najah213.com · نجاح 213

تمارين في المتتاليات العددية

التمرين رقم 1

الحل موجود في الصفحة 4

(v_n) متتاليّة حسابيّة حيث : $v_4 = 5$ و $v_8 = 7$.

1/ عيّن أساس المتتاليّة (v_n) و حدّها الأوّل v_0 .

2/ أحسب v_n بدلالة n ، ثمّ عيّن العدد الطبيعي n حتّى يكون $v_n = 50$.

3/ أحسب المجموع : $S = v_6 + v_7 + v_8 + \cdots + v_{94}$.

التمرين رقم 2

الحل موجود في الصفحة 4

(v_n) متتاليّة حسابيّة حدّها الأوّل v_1 و $\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{2} \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 7 \end{cases}$.

1/ عيّن الحدود v_1, v_2, v_3 للمتتاليّة و أساسها .

2/ أحسب الحد العام v_n بدلالة n .

3/ عبّر بدلالة n عن المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

4/عيّن العدد الطبيعي n حتّى يكون $S_n = -10$.

التمرين رقم 3

الحل موجود في الصفحة 4

(u_n) متتاليّة حسابيّة حدّها الأوّل u_1 .

1/ أحسب حدّها الثاني علما أنّ : $u_1 + u_3 = 12$.

2/ أحسب الحد الرابع u_4 علما أنّ : $u_3 + u_4 + u_5 = 30$.

3/ عيّن أساس المتتاليّة (u_n) و حدّها الأوّل u_1 .

4/ أكتب الحد العام u_n بدلالة n ، ثمّ عيّن n حتّى يكون $u_n = 32$.

5/ أحسب $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ بدلالة n .

التمرين رقم 4

الحل موجود في الصفحة 4

(u_n) متتاليّة حسابيّة حدّها الأوّل $u_0 = 2$ و $u_2 + u_5 = 25$.

1/ عيّن أساس المتتاليّة الحسابيّة (u_n) .

2/ أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3/ أحسب قيمة الحد الذي رتبته 11 .

4/ أحسب المجموع $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$.

التمرين رقم 5

الحل موجود في الصفحة 4

(u_n) متتاليّة حسابيّة حيث : $u_0 + u_3 = 18$ و $u_2 + u_5 = 34$.

1/ عيّن الحد الأوّل u_0 و الأساس r للمتتاليّة (u_n) .

2/ أكتب u_n بدلالة n .

3/ أحسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

4/ عيّن العدد الطبيعي n حتّى يكون $S_n = 78$.

التمرين رقم 6

الحل موجود في الصفحة 5

(u_n) متتاليّة عدديّة معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n +$.

1/ أحسب u_0, u_1, u_2 .

2/ بيّن أنّ (u_n) حسابيّة يطلب تعيين أساسها ، ثمّ عيّن إتجاه تغيّر (u_n) .

3/ تحقق أنّ 2008 حد من حدود المتتاليّة (u_n) ، ما رتبته؟ .

4/ أحسب المجموع $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{669}$.

التمرين رقم 7

الحل موجود في الصفحة 5

(u_n) متتاليّة عدديّة معرّفة بحدّها الأوّل $u_1 = 7$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1/ أحسب u_2, u_3, u_4 .

2/ من أجل كلّ عدد طبيعي n غير معدوم نعرّف المتتاليّة (v_n) كما يلي : $v_n = u_n + 1$.

أ) بيّن أنّ (v_n) هندسيّة يطلب أساسها و حدّها الأوّل v_1 .

ب) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج u_n بدلالة n .

ج) نضع $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$ ، أحسب S_n بدلالة n .

د) عيّن n علما أنّ : $S_n = 1016$.

التمرين رقم 8

الحل موجود في الصفحة 5

(u_n) متتاليّة حسابيّة معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها الأوّل $u_1 = 2$ و بالعلاقة $u_2 - 2u_5 = 19$.

1/ أ) أحسب الأساس r للمتتاليّة (u_n) .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ب) أحسب الحد العاشر .

2/ أكتب عبارة u_n بدلالة n .

3/ بيّن أنّ العدد 2008– هو حد من حدود المتتالية (u_n) محددا رتبته .

4/ أحسب المجموع $S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{671}$.

التمرين رقم 9

الحل موجود في الصفحة 5

(u_n) متتالية هندسيّة معرّفة على $\mathbb{N}$ و أساسها موجب .

1/ عيّن أساس هذه المتتالية و حدّها الأوّل u_0 إذا علمت أنّ : $u_3 = 144$ و $u_5 = 576$.

2/ تحقق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n = 18 \times 2^n$.

3/ أحسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ، ثمّ استنتج قيمة n حتى يكون $S_n = 1134$.

التمرين رقم 10

الحل موجود في الصفحة 5

I) (u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}$ بالحدين $u_{10} = 31$ و $u_{15} = 46$.

1/ عيّن الأساس r و الحد الأوّل u_0 .

