مقترح :

1- نستعمل العلاقة المثلثية : من أجل كل عدد حقيقي x : $\boxed{\cos^2 x+\sin^2 x=1}$

إذن من أجل $\sin x=\frac{2}{3}$ نجد : $\cos^2 x=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2$ أي $\cos^2 x=1-\frac{4}{9}$ أي $\cos^2 x=\frac{5}{9}$ و منه نجد $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{3}$ أو $\cos x=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ ، لكن $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ (الربع الثاني) أين يكون $\cos x\le 0$ و بالتالي فإن $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{3}$ مرفوضة ؛ إذن نتحصل على : $\boxed{\cos x=-\frac{\sqrt{5}}{3}}$.

2- من أجل كل عدد حقيقي x : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ ، إذن من أجل $\cos x=-\frac{3}{5}$ نجد :

تمارين نموذجية في الدوال المثلثية و حساب المثلثات- كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$\sin^2 x = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2$ أي $\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25}$ أي $\sin^2 x = \frac{16}{9}$ و منه نجد $\sin x = \frac{4}{3}$ أو

$\sin x = -\frac{4}{3}$ ، لكن $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ (الربع الثالث) أين يكون $\sin x \leq 0$ ؛ و بالتالي فإن $\sin x = \frac{4}{3}$

مرفوضة ؛ إذن نتحصل على : $\boxed{\sin x = -\frac{4}{3}}$.

3- من أجل $\cos x = \frac{2}{7}$ نجد : $\sin^2 x = 1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2$ أي $\sin^2 x = 1 - \frac{4}{49}$ أي $\sin^2 x = \frac{45}{49}$ و منه

نجد $\sin x = \frac{\sqrt{45}}{7}$ أو $\sin x = -\frac{\sqrt{45}}{7}$ معناه : $\sin x = \frac{3\sqrt{5}}{7}$ أو $\sin x = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$ ؛

لكن $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ (الربع الرابع) أين يكون $\sin x \leq 0$ و بالتالي فإن $\sin x = \frac{3\sqrt{5}}{7}$ مرفوضة ؛ إذن

نتحصل على : $\boxed{\sin x = -\frac{3\sqrt{5}}{7}}$.

4- باستعمال الدائرة المثلثية ؛ حل في المجال $[0;2\pi]$ المعادلات التالية :

المجال $[0;2\pi]$ طوله 2π ، يوافق دورة كاملة على الدائرة المثلثية في الإتجاه المباشر حيث :

أ) $\cos x = 0$: محققة إذا و فقط إذا كان : $\boxed{x = \pi/2}$ أو $x = \frac{\pi}{2} + \pi$ أي $\boxed{x = \frac{3\pi}{2}}$.

ب) $\cos x = 1/2$: محققة إذا و فقط إذا كان : $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ (لأن جيب التمام يكون موجبا

فقط في الربعين الأول و الرابع) ؛ أي : $\boxed{x = \frac{\pi}{3}}$ أو $\boxed{x = \frac{5\pi}{3}}$.

جـ) $\cos x = -\sqrt{3}/2$: محققة إذا و فقط إذا كان : $x = \pi - \frac{\pi}{6}$ (الربع الثاني) أو $x = \pi + \frac{\pi}{6}$)

الربع الثالث) ؛ أي : $\boxed{x=\frac{5\pi}{6}}$ أو $\boxed{x=\frac{7\pi}{6}}$.

د) $\cos x=-1$: في المجال $[0;2\pi]$ ؛ $\cos x=-1$ محققة إذا و فقط إذا كان : $\boxed{x=\pi}$

✓ ماذا عن المعادلة $\cos x=1$ في المجال $[0;2\pi]$ ؟ (الجواب : $\boxed{x=0}$ أو $\boxed{x=2\pi}$) .

هـ) $\cos x=1/\sqrt{2}$: نكتب النسبة بمقام ناطق لنتحصل على المعادلة : $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ؛ إذن $x=\frac{\pi}{4}$ أو $x=2\pi-\frac{\pi}{4}$ (لأن جيب التمام يكون موجبا فقط في الربعين الأول و الرابع) ؛ أي : $\boxed{x=\frac{\pi}{4}}$ أو $\boxed{x=\frac{7\pi}{4}}$.

