najah213.com · نجاح 213

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الحسن ابن الهيثم النزلة — المستوى : 3 ثانوي

الأستاذ: بوقفة عبد الفتاح — شعبة : ع ت - ت ر - ر

الملخص الشامل في الدوال الأسية

الرياضيات ليست إبرة تحقن في جسمك في بداية السنة لتصبح ممتازا فيها

الرياضيات = حبها + التركيز + المرافقة اليومية

1 قواعد الحساب (الخواص)

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- $e^0 = 1$

- $e^a * e^b = e^{a+b}$
- $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $(e^a)^n = e^{na}$

2 الإشتقاق

$(e^x)' = e^x$

$\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x)e^{f(x)}$

أمثلة :

$(e^{3x})' = 3e^{3x}$

$(e^{-4x})' = -4e^{-4x}$

$\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = \frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

3 النهايات الشهيرة

باستعمال التزايد المقارن : بما أن $e^x > x$ فإن نهاية x مهملة أمام نهاية e^x ومنه:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

4 معادلات أسية

تمرين: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات:

1) $e^{x+3} = e^{\frac{4}{x}}$
2) $e^{x^2} = e^{-3(x+1)}$
3) $\frac{x+4}{e^{6-x}} = e^{\frac{1}{x}}$

الحل:

1) $e^{x+3} = e^{\frac{4}{x}} \iff x+3 = \frac{4}{x}$

$x(x+3) = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2+3x-4=0$

$\Delta = 25 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -4$ أو $x_2 = 1$

$S = \{-4;\ 1\}$

2) $e^{x^2} = e^{-3(x+1)} \iff x^2 = -3(x+1)$

$x^2+3x+3=0$

$\Delta = -3 < 0$

إذن المعادلة (2) لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$

3) $\frac{x+4}{e^{6-x}} = e^{\frac{1}{x}} \iff \frac{x+4}{6-x} = \frac{1}{x}$

$x(x+4) = 1(6-x)$

$x^2+4x-6+x=0$

$x^2+5x-6=0$

$\Delta = 49 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -6$ أو $x_2 = 1$

$S = \{-6;\ 1\}$

ملاحظة: لو ظهر أحد الحلين 6 لرفضناه لأنه غير مقبول لأن مجموعة التعريف هي : $\mathbb{R} - \{0,6\}$

توضيح : $\frac{x+4}{6-x} = \frac{1}{x}$

لو وضعنا $x = 6$ يصبح لدينا : $\frac{6+4}{6-6} = \frac{10}{0}$ (مستحيل)

5 المتراجحات الأسية

تمرين : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات :

1) $e^{3x} \leq 1$
2) $e^{2x^2} > e^{5x+3}$
3) $e^{-x^2+x} \geq 1$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

الحل:

$e^{3x} \leq 1 \quad \Leftrightarrow e^{3x} \leq e^{0} \Longrightarrow 3x \leq 0 \Longrightarrow x \leq 0$

إذن $S =]-\infty; 0]$

2) $e^{2x^2} > e^{5x+3}$

$2x^2 > 5x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 > 0 \Rightarrow \Delta = 49 > 0$

$x_1 = 3$ أو $x_2 = \frac{-1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		3		$+\infty$
$2x^2 - 5x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن $S =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]3; +\infty[$

3) $e^{-x^2+x} \geq 1 \quad \Leftrightarrow -x^2 + x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x(-x+1) \geq 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-x^2 + x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إذن: $S = [0; 1]$

6 نهاية دالة أسية وتفسيرها الهندسي

تمرين : عين نهاية الدالة f

✓ $f(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x + 1}$ عند $-\infty$ و $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{2e^x + 1} = -1$

$y = -1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{2e^x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x(1 - \frac{1}{e^x})}{e^x(2 + \frac{1}{e^x})} = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$

✓ $f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$ عند 0

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2}(\frac{e^x - 1}{x}) = \frac{1}{2}$

✓ $f(x) = \frac{1}{x}(e^{3x} - 1)$ عند 0 و $+\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}(e^{3x} - 1) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^0}{x - 0} = (e^{3(0)})' = 3e^0 = 3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}(e^{3x} - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{e^{3x}}{x} - \frac{1}{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3e^{3x}}{3x} - \frac{-1}{x} = +\infty$