2/ أكتب u_n بدلالة n .

3/ بيّن أنّ 6028 حد من حدود المتتالية (u_n) .

II) (v_n) المتتالية المعرّفة بـ : $v_n = 2 \times 8^n$.

1/ بيّن أنّ (v_n) هندسيّة يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل v_0 .

2/ أحسب المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ بدلالة n .

التمرين رقم 11

الحل موجود في الصفحة 6

(u_n) متتالية حسابيّة متزايدة ، أساسها r و حدّها الأوّل u_1 و $u_3 = 7$.

1/ أ) أحسب بدلالة r الجدئين T_1 و T_2 حيث : $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$.

ب) عيّن الأساس r بحيث : $T_2 - T_1 = 27$.

2/ نضع : $r = 3$.

أ) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

ب) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n غير معدوم : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

• بيّن أنّ : $S_n = \dfrac{3n^2 - n}{2}$.

ج) جد العدد الطبيعي n بحيث : $S_n = 145$.

3/ أ) أكت الحد u_{n+5} بدلالة العدد الطبيعي n .

ب) تحقق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n : $\dfrac{u_{n+5}}{n} = 3 + \dfrac{13}{n}$.

ج) استنتج الأعداد الطبيعيّة n التي يكون من أجلها العدد $\dfrac{u_{n+5}}{n}$ طبيعيا .

التمرين رقم 12

الحل موجود في الصفحة 6

(u_n) متتالية حسابيّة حدّها الأوّل u_0 و أساسها $r = 5$ بحيث : $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$.

1/ أحسب u_0 .

2/ بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n = 5n + 1$.

3/ عيّن العدد الطبيعي n بحيث : $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$.

4/ أحسب المجموع $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2013}$.

5/ المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 2u_n + 1$

أ) أدرس إتجاه تغيّر (v_n) .

ب) أحسب المجموع $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{2013}$.

التمرين رقم 13

الحل موجود في الصفحة 6

(u_n) متتالية حسابيّة حدّها الأوّل u_1 و أساسها r حيث : $u_2 = \dfrac{1}{2}$ و $u_1 - u_3 = 5$.

1/ أ) بيّن أنّ : $u_1 + u_3 = 1$.

ب) عيّن الحد الأوّل u_1 و استنتج أنّ : $r = -\dfrac{5}{2}$.

2/ أكتب u_n بدلالة n .

3/ أ) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

ب) عيّن العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها : $S_n = -\dfrac{657}{2}$.

4/ n عدد طبيعي غير معدوم ، نضع : $T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n$.

أ) تحقق أنّه لكلّ عدد طبيعي غير معدوم n : $(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$.

ب) باستعمال البرهان بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عددطبيعي

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

غير معدوم : $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$.

التمرين رقم 14

الحل موجود في الصفحة 7

a, b, c ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية متزايدة أساسها r حيث $a+b+c=9$.

1/ أ) أحسب b ، ثمّ a، و c بدلالة r .

ب) علما أنّ : $a \times c = -16$ ، أحسب r ثمّ استنتج a و c .

2/ (u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل $u_0 = -2$ و أساسها $r = 5$.

أ) أكتب u_n بدلالة n .

ب) أحسب u_{15} ثمّ استنتج المجموع : $S = u_0 + u_1 + u_{15} + \cdots$.

3/ (v_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $8v_n - u_n = 0$

أحسب المجموع : $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{15}$.

التمرين رقم 15

الحل موجود في الصفحة 7

(U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما ، معرّفة على $\mathbb{N}$ حيث $U_1 = 20$ و $U_3 = 320$.

1/ بيّن أنّ أساس المتتالية (U_n) هو 4 و حدّها الأوّل هو $U_0 = 5$.

2/ أكتب عبارة الحد العام U_n بدلالة n ، ثمّ استنتج قيمة حدّها السابع .

3/ أ) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع : $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$.

ب) استنتج قيمة المجموع $S' = U_0 + U_1 + \cdots + U_6$.

التمرين رقم 16

الحل موجود في الصفحة 7

(u_n) متتالية هندسية حدها الأوّل u_0 و أساسها q حيث : $u_0 = 2$ و $q = 3$.

1/أحسب u_1 و u_2 .

2/ أكتب u_n بدلالة n ، ثمّ استنتج u_5 .

3/ عيّن إتجاه تغيّر (u_n) .

4/ أ) أحسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.

ب) استنتج قيمة المجموع $2 + 6 + 18 + \cdots + 486$.

5/ أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية على 5 لكل من الأعداد 3^2 ، 3^3 ؛ و 3^4 .

ب) استنتج أنّه من أجل كلّ k من $\mathbb{N}$ ؛ $3^{4k} \equiv 1[5]$.

6/ عيّن الأعداد الطبيعيّة n التي يكون من أجلها $3^n - 1$ قابلا للقسمة على 5 .