أ) $\sin x=1/2$: محققة إذا و فقط إذا كان : $x=\frac{\pi}{6}$ أو $x=\pi-\frac{\pi}{6}$ (لأن الجيب يكون موجبا فقط في الربعين الأول و الثاني من الدائرة المثلثية) ؛ أي : $\boxed{x=\frac{\pi}{6}}$ أو $\boxed{x=\frac{5\pi}{6}}$.

ب) $\sin x=-\sqrt{3}/2$: محققة إذا و فقط إذا كان : $x=\pi+\frac{\pi}{3}$ أو $x=2\pi-\frac{\pi}{3}$ (لأن الجيب يكون سالبا فقط في الربعين الثالث و الرابع من الدائرة المثلثية) ؛ أي : $\boxed{x=\frac{4\pi}{3}}$ أو $\boxed{x=\frac{5\pi}{3}}$.

ملاحظة : القيس الشهير α بحيث : $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ هو $\boxed{\alpha=\frac{\pi}{3}}$.

جـ) $\sin x=1$: محققة في المجال $[0;2\pi]$ إذا و فقط إذا كان : $\boxed{x=\frac{\pi}{2}}$

✓ ماذا عن المعادلة $\sin x=-1$ في المجال $[0;2\pi]$ ؟ (الجواب : قيم x المطلوبة هي : $x=\frac{3\pi}{2}$)

تمارين نموذجية في الدوال المثلثية و حساب المثلثات- كتابة الأستاذ : حناش نبيل

التمرين رقم 03 :

x عدد حقيقي . $A(x)$ و $B(x)$ عبارتان معرفتان بـ :

$$A(x)=\cos\left(\frac{17\pi}{2}\right)-\sin(\pi+x)+\cos(11\pi+x)$$

$$B(x)=\cos(-x)+\sin(7\pi-x)-\sin(3\pi)$$

1- بين أن : $A(x)=\sin x-\cos x$ و $B(x)=\cos x+\sin x$

2- بين أن : $A(x).B(x)=1-2\cos^2 x$

3- أحسب $\cos x$ و $\sin x$ علما أن : $A(x)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ و $B(x)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ و $x\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

ثم استنتج $\tan x$.

حل مقترح :

1- نبين أن : $A(x)=\sin x-\cos x$ و $B(x)=\cos x+\sin x$

بكتابة : $\frac{17\pi}{2}=\frac{16\pi+\pi}{2}=8\pi+\frac{\pi}{2}$ نتحصل على : $\cos\left(\frac{17\pi}{2}\right)=\cos\left(8\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}$ ؛

إذن : $\cos\left(\frac{17\pi}{2}\right)=0$.

نعلم أن : $\sin(\pi+x)=-\sin x$ و بكتابة : $11\pi+x=10\pi+(\pi+x)$ ينتج :

$\cos(11\pi+x)=\cos(10\pi+(\pi+x))=\cos(\pi+x)=-\cos x$ ؛ إذن تصبح العبارة $A(x)$ من الشكل : $A(x)=0-(-\sin x)-\cos x$ ، معناه : $\boxed{A(x)=\sin x-\cos x}$ و هو المطلوب .

نعلم أنه من أجل عدد حقيقي x فإن : $\cos(-x)=\cos x$ (الدالة $\cos$ زوجية) و من جهة أخرى :

تمارين نموذجية في الدوال المثلثية و حساب المثلثات- **كتابة الأستاذ : حناش نبيل**

$7\pi - x = 6\pi + (\pi - x)$ و منه نجد : $\sin(7\pi - x) = \sin(6\pi + (\pi - x)) = \sin(\pi - x)$ أي

$\sin(7\pi - x) = \sin x$.

