najah213.com · نجاح 213

ملخص حول المتتاليات العددية

1 المتتالية الحسابية والهندسية

	المتتاليات الحسابية	المتتاليات الهندسية
المخطط	$+r$ $+r$ $+r$ $+r$ $+r$ u_0 u_1 u_2 $u_3 \dots$ u_{n-1} u_n u_{n+1}	$\times q$ $\times q$ $\times q$ $\times q$ $\times q$ u_0 u_1 u_2 $u_3 \dots$ u_{n-1} u_n u_{n+1}
ويكون لدينا مثلا	علاقة حدّ من الحدود بالحد الذي يسبقه أو يليه $u_1 = u_0 + r$ وَ $u_1 = u_2 - r$ إذا عُلِم حدين متتابعين (متتاليين) يُمكن ايجاد r فمثلا: $r = u_2 - u_1 = u_1 - u_0$.	علاقة حدّ من الحدود بالحد الذي يسبقه أو يليه $u_1 = qu_0$ وَ $u_1 = \dfrac{u_2}{q}$ إذا عُلِم حدين متتابعين (متتاليين) يُمكن ايجاد q فمثلا: $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{u_1}{u_0}$.
التعريف	(العلاقة التراجعية) $u_{n+1} = u_n + r$	(العلاقة التراجعية) $u_{n+1} = qu_n$
طريقة الإثبات	**الطريقة ❶:** (نُثبت أنّ الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت وهو الأساس r. **فمثلا لدينا:** $u_n = 3n - 1$، نجد: ومنه: $u_{n+1} = 3(n+1) - 1 = 3n + 2$، $u_{n+1} - u_n = (3n + 2) - (3n - 1)$ $= 3n + 2 - 3n + 1 = 3 = r$	**الطريقة ❶:** (نُثبت أنّ حاصل القسمة $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد ثابت وهو الأساس q. **فمثلا لدينا:** $u_n = 3 \times 2^n$، نجد: $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} = 3 \times 2^n \times 2^1 = 6 \times 2^n$ ومنه: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{6 \times 2^n}{3 \times 2^n} = 2 = q$
	الطريقة ❷: (نكتب u_{n+1} بدلالة u_n) **فمثلا لدينا:** $u_n = 3n - 1$، نجد: $u_{n+1} = 3(n+1) - 1 = u_n + 3$.	**الطريقة ❷:** (نكتب u_{n+1} بدلالة u_n) **فمثلا لدينا:** $u_n = 3 \times 2^n$، نجد: $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} = 3 \times 2^n \times 2^1 = 2u_n$.
عبارة الحد العام	❶ $u_n = u_p + (n-p)\,r$ (علاقة تربط بين حدين مختلفين من متتالية حسابية) نجد: $r = \dfrac{u_n - u_p}{n - p}$ **مثال ①:** (u_n) حسابية حيث $\begin{cases} u_{10} = 31 \\ u_{15} = 46 \end{cases}$	❶ $u_n = u_p \times q^{n-p}$ (علاقة تربط بين حدين مختلفين من متتالية هندسية) نجد: $q^{n-p} = \dfrac{u_n}{u_p}$ **مثال ①:** ($2 =$ الأس) (u_n) هندسية أساسها حيث $\begin{cases} u_3 = 144 \\ u_5 = 576 \end{cases}$ موجب تماما.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

	لدينا: $r = \frac{46-31}{15-10} = \frac{15}{5} = 3$.	لدينا: $q^2 = 4$، ومنه: $q = \sqrt{4}$ أو $q = -\sqrt{4}$ **(مرفوض)**
	❷ $\boxed{u_n = u_0 + nr}$ ❸ $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)\,r}$ **ملاحظة مهمة:** إذاكان $u_n = an + b$، فإنّ $\boxed{r = a}$ **ملاحظة مهمة أخرى:** هذه العلاقات لها إستعمالات أخرى مثلا يُمكن وضع مكان u_n أي حدّ معلوم أو نحن بصدد إيجاده.	**مثال ②: الأس $\neq 2$** **(إستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية)** $u_1 = 6$ و$u_4 = 48$ حيث (u_n) هندسية. لدينا: $q^3 = 8 = 2^3$، ومنه: $q = 2$ ❷ $\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$ ❸ $\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$ **ملاحظة مهمة:** إذاكان $u_n = a \times b^n$، فإنّ $\boxed{q = b}$ **ملاحظة مهمة أخرى:** هذه العلاقات لها إستعمالات أخرى مثلا يُمكن وضع مكان u_n أي حدّ معلوم أو نحن بصدد إيجاده.
المجموع	بصفة عامة: $S = (\text{عدد الحدود}) \left(\frac{\text{الحدّ الأوّل} + \text{الحدّ الأخير}}{2}\right)$ حيث: عدد الحدود = دليل الحدّ الأخير − دليل الحدّ الأوّل + 1 $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$	بصفة عامة: $S = (\text{الحدّ الأوّل}) \left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right)$ حيث: عدد الحدود = دليل الحدّ الأخير − دليل الحدّ الأوّل + 1 $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
خاصية	**خاصية الوسط الحسابي:** $+r \quad +r$ $a \quad b \quad c$ $\boxed{a + c = 2b}$ b هو **الوسط الحسابي** للعددين a وc. فمثلا: $\begin{cases} u_1 + u_3 = 2u_2 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 3u_2 \end{cases}$	**خاصية الوسط الهندسي:** $\times q \quad \times q$ $a \quad b \quad c$ $\boxed{a \times c = b^2}$ b هو **الوسط الهندسي** للعددين a وc. فمثلا: $\begin{cases} u_1 \times u_3 = {u_2}^2 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = {u_2}^3 \end{cases}$
الرتبة والقيمة والطريقة	رتبة الحد u_n، في حالة u_0 هو الحدّ الأوّل: هي $n+1$؛ وفي حالة u_1 هو الحدّ الأوّل: هي n. **إذا أُعطي لنا قيمة حدّ وطُلِب منا تبيان أنّه حدّ من حدود المتتالية:** نضع: العدد المُعطى $= u_n$، نجد: $\boxed{n = \ldots}$ **عدد طبيعي** (نُعوض n وذلك بالعودة إلى الوضع).	
إضافات	حسابية معرّفة بعلاقة وأُعطي حدّ أو أساس: **نكتب الحدود الموجودة في العلاقة بدلالة الحدّ المُعطى أو الحدّ الأوّل** **فمثلا في بكالوريا 2009:** (شعبة آوف، لغ أ) لدينا: $u_n = u_1 + (n-1)r$،	هندسية معرّفة بعلاقة وأُعطي حدّ أو أساس: **نكتب الحدود الموجودة في العلاقة بدلالة الحدّ المُعطى أو الحدّ الأوّل** **فمثلا في بكالوريا 2023:** (شعبة آوف، لغ أ) لدينا: $u_2 = u_0 \times 2^2$ و$u_3 = u_0 \times 2^3$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