التمرين رقم 17

الحل موجود في الصفحة 7

(u_n) متتاليةعدديّة معرفة بحدّها الأوّل $u_1 = 7$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1/ أحسب u_2, u_3, u_4 .

2/ من أجل كلّ عدد طبيعي n غير معدوم ، نعرّف المتتالية (v_n) حيث $v_n = u_n + 1$.

أ) أثبت أنّ (v_n) هندسيّة يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج u_n بدلالة n .

ج) نضع : $S_n = v_1 + v_1 + \cdots + v_n$ ، أحسب S_n بدلالة n .

د) عيّن n علما أنّ : $S_n = 1016$.

التمرين رقم 18

الحل موجود في الصفحة 8

أ) (u_n) متتالية هندسيّة أساسها 3 و حدّها الأوّل u_0 بحيث : $u_0 + u_3 = 28$.

1. أحسب u_0 ، ثمّ أكتب u_n بدلالة n .

2. أحسب المجموع $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.

ب) (v_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 1 - 5n$.

1. بيّن أنّ (v_n) حسابيّة يطلب تعيين أساسها ، ثمّ استنتج إتجاه تغيّرها .

2. أحسب المجموع $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9$.

ج) نعتبر المتتالية(k_n) المعرفّة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $k_n = 1 + 3^n - 5n$.

– تحقق أنّ : $k_n = u_n + v_n$ ؛ ثمّ استنتج قيمة المجموع $S_3 = k_0 + k_1 + \cdots + k_9$.

التمرين رقم 19

الحل موجود في الصفحة 8

(u_n) متتالية هنسّية حدّها الأوّل $v_0 = 2$ و أساسها 3 .

1/ أ) عبّر عن v_n بدلالة n .

ب) أحسب الفرق $v_{n+1} - v_n$ بدلالة n ، ثمّ استنتج إتجاه تغيّر (v_n) .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

2/ نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n غير معدوم ،
$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.
أ) أحسب S_n بدلالة n .
ب) عيّن قيمة العدد الطبيعي n بحيث : $S_n = 80$.
ج) أثبت بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ؛ $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 .

حل التمرين رقم 1

للعودة إلى التمرين 1

1/ (v_n) حسابيّة ، إذن : $v_n = v_p + (n-p) \times r$
حيث r أساس المتتالية (v_n) مع $p < n$ ، و عليه
$v_8 = v_4 + 4r$ أي : $7 = 5 + 4r$ أي $r = \frac{1}{2}$
.
لدينا $v_4 = v_0 + 4r$ و منه $5 = v_0 + 4 \times \frac{1}{2}$ و منه
$v_0 = 3$.
2/ $v_n = v_0 + nr$ و منه $v_n = 3 + \frac{n}{2}$ من أجل كلّ
عدد طبيعي n .
$v_n = 50$ معناه $3 + \frac{n}{2} = 50$ و منه $\frac{n}{2} = 47$ و منه
$n = 94$.
3/ $S = \frac{94-6+1}{2}\left(v_6 + v_{94}\right)$ أي $S =$
$\frac{89}{2}\left(3 + \frac{6}{2} + 50\right)$ و منه : $S = 28 \times 89$ أي
$S = 2492$

حل التمرين رقم 2

للعودة إلى التمرين 2

1/ بتطبيق خاصية الوسط الحسابي $2v_2 = v_1 + v_3$ نجد
$3v_2 = \frac{3}{2}$ أي : $v_2 = \frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{2} & \cdots(1) \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 7 & \cdots(2) \end{cases}$$

بالجمع طرفا لطرف بين (1) و (2) نجد : $2v_1 + 5v_2 =$
$\frac{17}{2}$ ، و بالطرح طرفا لطرف نجد : $2v_3 - 3v_2 = -\frac{11}{2}$
و منه $v_1 = \frac{17-5}{2}$ أي $v_1 = 3$.
$2v_3 = \frac{-11+3}{2}$ أي : $v_3 = -2$.
ومنه : $r = v_2 - v_1$ $r = -\frac{5}{2}$.
2/ $v_n = u_1 + (n-1) \times r$ أي $v_n = \frac{11}{2} - \frac{5n}{2}$.

3/ $S_n = \frac{n}{2}\left(v_1 + v_n\right)$ أي $S_n = \frac{17n - 5n^2}{4}$.
$S_n = -10$ أي : $\frac{17n - 5n^2}{4} = -10$ ؛ أي $5n^2 - 17n - 40 = 0$ حلولها هي $5, -\frac{8}{5}$ و منه $n = 5$