من جهة أخرى : $\sin(3\pi) = 0$ لأن : $\sin(3\pi) = \sin(2\pi + \pi) = \sin\pi = 0$ ؛ و بصفة عامة فإنه

من أجل كل عدد $k \in \mathbb{Z}$ ؛ لدينا : $\sin(k\pi) = 0$ و $\cos(k\pi) = 1$ إذا كان k زوجيا و

$\cos(k\pi) = -1$ إذا كان k فرديا .

إذن نتحصل على : $B(x) = \cos x + \sin x - 0$ أي : $\boxed{B(x) = \cos x + \sin x}$ و هو المطلوب .

2- نبين أن : $A(x).B(x) = 1 - 2\cos^2 x$

من السؤال 1- نعلم أن : $A(x) = \sin x - \cos x$ و $B(x) = \cos x + \sin x$ ؛ إذن نجد :

$A(x).B(x) = (\sin x - \cos x)(\cos x + \sin x)$ و بالنشر نتحصل على :

$A(x).B(x) = \sin x\cos x + \sin^2 x - \cos^2 x - \cos x\sin x$ أي $A(x).B(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$

؛ بحيث نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

أي $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ و منه نجد : $A(x).B(x) = 1 - \cos^2 x - \cos^2 x$ أي

$\boxed{A(x).B(x) = 1 - 2\cos^2 x}$ و هو المطلوب .

3- حساب $\cos x$ و $\sin x$ علما أن : $A(x) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ و $B(x) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ و $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$

ثم استنتاج $\tan x$:

من نتيجة السؤال 2- نجد : $\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = 1 - 2\cos^2 x$ أي $\dfrac{\sqrt{3}^2 - 1^2}{4} = 1 - 2\cos^2 x$ أي

$\dfrac{2}{4} = 1 - 2\cos^2 x$ أي $2\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}$ أي $2\cos^2 x = \frac{1}{2}$ و منه $\cos^2 x = \frac{1}{4}$ ؛ إذن :

تمارين نموذجية في الدوال المثلثية و حساب المثلثات- كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$\cos x = \frac{1}{2}$ أو $\cos x = -\frac{1}{2}$ ؛ لكن بما أن $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ (الربع الثاني من الدائرة المثلثية) فإن

$\cos x < 0$ و بالتالي : $\cos x = \frac{1}{2}$ مرفوضة ؛ إذن نجد : $\boxed{\cos x = -\frac{1}{2}}$.

لإيجاد قيمة $\sin x$ يمكن إستعمال العلاقة $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ، أو باستعمال العبارة $A(x)$ أو $B(x)$:

$A(x) = \sin x - \cos x$ تكافئ $\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \sin x - \left(-\frac{1}{2}\right)$ أي $\sin x = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{1}{2}$ و منه نجد

$\boxed{\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

✓ إذا كان $\cos x \neq 0$ فإن : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ؛ و منه $\tan x = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}$ أي $\boxed{\tan x = -\sqrt{3}}$. (لاحظ أن الظل **لا يحقق** بالضرورة الحصر $-1 \leq \tan x \leq 1$) .

تمارين نموذجية في الدوال المثلثية و حساب المثلثات- كتابة الأستاذ : حناش نبيل

التمرين رقم 04 :

1- مثل صورة العدد α على الدائرة المثلثية حيث : $\alpha = \dfrac{521\pi}{3}$.

2- استنتج القيم المضبوطة لكل من : $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$.

3- نضع : $A(x) = \cos(3\pi - x) - 2\sin(x - \pi) + \cos(80\pi + x) - 2\cos(-x)$ حيث $x \in \mathbb{R}$

أ) بين أن : $A(x) = 2(\sin x - \cos x)$ ثم عين قيمة $A\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

ب) باستعمال الدائرة المثلثية ؛ حل المعادلة : $A(x) = \sqrt{3} - 1$ علما أن : $x \in [0;2\pi]$.

حل مقترح :

1- تمثيل صورة العدد α على الدائرة المثلثية حيث : $\alpha = \dfrac{521\pi}{3}$

لتكن M هي صورة العدد α على الدائرة المثلثية ؛ إذن بكتابة :

$\dfrac{521\pi}{3} = \dfrac{522\pi - \pi}{3} = \dfrac{522\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = 174\pi - \dfrac{\pi}{3}$ ؛ بما أن $174\pi = 87 \times 2\pi$ أي أن 174π يمثل 87 دورة فإن : M هي صورة العدد $\boxed{-\dfrac{\pi}{3}}$.