احتمال وجود مستقيم مقارب مائل

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

✓ $f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ عند $-\infty$ و $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = -\infty \times 0 =$ ح ع ت

نستعمل تغيير المتغير وذلك بوضع: $t = \frac{1}{x} \Leftarrow x = \frac{1}{t}$

لما $x \to -\infty$ فإن $t = 0$

$$\lim_{t\to0} \frac{1}{t}(e^t - 1) = \lim_{t\to0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{t\to0} \frac{1}{t}(e^t - 1) = \lim_{t\to0} \frac{e^t - 1}{t - 0} = (e^0)' = 1$$

$y = 1$ مستقيم مقارب أفقي

✓ $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ عند حدود D_f

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$y = 1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$y = 1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$

➢ $f(x) = \frac{e^{4x}-3}{e^{4x}+1}$ عند $-\infty$ و $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{4x} - 3}{e^{4x} + 1} = -3$$

$y = -3$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{4x} - 3}{e^{4x} + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{4x}\left(1 - \frac{3}{e^{4x}}\right)}{e^{4x}\left(1 + \frac{3}{e^{4x}}\right)} = 1$$

$y = 1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$

✓ $f(x) = x - \frac{e^x+1}{e^x-1}$ عند 0 و $-\infty$ و$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x - \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{e^x(1 + \frac{1}{e^x})}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})}\right) = +\infty$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(x-\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)=+\infty$$

$x=0$ مستقيم مقارب عمودي

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(x-\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)=-\infty$$

$x=0$ مستقيم مقارب عمودي

✓ $f(x)=xe^x$ عند $-\infty$ و$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$$

$y=0$ مستقيم مقارب أفقي بجوار$-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$$

✓ $f(x)=(2x-3)e^x$ عند $-\infty$ و$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}(2x-3)e^x=\lim_{x\to-\infty}2xe^x-3e^x=0$$

$y=0$ مستقيم مقارب أفقي بجوار$-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(2x-3)e^x=+\infty$$

✓ $f(x)=(x^2+x+1)e^x$ عند $-\infty$ و$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^x+xe^x+e^x=0$$

$y=0$ مستقيم مقارب أفقي بجوار$-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+3+1)e^x=\lim_{x\to+\infty}x^2e^x=+\infty$$

✓ $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$ عند $\mathbb{R}^*$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}=0$$

$y=0$ مستقيم مقارب أفقي بجوار$-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

7 مشتقة الدالة الأسية وتغيراتها

تمرين: أدرس إتجاه تغير الدوال الآتية :

1) $f(x)=xe^x$

2) $f(x)=(2x-3)e^x$

3) $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$

4) $f(x)=\frac{3e^x-2}{e^x+1}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

الحل:

1) $f(x) = xe^x$

$f'(x) = 1 \times e^x + e^x \times x$

$f'(x) = e^x(1 + x)$

لدينا $e^x > 0$ إذن إشارة المشتق من إشارة $(x + 1)$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x + 1$	−	0	+
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	$f(-1)$	↗

2) $f(x) = (2x - 3)e^x$

$f'(x) = 2e^x + e^x(2x - 3)$

$= e^x(2 + 2x - 3)$

$= e^x(2x - 1)$

ومنه إشارة المشتق من إشارة $(2x - 1)$ لأن $e^x > 0$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x - 1$	−	0	+
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	$f(\frac{1}{2})$	↗

3) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

$$f'(x) = \frac{(e^x \times x) - 1 \times (e^x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{(x - 1)\,e^x + 1}{x^2}$$

ومنه إشارة المشتق من إشارة البسط

$$f'(x) = \frac{(x - 1)\,e^x + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

حيث : $g(x) = (x - 1)e^x + 1$

$$g'(x) = e^x + e^x(x - 1)$$
$$g'(x) = e^x(1 + x - 1)$$
$$g'(x) = xe^x$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	↘		0	↗	

من جدول التغيرات لدينا $g(x) > 0$ إذن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} > 0$

ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}^*$

$$4) f(x) = \frac{3e^x - 2}{e^x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{3e^x(e^x + 1) - [e^x(3e^x - 2)]}{(e^x + 1)^2} = \frac{3e^{2x} + 3e^x - 3e^{2x} + 2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{5e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

لأن: $5e^x > 0$ و $(e^x + 1)^2 > 0$

إذن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

8 الدالة الأسية ومبرهنة القيم المتوسطة

تمرين :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^{-x} - x - 2$

- ✓ أحسب نهاية f عند $-\infty$ و $+\infty$
- ✓ شكل جدول تغيرات الدالة f
- ✓ بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له
- ✓ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.45 < \alpha < -0.44$
- ✓ استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

الحل:

✓ **النهايات**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (e^{-x} - x - 2) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (e^{-x} - x - 2) = -\infty$$

✓ **إتجاه التغير :** الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$

لدينا $e^{-x} > 0 \Rightarrow -e^{-x} < 0$

بإضافة العدد (-1) $-1 - e^{-x} < -1$

إذن $f'(x) < 0$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

إذن f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

✓ **البرهان أن (C_f) يقبل مقارب مائل**

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x-2)]=\lim_{x\to+\infty}[e^{-x}]=0$$

ومنه $y=-x-2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

✓ **برهان أن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا**

بما أن الدالة مستمرة ومتناقصة على المجال $[-0.45;-0.44]$ وبما أن $f(-0.45)\times f(-0.44)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.45<\alpha<-0.44$

✓ **استنتج إشارة $f(x)=0$ على $\mathbb{R}$**

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

9 حساب $f(\alpha)$

تمرين: g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x)=x+2-e^x$$

1. بين أن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1.14\ ;\ 1.15[$
2. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$

أ/ بين أن : $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$ ، ب/ أعط حصرا لـ: $f(\alpha)$

الحل:

1. تبيين أن $g(x)=0$

$$\lim_{x\to-\infty}(x+2-e^x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}e^x\left(\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}-1\right)=-\infty$$

$$g'(x)=1-e^x$$

$g'(x)>0$ يكافئ $1-e^x>0$ ، يكافئ $-e^x>-1$ ، يكافئ $e^x<1$

يكافئ $x<\ln 1$ ، يكافئ $x<0$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$g(0)$	↘	$-\infty$

من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة g مستمرة ومتناقصة على المجال $[1.14;1.15]$

ولدينا $g(1,14) \times g(1,15) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]1,15 ; 1,14[$

❷ أ/ تبيين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$

من السؤال السابق لدينا : $g(\alpha) = 0$ يكافئ : $\alpha + 2 - e^{\alpha} = 0$

$$e^{\alpha} = \alpha + 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ولدينا: $f(\alpha) = \frac{e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}+1} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

بتعويض (1) في (2) نجد : $f(\alpha) = \frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1} = \frac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1}$

معلومة: $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = (\alpha + 1)^2$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$$

وهو المطلوب

ب/ حصر $f(\alpha)$

$$1.14 < \alpha < 1.15$$

بإضافة العدد 1 نجد

$$2.14 < \alpha + 1 < 2.15$$

بأخذ المقلوب نجد

$$\frac{1}{2.14} > \frac{1}{\alpha + 1} > \frac{1}{2.15}$$

$$0.467 > f(\alpha) > 0.465$$

$$0.465 < f(\alpha) < 0.467$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

10 الدالة الأسية ومركز تناظر

تمرين: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$

بين أن $A(0;\frac{1}{2})$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

الحل :

$$f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$$
$$f(2(0)-x)+f(x)=2(\frac{1}{2})$$
$$f(-x)+f(x)=1$$

أولا من أجل كل $x\in D_f$ لدينا أيضا $-x\in D_f$

$$f(-x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}=\frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}}=\frac{1}{e^x}\times\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}$$

بالتعويض نجد

$$f(-x)+f(x)=\frac{1}{e^x+1}+\frac{e^x}{e^x+1}$$
$$f(-x)+f(x)=\frac{1+e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1}{e^x+1}=1$$

وهو المطلوب

إذن $A(0;\frac{1}{2})$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com