حل التمرين رقم 3

للعودة إلى التمرين 3

1/ نطبق خاصيّة الوسط الحسابي : $2u_2 = u_1 + u_3$
نجد $2u_2 = 12$ أي : $u_2 = 6$.
2/ حسب خاصيّة الوسط الحسابي نكتب : $2u_4 =$
$u_3 + u_5$ و منه $3u_4 = 30$ و منه $u_4 = 10$.
3/ لدينا $u_4 = u_2 + 2r$ و منه $10 = 6 + 2r$ و منه
$2r = 4$ و منه $r = 2$.
لدينا $u_2 = u_1 + r$ و منه $6 = u_1 + 2$ و منه $u_1 = 4$
.
4/ $u_n = u_1 + (n-1)r$ و منه $u_n = 4 + (n-1) \times 2$
و منه : $u_n = 2 + 2n$.
$u_n = 32$ معناه $2 + 2n = 32$ و منه $2n = 30$ أي
$n = 15$:
5/ $S_n = \frac{n}{2}\left(u_1 + u_n\right)$ و منه : $S_n =$
$\frac{n}{2}(4 + 2 + 2n)$ أي $S_n = \frac{n}{2}(6 + 2n)$ و منه
$S_n = \frac{n}{2}(3+n)$:

حل التمرين رقم 4

للعودة إلى التمرين 4

1/ لدينا $u_2 = u_0 + 2r$ و $u_5 = u_0 + 5r$ و منه
$u_2 + u_5 = 2u_0 + 7r$ أي $u_2 + u_5 = 4 + 7r$ لكن
$u_2 + u_5 = 25$ و منه $4 + 7r = 25$ ومنه $7r = 21$
أي $r = 3$.
2/ $u_n = u_0 + nr$ أي $u_n = 2 + 3n$.
3/ الحد الذي رتبته 11 هو u_{10} حيث $u_{10} = 2 + 3 \times 10$
أي $u_{10} = 32$.
4/ $S = \frac{10}{2}(u_1 + u_{10})$ و أي $S = 5(32)$ أي
$S = 160$.

حل التمرين رقم 5

للعودة إلى التمرين 5

1/ لدينا $u_3 = u_0 + 3r$ و $u_2 = u_0 + 2r$ ، $u_5 =$
$2u_0 + 7r = 34$ و $2u_0 + 3r = 18$: إذن $u_0 + 5r$
.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$\begin{cases} 2u_0 + 3r = 18 \\ 2u_0 + 7r = 34 \end{cases}$.

بالطرح طرفا لطرف بين المعادلتين السابقتين نجد $4r = 16$

أي $r = 4$.

نعوض في إحدى المعادلتين السابقتين نجد

$2u_0 + 12 = 18$ أي $2u_0 = 6$ أي $u_0 = 3$.

2/ $u_n = u_0 + nr$ أي $u_n = 3 + 4n$.

3/ $S_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$ أي $S_n = \frac{n+1}{2}(3 + 4n)$ أي $S_n = \frac{n+1}{2}(6 + 4n)$

أي $S_n = (n+1)(3+2n)$.

4/ $S_n = 78$ أي $(n+1)(3+2n) = 78$ أي

$2n^2 + 5n - 75 = 0$ ، معادلة من الدرجة الثانيّة حلولها

هي $5, -\frac{15}{2}$ و منه $n = 5$.

حل التمرين رقم 6 — للعودة إلى التمرين 6

1/ $u_0 = 1$ ، $u_1 = 4$ ، $u_2 = 7$.

2/ $u_{n+1} = 3(n+1) + 1 = 3n + 4$ و منه :

$u_{n+1} - u_n = 3n+4-3n-1$ أي $u_{n+1} - u_n = 3$

من أجل كلّ عدد طبيعي n ، اذن (u_n) حسابيّة أساسها

$r = 3$ ، بما أنّ $r > 0$ إذن فهي متزايدة تماما .

3/ نحل المعادلة : $u_n = 2008$ أي $3n + 1 = 2008$ و

منه $n = \frac{2007}{3}$ إذن $n = 669$ و منه $u_{669} = 2008$

رتبته 670 .

4/ $S = \frac{670}{2}(u_0 + u_{669})$ أي $S = 335(2009)$ أي

$S = 673015$

حل التمرين رقم 7 — للعودة إلى التمرين 7

1/ $u_2 = 15$ ، $u_3 = 31$ ، $u_4 = 63$.

2/ $v_n = u_n + 1$.

أ) $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 1 + 1$ أي

$v_{n+1} = 2u_n + 2$ و منه $v_{n+1} = 2(u_n + 1)$ و منه

$v_{n+1} = 2v_n$ و منه (v_n) هندسيّة أساسها $q = 2$ و

حدّها الأوّل $v_1 = u_1 + 1$ أي $v_1 = 8$.

ب) $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ أي $v_n = 8 \times 2^{n-1}$.

$u_n = v_n - 1$ و منه $u_n = 8 \times 2^{n-1} - 1$.

ج) $S_n = v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$ و منه $S_n = 8 \times \frac{1-2^n}{-1}$ أي

$S_n = -8(1-2^n)$ أي $S_n = 8 \times 2^n - 8$

د) $S_n = 1016$ إذن $8 \times 2^n = 1024$ أي $2^n = 128$

و منه $2^n = 2^7$ و منه $n = 7$.