	ومنه: $u_2 = 2 + r$ و $u_5 = 2 + 4r$ العلاقة $u_2 - 2u_5 = 19$ تُصبح: $(2 + r) - 2(2 + 4r) = 19$؛ ومنه: $r = -3$
	العلاقة $u_2 + u_3 = 60$ تُصبح: $4u_0 + 8u_0 = 60$ ومنه: $u_0 = \dfrac{60}{12} = 5$

2 اتجاه تغيّر متتالية

1 الطريقة العامة

لدراسة اتجاه تغيّر متتالية (u_n)، **ندرس إشارة الفرق** $u_{n+1} - u_n$، نكون أمام ثلاث إحتمالات:

- إذا كان $u_{n+1} - u_n > 0$، نستنتج أنّ المتتالية (u_n) **متزايدة تماما**.
- إذا كان $u_{n+1} - u_n < 0$، نستنتج أنّ المتتالية (u_n) **متناقصة تماما**.
- إذا كان $u_{n+1} - u_n = 0$، نستنتج أنّ المتتالية (u_n) **ثابتة**.

2 نتائج تتعلق بالمتتالية الثابتة

- (u_n) **ثابتة**، معناه: $\boxed{u_{n+1} = u_n}$ الحد الأوّل.
- (u_n) **ثابتة**، معناه: $\boxed{u_n = k}$ (حيث k عدد حقيقي ثابت).

3 المتتاليات المحدودة

1 تعاريف

- المتتالية (u_n) **محدودة من الأعلى** بـالعدد A، يعني: $\boxed{u_n \leq A}$ (A يسمى **عنصر حاد من الأعلى**).
- المتتالية (u_n) **محدودة من الأسفل** بـالعدد B، يعني: $\boxed{u_n \geq B}$ (B يسمى **عنصر حاد من الأسفل**).
- المتتالية (u_n) **محدودة**، يعني: **محدودة من الأعلى** و**محدودة من الأسفل**.

2 طُرق إثبات أنّ متتالية محدودة

عادة ما نستعمل **الاستدلال بالتراجع**.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

4 الاستدلال بالتراجع

1 مبدأ الاستدلال بالتراجع

للبرهان بالتراجع على صحة الخاصية $P(n)$، نتبع ما يلي:

المرحلة ❶: من أجل ... $= n$، لدينا: ...؛ إذن: $P(\ldots)$ **صحيحة**.

المرحلة ❷:

- **نفرض** صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n، أي: ... **(فرضية التراجع)**.
- **ونبرهن** صحة الخاصية من أجل $n+1$، أي: ...

البرهان:

إذن: حسب **مبدأ الاستدلال بالتراجع** ....

5 تقارب أو تباعد متتالية

1 المتتاليات المتقاربة

المتتالية (u_n) **متقاربة وتتقارب نحو** l، معناه: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ (يُمكن أن نكتب $\lim u_n = l$).

ملاحظة: (u_n) **متباعدة**، معناه: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ أو $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ أو(غير موجودة) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2 الرتابة والتقارب

1.2 مبرهنة

- إذا كانت متتالية **متزايدة تماما** و**محدودة من الأعلى**، فإنّ هذه المتتالية **متقاربة**.
- إذا كانت متتالية **متناقصة تماما** و**محدودة من الأسفل**، فإنّ هذه المتتالية **متقاربة**.

3 قوانين النهايات المتعلّقة بالمتتاليات الهندسية

ليكن q عددا حقيقيّا (أساس المتتالية الهندسية)

- إذا كان $q > 1$، فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- إذا كان $-1 < q < 1$، فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- إذا كان $q \leq -1$، فإنّ (غير موجودة) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$.

ملاحظة: تُستخدم هذه القوانين لحساب النهايات في التمارين التي تتعرّض للمتتاليات الهندسية، سواءً تعلق الأمر بالحدود العامة أو المجاميع.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com