2- استنتاج القيم المضبوطة لكل من : $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$.

$\cos\alpha = \cos\left(\dfrac{521\pi}{3}\right) = \cos\left(174\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}$ لأن الدالة cos دورية و دورها هو 2π ثم لأن الدالة cos هي دالة زوجية ؛ و بالتالي نتحصل على : $\boxed{\cos\alpha = 1/2}$.

$\sin\alpha = \sin\left(\dfrac{521\pi}{3}\right) = \sin\left(174\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{3}$ لأن الدالة sin دورية و دورها هو

تمارين نموذجية في الدوال المثلثية و حساب المثلثات- **كتابة الأستاذ : حناش نبيل**

2π ثم لأن الدالة $\sin$ هي دالة فردية ؛ و بالتالي نتحصل على : $\boxed{\sin\alpha=-\sqrt{3}/2}$.

3- نضع : $A(x)=\cos(3\pi-x)-2\sin(x-\pi)+\cos(80\pi+x)-2\cos(-x)$

أ) نبين أن : $A(x)=2(\sin x-\cos x)$ ثم نعين قيمة $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$:

بكتابة : $\boxed{3\pi-x=2\pi+(\pi-x)}$ نجد :

$\cos(3\pi-x)=\cos(2\pi+(\pi-x))=\cos(\pi-x)=-\cos x$ و كذلك نكتب :

$\sin(x-\pi)=\sin(-(\pi-x))=-\sin(\pi-x)=-\sin x$ لأن الدالة $\sin$ فردية ثم لأنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $\sin(\pi-x)=\sin x$.

$\cos(80\pi+x)=\cos x$ لأن الدالة $\cos$ دورية و دورها هو 2π ($80\pi=2k\pi$ حيث $k=40$) .

$\cos(-x)=\cos x$ لأن الدالة $\cos$ هي دالة زوجية .

إذن ينتج : $A(x)=-\cos x+2\sin x+\cos x-2\cos x$ تكافئ $A(x)=2\sin x-2\cos x$ تكافئ

$\boxed{A(x)=2(\sin x-\cos x)}$.

تعيين قيمة $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$:

إذن بكتابة : $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2\left(\sin\frac{3\pi}{4}-\cos\frac{3\pi}{4}\right)$ ؛ نجد : $\frac{3\pi}{4}=\frac{4\pi-\pi}{4}=\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$

$\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ؛

إذن نجد : $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ أي $\boxed{A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}}$.

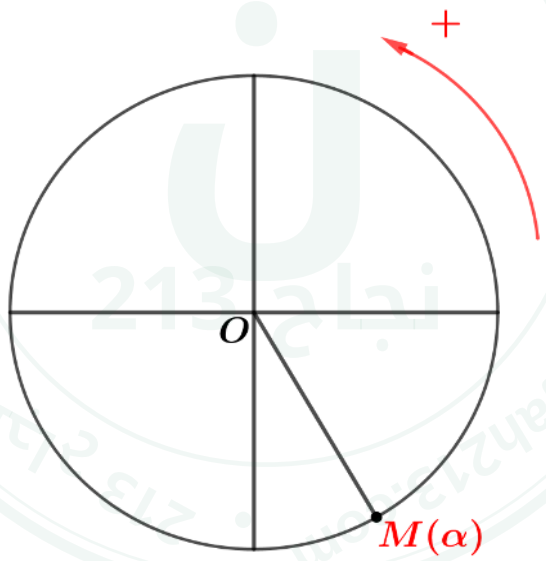
ب) باستعمال الدائرة المثلثية ؛ نحل المعادلة : $A(x)=0$ علما أن $x\in[0;2\pi]$.