حل التمرين رقم 8 — للعودة إلى التمرين 8

1/ أ) $u_2 = u_1 + r$ و $u_5 = u_1 + 4r$ ، لدينا $u_2 - 2u_5 = 19$ و منه $u_1 + r - 2(u_1 + 4r) = 19$ و منه

$-2 - 7r = 19$ و منه $-7r = 21$ و منه $r = -3$.

ب) $u_{10} = u_1 + 9r$ و منه $u_{10} = 2 + -27$ و منه

$u_{10} = -25$.

2/ $u_n = u_1 + (n-1)r$ و منه $u_n = 2 - 3n - 3$

و منه $u_n = 5 - 3n$.

3/ نحل المعادلة : $u_n = -2008$ و منه $5 - 3n = -2008$ و منه : $n = \frac{-2013}{3}$ أي

$n = 671$ و منه $u_{671} = -2008$ ، رتبته 671 .

4/ $S = \frac{671}{2}(u_1 + u_{671})$ و منه $S = 335.5 \times (-2006)$ و منه

$S = -673013$.

حل التمرين رقم 9 — للعودة إلى التمرين 9

1/ نطبق خاصيّة الوسط الهندسي : أي $u_5 = u_3 \times q^2$

و منه $576 = 144 \times q^2$ و منه $q^2 = \frac{576}{144}$ أي $q^2 = 4$

و منه $\boxed{q = 2}$ ، $u_3 = u_0 \times q^3$ أي $144 = u_0 \times 2^3$ و

منه $u_0 = \frac{144}{8}$ و منه $\boxed{u_0 = 18}$.

2/ $u_n = u_0 \times q^n$ و منه $\boxed{u_n = 18 \times 2^n}$.

3/ $S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ أي $S_n = 18 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$

ومنه $\boxed{S_n = 18 \times 2^{n+1} - 18}$.

$S_n = 1234$ معناه $18 \times 2^{n+1} - 18 = 1134$ ومنه

$18 \times 2^{n+1} = 1152$ و منه $2^{n+1} = 64$ و منه $2^{n+1} = 2^6$

و عليه $n + 1 = 6$ إذن $\boxed{n = 5}$.

حل التمرين رقم 10 — للعودة إلى التمرين 10

I) 1/ لدينا $u_n = u_p + (n-p)r$ مع $p < n$ و منه

$u_{15} = u_{10} + 5r$ و منه $46 = 31 + 5r$ و منه $15 = 5r$

و منه $\boxed{r = 3}$.

$u_0 = 31 - 30$ و منه $u_{10} = u_0 + 10r$ و منه

$\boxed{u_0 = 1}$.

2/ $u_n = u_0 + nr$ و منه $\boxed{u_n = 1 + 3n}$.

3/ نحل المعادلة : $u_n = 6028$ أي $1 + 3n = 6028$ و منه

$3n = 6027$ و منه $n = 2009$ و منه $\boxed{U_{2009} = 6028}$

؛ رتبته هي 2010 .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

II) 1/ $v_{n+1} = 2 \times 8^{n+1}$ و منه $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \times 8^{n+1}}{2 \times 8^n} = 8$ و منه (v_n) هندسيّة أساسها $q = 8$ و حدّها الأوّل $v_0 = 2$.

2/ $S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ و منه $S_n = 2 \times \frac{1 - 8^{n+1}}{-7}$ و منه $\boxed{S_n = -\frac{2}{7}\left(1 - 8^{n+1}\right)}$.

حل التمرين رقم 11 — للعودة إلى التمرين 11

أ) 1/ $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$ ، $u_3 = 7$ ، لدينا $u_3 = u_1 + 2r$ و $u_5 = u_3 + 2r$ و $u_2 = u_1 + r$ و $u_4 = u_3 + r$ و منه $u_1 = u_3 - 2r$ و $u_5 = u_3 + 2r$ أي $u_1 = 7 - 2r$ و $u_5 = 7 + 2r$ و منه $\boxed{T_1 = (7 - 2r)(7 + 2r)}$ ، و $u_2 = 7 - r$ و $u_4 = 7 + r$ و منه $\boxed{T_2 = (7 - r)(7 + r)}$.

ب) لدينا $T_2 - T_1 = 27$ و منه $(7 - r)(7 + r) - (7 + 2r)(7 - 2r) = 27$ و منه $49 - r^2 - 49 + 4r^2 = 27$ و منه $3r^2 = 27$ و منه $r^2 = 9$ و منه $r = 3$ أو $r = -3$ ، بما أنّ (u_n) متزايدة فإنّ $\boxed{r = 3}$.

2/ $u_n = u_1 + (n - 1)r$ ، و منه $u_3 = u_1 + 2r$ و منه $u_1 = 7 - 2 \times 3$ و منه $u_1 = 1$.

$u_n = 1 + 3n - 3$ أي : $\boxed{u_n = 3n - 2}$.

ب) $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ و منه $S_n = \frac{n}{2}(1 + 3n - 2)$ أي $\boxed{S_n = \frac{n(3n - 1)}{2}}$ أي $\boxed{S_n = \frac{3n^2 - n}{2}}$.

ج) $S_n = 145$ و منه $3n^2 - n = 290$ أي $3n^2 - n - 290 = 0$ ، معادلة من الدرجة الثانيّة حلولها هي $10; -\frac{29}{3}$ و منه $\boxed{n = 10}$.

3/ أ) $u_{n+5} = 3(n + 5) - 2 = 3n + 13$.

ب) $\frac{u_{n+5}}{n} = \frac{3n + 13}{n}$ و منه $\boxed{\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}}$.

ج) $\frac{u_{n+5}}{n}$ عدد طبيعي معناه n يقسم 13 أي n هو أحد قواسم 13 و منه $\boxed{n = 1}$ أو $\boxed{n = 13}$.

حل التمرين رقم 12 — للعودة إلى التمرين 12

1/ لدينا $u_1 = u_0 + r$ و $u_2 = u_0 + 2r$ ، $u_3 = u_0 + 3r$ و لدينا $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$ و منه $u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + u_0 + 3r = 34$ و منه $4u_0 + 6r = 34$ و منه $4u_0 = 34 - 6r$ أي $4u_0 = 34 - 30$ و منه $\boxed{u_0 = 1}$.

2/ $u_n = u_0 + nr$ و منه $\boxed{u_n = 1 + 5n}$.

3/ $u_{n+1} = 5n + 6$ و منه $u_{n+1} + u_n - 8n$ لكن $u_{n+1} + u_n - 8n = 10n + 7 - 8n$ أي $u_{n+1} + u_n - 8n = 2n + 7$ و منه $2n + 7 = 4033$ و منه $2n = 4026$ و منه $\boxed{n = 2013}$.

4/ $S = \frac{2014}{2}(u_0 + u_{2013})$ و منه $S = 1007(1 + 10066)$ ومنه $\boxed{S = 10137469}$.

5/ أ) $v_{n+1} - v_n = 2u_{n+1} + 1 - (2u_n + 1)$ أي $\boxed{v_{n+1} - v_n = 2(u_{n+1} - u_n)}$ ، إذن إتجاه تغيّر (v_n) هو نفسه إتجاه تغيّر (u_n) ، لكن (u_n) متزايدة تماما لأنّ $r > 0$ و منه (v_n) متزايدة تماما .

ب) $S' = v_0 + v_1 + \cdots v_{2013}$ و منه

$S' = (2u_0 + 1) + (2u_1 + 1) + \cdots (2v_{2103} + 1)$

$S' = 2(u_0 + u_1 + \cdots + u_{2013}) + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{2013مرة}}$

$\boxed{S' = 20276951}$ و منه $S' = 2S + 2013$.

حل التمرين رقم 13 — للعودة إلى التمرين 13

1/ أ) بتطبيق خاصية الوسط الحسابي نجد $2u_2 = u_1 + u_3$ و منه $u_1 + u_3 = 2 \times \frac{1}{2}$ و منه $\boxed{u_1 + u_3 = 1}$.

ب) لدينا $\begin{cases} u_1 - u_3 = 5 \\ u_1 + u_3 = 1 \end{cases}$ بالجمع طرفا لطرف بين المعادلتين السابقتين نجد $2u_1 = 6$ و منه $\boxed{u_1 = 3}$ ، لدينا $u_2 = u_1 + r$ و منه $r = u_2 - u_1$ و $r = \frac{1}{2} - 3$ و منه $\boxed{r = -\frac{5}{2}}$.

2/ $u_n = u_1 + (n - 1)r$ و منه $u_n = 3 - \frac{5}{2}n + \frac{5}{2}$ و منه $\boxed{u_n = \frac{11}{2} - \frac{5}{2}n}$.

3/ أ) $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ و منه $S_n = \frac{n}{2}\left(\frac{17}{2} - \frac{5}{2}n\right)$ و منه $\boxed{S_n = \frac{n(17 - 5n)}{4}}$.

ب) $S_n = -\frac{657}{2}$ و منه $\frac{n(17 - 5n)}{4} = -\frac{657}{2}$ و منه $\frac{17n - 5n^2}{2} = -657$ و منه $17n - 5n^2 = -1314$ أي $5n^2 - 17n - 1314 = 0$ ، معادلة من الدرجة الثانيّة حلولها $18; -\frac{73}{5}$ و منه $\boxed{n = 18}$.

4/ أ) بالنشر نجد $(n + 2)(9 - 5n) = -5n^2 - n + 18$.

ب) نضع : $P(n) : T_n = \frac{1}{6}n(n + 1)(14 - 5n)$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

◁ من أجل $n = 1$ لدينا $T_1 = u_1$ أي $T_1 = 3$ و $3 = \frac{1}{6}1(1+1)(14-5)$ و منه $P(1)$ صحيحة .