$A(x)=0$ تكافئ : $2(\sin x-\cos x)=0$ تكافئ $\sin x-\cos x=0$ تكافئ $\boxed{\cos x=\sin x}$

أي أن جيب تمام العدد x من المجال $[0;2\pi]$ و جيبه متساويان في القيمة ؛ باستعمال الدائرة المثلثية نجد أن :

$x=\frac{\pi}{4}$ (في الربع الأول حيث $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}/2$) أو $x=\pi+\frac{\pi}{4}$ أي $x=\frac{5\pi}{4}$ (في الربع الثالث حيث $\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}/2$ و $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}/2$) .

إذن مجموعة حلول المعادلة $\cos x=\sin x$ في المجال $[0;2\pi]$ هي : $S=\left\{\frac{\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{4}\right\}$



تمارين نموذجية في الدوال المثلثية و حساب المثلثات- كتابة الأستاذ : حناش نبيل

التمرين رقم 05 :

إذا علمت أن : $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

✓ عين القيمة المضبوطة لـ : $\cos\frac{\pi}{12}$ ، $\tan\frac{\pi}{12}$.

✓ استنتج القيم المضبوطة لـ : $\sin\frac{11\pi}{12}$ ، $\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)$ ، $\cos\frac{13\pi}{12}$ ، $\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$ ،

$\sin\frac{61\pi}{12}$ ، $\tan\frac{2017\pi}{12}$.

حل مقترح :

✓ تعيين القيمة المضبوطة لـ : $\cos\frac{\pi}{12}$ ، $\tan\frac{\pi}{12}$:

لدينا : $\cos^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{\pi}{12}=1$ و منه نجد أي $\cos^2\frac{\pi}{12}=1-\sin^2\frac{\pi}{12}$

أي $\cos^2\frac{\pi}{12}=1-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$ أي $\cos^2\frac{\pi}{12}=1-\frac{6-2\sqrt{6}\times\sqrt{2}+2}{16}$

أي $\cos^2\frac{\pi}{12}=1-\frac{8-2\sqrt{12}}{16}$ أي $\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{8+4\sqrt{3}}{16}$ و منه نجد $\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+2}{4}$

$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$ أو $\cos\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$ ؛ لكن $\frac{\pi}{12}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (صورته في الربع الأول) و

منه $\cos\frac{\pi}{12}\geq 0$ ؛ إذن $\cos\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$ مرفوضة ؛ فنجد : $\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}}$.

إذا كان $\cos x\neq 0$ فإن ظل العدد الحقيقي x هو النسبة : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و منه نجد :

تمارين نموذجية في الدوال المثلثية و حساب المثلثات- كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\pi/12}{\cos\pi/12}$ أي $\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}$ و منه $\boxed{\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2}}$.

✓ إستنتاج القيم المضبوطة لـ : $\sin\frac{11\pi}{12}$ ، $\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)$ ، $\cos\frac{13\pi}{12}$ ، $\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$ ،

$\sin\frac{61\pi}{12}$ ، $\tan\frac{2017\pi}{12}$:

بكتابة : $\frac{11\pi}{12}=\frac{12\pi-\pi}{12}=\frac{12\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\pi-\frac{\pi}{12}$ نجد :

$\sin\frac{11\pi}{12}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ؛ و بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$\sin(-x)=-\sin x$ فإن : $\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)=-\sin\frac{11\pi}{12}=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

بكتابة : $\frac{13\pi}{12}=\frac{12\pi+\pi}{12}=\frac{12\pi}{12}+\frac{\pi}{12}=\pi+\frac{\pi}{12}$ نجد :

$\cos\frac{13\pi}{12}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)=-\cos\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$ ؛ و بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$\cos(-x)=\cos x$ فإن : $\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right)=\cos\frac{13\pi}{12}=-\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$.