◁ نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم و نثبت صحة $P(n+1)$.

$P(n)$ صحيحة معناه $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$ ،

لدينا $T_{n+1} = T_n + (n+1)u_{n+1}$

حل التمرين رقم 14 للعودة إلى التمرين 14

1/ أ) حسب خاصيّة الوسط الحسابي نكتب $2b = a+c$

و منه $3b = a+b+c$ لكن $a+b+c = 9$ و منه $3b = 9$ و منه $\boxed{b = 3}$.

ومنه $a = b - r$ و $c = b + r$

$\boxed{a = 3-r \text{ ، } c = 3+r}$.

ب) لدينا $a \times c = -16$ و منه $(3-r)(3+r) = -16$

و منه $9 - r^2 = -16$ و منه $r^2 = 25$ و منه $r = 5$ ،

$r = -5$ لكن (u_n) متزايدة إذن $\boxed{r = 5}$.

$a = 3-r$ و منه $\boxed{a = -2}$ و $\boxed{c = 8}$.

2/ أ) $u_n = u_0 + nr$ و منه $\boxed{u_n - 2 + 5n}$.

ب) $u_{15} = -2 + 5 \times 15$ أي $\boxed{u_{15} = 73}$.

$S = \frac{16}{2}(u_0 + u_{15})$ و منه $S = 8 \times (-2+73)$ و

منه $S = 8 \times 71$ و منه $\boxed{S = 568}$.

3/ لدينا $8v_n - u_n = 0$ و منه $v_n = \frac{1}{8}u_n$ و منه

$S' = \frac{1}{8}u_0 + \frac{1}{8}u_1 + \cdots + \frac{1}{8}u_{15}$ و منه $S' = \frac{1}{8}S$

إذن $\boxed{S' = 71}$.

حل التمرين رقم 15 للعودة إلى التمرين 15

1/ لدينا $U_n = U_p \times q^{n-p}$ مع $p < n$ و منه $U_3 = U_1 \times q^2$ و منه $320 = 20 \times q^2$ و منه $q^2 = 16$ و منه

$q = 4$ أو $q = -4$ لكن المتتالية (U_n) حدودها موجبة

إذن $\boxed{q = 4}$ (q هو الأساس) .

$U_1 = U_0 \times q$ و منه $20 = U_0 \times 4$ و منه $\boxed{U_0 = 5}$.

2/ $U_n = U_0 \times q^n$ و منه $\boxed{U_n = 5 \times 4^n}$ ، الحد السّابع

هو U_6 حيث $U_6 = 5 \times 4^6$ أي $\boxed{U_6 = 20480}$.

3/ أ) $S = 5 \times \frac{1-4^{n+1}}{1-4}$ و منه $S = U_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

و منه : $\boxed{S = -\frac{5}{3}\left(1-4^{n+1}\right)}$.

ب) $S' = -\frac{5}{3}\left(1-4^{6+1}\right)$ أي $S' = -\frac{5}{3}\left(1-4^7\right)$

و منه $\boxed{S' = 27305}$.

حل التمرين رقم 16 للعودة إلى التمرين 16

1/ $U_1 = U_0 \times q$ و منه $U_1 = 2 \times 3$ و منه $\boxed{U_1 = 6}$

، $U_2 = U_1 \times q$ و منه $U_2 = 6 \times 3$ و منه $\boxed{U_2 = 18}$.

2/ $U_n = U_0 \times q^n$ أي $\boxed{U_n = 2 \times 3^n}$ و منه

$U_5 = 2 \times 3^5$ أي $\boxed{U_5 = 486}$.

3/ $U_{n+1} - U_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n$ أي

$U_{n+1} - U_n = 2 \times 3^n(3-1)$ أي

$\boxed{U_{n+1} - U_n = 4 \times 3^n}$ و منه $U_{n+1} - U_n > 0$ من

أجل كلّ عدد طبيعي n و منه (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

4/ أ) $S_n = U_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$ أي $S_n = 2 \times \frac{1-3^n}{-1}$

أي $\boxed{S_n = 2 \times 3^n - 2}$.

ب) $2+6+\cdots+486 = U_0 + U_1 + \cdots U_5 = S_6$

و منه

$2+6+\cdots+486 = 2 \times 3^6 - 2$ أي

$\boxed{2+6+\cdots+486 = 1456}$.

5/ أ) $3 \equiv 3[5]$ ، $3^2 \equiv 4[5]$ ، $3^3 \equiv 2[5]$ ،

$3^4 \equiv 1[5]$.

ب) $3^{4k} = (3^4)^k$ و بما أنّ $3^4 \equiv 1[5]$ فإن

$(3^4)^k \equiv 1^k[5]$ أي $(3^4)^k \equiv 1[5]$ و منه $\boxed{3^{4k} \equiv 1[5]}$

من أجل كلّ عدد طبيعي k .

6/ $3^n - 1$ قابل للقسمة على 3 معناه : $3^n - 1 \equiv 0[5]$

أي $3^n \equiv 1[5]$ و منه $\boxed{n = 4k}$ ، حيث k عدد طبيعي .

و منه قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $3^n - 1$ قابل

للقسمة على 5 هي $\boxed{n = 4k \quad , k \in \mathbb{N}}$.

حل التمرين رقم 17 للعودة إلى التمرين 17

1/ $u_2 = 2 \times 7 + 1 = 15$ ، $u_3 = 2 \times 15 + 1 = 31$ ،

$u_4 = 2 \times 31 + 1 = 63$.

2/ أ) $v_n = u_n + 1$ ، $v_{n+1} = u_{n+1} + 1$ و منه :

$v_{n+1} = 2u_n + 1 + 1$ و منه : $v_{n+1} = 2u_n + 2$ و منه

$\boxed{v_{n+1} = 2u_n + 2}$ و منه $v_{n+1} = 2v_n$ و منه (v_n)

هندسيّة أساسها $q = 2$ و حدّها الأوّل $v_1 = u_1 + 1$

أي $v_1 = 8$.

ب) $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ و منه $\boxed{v_n = 8 \times 2^{n-1}}$ ،

لدينا $v_n = u_n + 1$ و منه $u_n = v_n - 1$ و منه

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$u_n = 8 \times 2^{n-1} - 1$.

ج) $S_n = v_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$ و منه $S_n = 8 \times \dfrac{1-2^n}{1-2}$ و منه $S_n = 8 \times 2^n - 8$.

د) $S_n = 1016$ و منه $8 \times 2^n = 1024$ و منه $2^n = 128$ أي $2^n = 2^7$ و منه $n = 7$.

حل التمرين رقم 18 — للعودة إلى التمرين 18

أ) 1. لدينا $q = 3$ و $u_3 = u_0 \times q^3$ و $u_0 + u_3 = 28$ و منه $u_0 + u_0 \times 3^3 = 28$ و منه $u_0(1 + 3^3) = 28$ و منه $u_0 \times 28 = 28$ و منه $u_0 = 1$.

$u_n = u_0 \times q^n$ و منه $u_n = 3^n$.

2. $S_1 = u_0 \times \dfrac{1-q^{10}}{1-q}$ و منه $S_1 = \dfrac{3^{10}-1}{2}$ أي $S_1 = 29524$.

ب) 1. $v_n = 1 - 5n$ ، $v_{n+1} = 1 - 5(n+1)$ و منه $v_{n+1} = -4 - 5n$ و منه $v_{n+1} - v_n = -5$.

و منه (v_n) هندسيّة أساسها -5 و حدّها الأوّل $v_0 = 1$ ، بما أنّ $r < 0$ إذن المتتاليّة (v_n) متناقصة تماما .

2. $S_2 = \dfrac{10}{2}(v_0 + v_9)$ و منه $S_2 = 5(2 - 45)$ أي $S_2 = -215$.

ج) $k_n = 3^n + 1 - 5n$ و منه $k_n = u_n + v_n$.

$S_3 = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots (u_9 + v_9)$ و منه $S_3 = S_1 + S_2$ و منه $S_3 = 29524 - 215$ أي 29309 .

حل التمرين رقم 19 — للعودة إلى التمرين 19

1/ أ) $v_n = v_0 \times q^n$ و منه 2×3^n .

ب) $v_{n+1} - v_n = 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n$ و منه $v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n$ و منه $v_{n+1} - v_n > 0$ و منه (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

2/ أ) $S_n = v_0 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$ أي $S_n = 2 \times \dfrac{1-3^n}{-2}$ أي $S_n = 3^n - 1$.

ب) $S_n = 80$ إذن $3^n - 1 = 80$ أي $3^n = 81$ أي $3^n = 3^4$ و منه $n = 4$.

ج) نضع : $P(n)$: $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 .

من أجل $n = 0$ لدينا $3^0 - 1 = 0$ و 0 يقبل القسمة على 2 إذن $P(0)$ صحيحة .

نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كلّ عدد طبيعي n و نثبت صحة $P(n+1)$.

$P(n)$ صحيحة معناه $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 أي يوجد عدد طبيعي ℓ بحيث $3^n - 1 = 2\ell$ ، لدينا

$3^{n+1} - 1 = 3^{n+1} - 3 + 2$ أي $3^{n+1} - 1 = 3 \times \underbrace{3^n - 1}_{=2\ell} + 2$ أي $3^{n+1} - 1 = 6\ell + 2$ أي $3^{n+1} - 1 = 2\underbrace{(3\ell + 1)}_{=k}$ و منه $3^{n+1} - 1 = 2k$

حيث k عدد طبيعي و منه $3^{n+1} - 1$ يقبل القسمة على 2 إذن $P(n+1)$ صحيحة و عليه $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 من أجل كلّ عدد طبيعي n .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com