بكتابة : $\frac{61\pi}{12}=\frac{12\times5\pi+\pi}{12}=5\pi+\frac{\pi}{12}$ ينتج :

$\sin\frac{61\pi}{12}=\sin\left(5\pi+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(4\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)$ لأنه من أجل x عدد حقيقي

لدينا : $\sin(2\pi k+x)=\sin x$ مع $k\in\mathbb{Z}$ (هنا $x=\pi+\frac{\pi}{12}$ و $k=2$) حيث :

$\sin\dfrac{61\pi}{12}=-\sin\dfrac{\pi}{12}=-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ فإنه ينتج : $\sin(\pi+x)=-\sin x$

$\boxed{\tan\dfrac{2017\pi}{12}=\dfrac{\sin\dfrac{2017\pi}{12}}{\cos\dfrac{2017\pi}{12}}}$ ؛ و بكتابة : $\dfrac{2017\pi}{12}=\dfrac{12\times168\pi+\pi}{12}=168\pi+\dfrac{\pi}{12}$ نجد :

$\sin\dfrac{2017\pi}{12}=\sin\left(168\pi+\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ لأن $168\pi=2\times84\pi$ من الشكل $2\pi k$

حيث $k=84\in\mathbb{Z}$ ، و كذلك نجد :

$\cos\dfrac{2017\pi}{12}=\cos\left(168\pi+\dfrac{\pi}{12}\right)=\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$ ؛ إذن ينتج :

$\boxed{\tan\dfrac{2017\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{3}+2}}}$.

تمارين نموذجية في الدوال المثلثية و حساب المثلثات- كتابة الأستاذ : حناش نبيل

التمرين رقم 06 :

1- إذا علمت أن $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ، عين الأعداد : $\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)$ ، $\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)$ ، $\cos\left(\frac{31\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{31\pi}{8}\right)$.

2- أثبت صحة المساواة : $-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{31\pi}{8}\right)=0$

3- من أجل كل عدد حقيقي x ، نضع :

$$A(x)=\sin(13\pi-x)+2\sin(-x)-\sin(8\pi-x)-2\cos(x-\pi)$$

أ- بين أن : $A(x)=2\cos x$

ب- حل في المجال $[-\pi;\pi]$ المعادلات : $A(x)=-\sqrt{3}$ ، $A(x)=-1$ ، $A(x)=1$ ، $A(x)=0$.

4- x عدد حقيقي من المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ ، عين $\sin x$ إذا علمت أن $3\cos x=\frac{1}{3}$.

حل مقترح :

1- تعيين جيب تمام و جيب الأعداد :

لأن $\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{8\pi+\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{8\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

من أجل x عدد حقيقي ؛ إذن : $\cos(\pi+x)=-\cos(x)$

$$\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

أي $\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}\right)=1-\cos^2\left(\frac{9\pi}{8}\right)=1-\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2$ و منه $\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}\right)=1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

إذن ؛ $\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ أو $\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$:

$$\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

تمارين نموذجية في الدوال المثلثية و حساب المثلثات- كتابة الأستاذ : حناش نبيل

$\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ مرفوض لأن $\frac{9\pi}{8}=\pi+\frac{\pi}{8}\in\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ (صورة العدد $\frac{9\pi}{8}$ موجودة في الربع الرابع من الدائرة المثلثية) و بالتالي $\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\le 0$ ؛ إذن نستنتج أن : $\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

$$\cos\left(\frac{31\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{32\pi-\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{32\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{8}$$

لأن $4\pi=2\times 2\pi$ مضاعف لـ 2π (عدد الدورات هو 2) و نطبق العلاقة $\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$

إذن بما أن $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ من أجل α عدد حقيقي ، فإنه ينتج : $\cos\left(\frac{31\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$$\sin^2\left(\frac{31\pi}{8}\right)=1-\cos^2\left(\frac{31\pi}{8}\right)=1-\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2$$

أي $\sin^2\left(\frac{31\pi}{8}\right)=1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ أي

$$\sin^2\left(\frac{31\pi}{8}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$ ، إذن :

$$\sin\left(\frac{31\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$ أو $$\sin\left(\frac{31\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$\sin\left(\frac{31\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ مرفوض لأن $\frac{31\pi}{8}=4\pi-\frac{\pi}{8}$ و العدد $4\pi-\frac{\pi}{8}$ صورته على الدائرة المثلثية موجودة في الربع الرابع (صورته هي نفس صورة العدد $-\frac{\pi}{8}$) حيث $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)=-\sin\frac{\pi}{8}<0$ ؛ إذن ينتج :

$$\sin\left(\frac{31\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$.

2- إثبات صحة المساواة : $-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{31\pi}{8}\right)=0$

لدينا 1- $\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)=-\cos\frac{\pi}{8}$ و $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{8}$ و كذلك من السؤال $\cos\left(\frac{31\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{8}$

إذن ينتج : $-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{31\pi}{8}\right)=0$

3- أ- إثبات أن : $A(x)=2\cos x$

تمارين نموذجية في الدوال المثلثية و حساب المثلثات- **كتابة الأستاذ : حناش نبيل**

$\sin(13\pi - x) = \sin(12\pi + (\pi - x)) = \sin(\pi - x)$ لأن $12\pi = 6 \times 2\pi$ من الشكل $2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ، و $2\sin(-x) = -2\sin x$ لأن الدالة sin فردية ، و كذلك

$\sin(8\pi - x) = \sin(4 \times 2\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$ ، و كذلك :

$\cos(x - \pi) = \cos(-(\pi - x)) = \cos(\pi - x) = -\cos x$ ؛ إذن $A(x)$ تصبح من الشكل :

$A(x) = \sin x - 2\sin x + \sin x + 2\cos x$ معناه $\boxed{A(x) = 2\cos x}$ و هو المطلوب .

ب- حل في المجال $[-\pi;\pi]$ المعادلات : $A(x) = -\sqrt{3}$ ، $A(x) = -1$ ، $A(x) = 1$ ، $A(x) = 0$.

$A(x) = -\sqrt{3}$ تكافئ $2\cos x = -\sqrt{3}$ تكافئ $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ مع $x \in [-\pi;\pi]$.

باستعمال الدائرة المثلثية ، يوجد عددان من المجال $[-\pi;\pi]$ حيث $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ هما $x = -\pi + \frac{\pi}{6}$ أو $x = \pi - \frac{\pi}{6}$ (المجال $[-\pi;\pi]$ طوله يساوي 2π أي دورة كاملة على الدائرة المثلثية) ؛ معناه $x = -\frac{5\pi}{6}$ أو $x = \frac{5\pi}{6}$ ، إذن مجموعة الحلول هي : $\boxed{S = \left\{-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}}$

$A(x) = -1$ تكافئ $2\cos x = -1$ تكافئ $\cos x = -\frac{1}{2}$ مع $x \in [-\pi;\pi]$.

باستعمال الدائرة المثلثية ، يوجد عددان من المجال $[-\pi;\pi]$ حيث $\cos x = -\frac{1}{2}$ هما $x = -\pi + \frac{\pi}{3}$ أو $x = \pi - \frac{\pi}{3}$ ؛ معناه $x = -\frac{2\pi}{3}$ أو $x = \frac{2\pi}{3}$ ؛ إذن مجموعة الحلول هي : $\boxed{S = \left\{-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}}$

$A(x) = 1$ تكافئ $2\cos x = 1$ تكافئ $\cos x = \frac{1}{2}$ مع $x \in [-\pi;\pi]$.

باستعمال الدائرة المثلثية ، يوجد عددان من المجال $[-\pi;\pi]$ حيث $\cos x = \frac{1}{2}$ هما $x = -\frac{\pi}{3}$ أو $x = \frac{\pi}{3}$ ؛ إذن مجموعة الحلول هي : $\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}}$

$A(x) = 0$ تكافئ $2\cos x = 0$ تكافئ $\cos x = 0$ مع $x \in [-\pi;\pi]$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

تمارين نموذجية في الدوال المثلثية و حساب المثلثات- كتابة الأستاذ : حناش نبيل

باستعمال الدائرة المثلثية ، يوجد عددان من المجال $[-\pi;\pi]$ حيث $\cos x = 0$ هما $x = -\frac{\pi}{2}$ أو $x = \frac{\pi}{2}$ ؛ إذن

مجموعة الحلول هي : $\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}}$

4- x عدد حقيقي من المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ ، تعيين $\sin x$ علما أن $3\cos x = \frac{1}{3}$:

$3\cos x = \frac{1}{3}$ معناه $\cos x = \frac{1}{9}$ ؛ إذن $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{1}{9}\right)^2$ أي $\sin^2 x = \frac{80}{81}$ و منه نجد

$\sin x = \frac{4\sqrt{5}}{9}$ أو $\sin x = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$:

$\sin x = \frac{4\sqrt{5}}{9}$ مرفوض لأن $x \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ (صورة العدد x موجودة في الربع الرابع من الدائرة المثلثية أين

يكون $\sin x \leq 0$) ؛ إذن نستنتج أن : $\boxed{\sin x = -\frac{4\sqrt{5}}{9}}$.

تمارين نموذجية في الدوال المثلثية و حساب المثلثات- كتابة الأستاذ : حناش نبيل

التمرين رقم 07 :

I- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

- $\sin^2 x-\cos^2 x=1-2\cos^2 x$
- $\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x$
- $\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 x-\cos^2 x$

II- 1- حول من الدرجة إلى الراديان : $20°$ ، $140°$

2- حول من الراديان إلى الدرجات : $\frac{\pi}{5}rad$ ، $\frac{3\pi}{8}rad$

حل مقترح :

I- نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

- $\sin^2 x-\cos^2 x=1-2\cos^2 x$

من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ و منه ينتج : $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ ؛ إذن

$\sin^2 x-\cos^2 x=1-\cos^2 x-\cos^2 x$ يكافئ : $\boxed{\sin^2 x-\cos^2 x=1-2\cos^2 x}$ و هو المطلوب .

- $\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x$

من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ و منه ينتج : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ ؛ إذن

$\cos^2 x-\sin^2 x=1-\sin^2 x-\sin^2 x$ يكافئ : $\boxed{\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x}$ و هو المطلوب .

- $\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 x-\cos^2 x$

يمكن أن نلاحظ أن : $\sin^4 x-\cos^4 x=\left(\sin^2 x\right)^2-\left(\cos^2 x\right)^2$ ، و باستعمال التحليل بالمتطابقات الشهيرة

تمارين نموذجية في الدوال المثلثية و حساب المثلثات- كتابة الأستاذ : حناش نبيل

ينتج : $\sin^4 x-\cos^4 x=\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$ حيث من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ؛ إذن ينتج : $\boxed{\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 x-\cos^2 x}$ و هو المطلوب .

II- 1- التحويل من الدرجة إلى الراديان : $20°$ ، $140°$

$$\begin{matrix}180° & \rightarrow & \pi\, rad\\ 20° & \rightarrow & x\, rad\end{matrix}$$ و منه نتحصل على : $x=\dfrac{20\times\pi\, rad}{180}$ أي : $\boxed{x=\dfrac{\pi}{9}rad}$

$$\begin{matrix}180° & \rightarrow & \pi\, rad\\ 140° & \rightarrow & x\, rad\end{matrix}$$ و منه نتحصل على : $x=\dfrac{140\times\pi\, rad}{180}$ أي : $\boxed{x=\dfrac{7\pi}{9}rad}$

2- التحويل من الراديان إلى الدرجات : $\dfrac{\pi}{5}rad$ ، $\dfrac{3\pi}{8}rad$

$$\begin{matrix}180° & \rightarrow & \pi\, rad\\ x° & \rightarrow & \dfrac{\pi}{5}rad\end{matrix}$$ و منه نتحصل على : $x=\dfrac{180\times\dfrac{\pi}{5}}{\pi}$ أي $x=\dfrac{180}{5}$ أي : $\boxed{x=36°}$

$$\begin{matrix}180° & \rightarrow & \pi\, rad\\ x° & \rightarrow & \dfrac{3\pi}{8}rad\end{matrix}$$ و منه نتحصل على : $x=\dfrac{180\times\dfrac{3\pi}{8}}{\pi}$ أي $x=\dfrac{180\times 3}{8}$ أي : $\boxed{x=67{,}5°}$

إنتهى ...

لا تنسونا من صالح دعائكم ...

رمضان مبارك .