najah213.com · نجاح 213



**تمرين 1**

أحسب الجداء السلمي $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ في كل حالة من الحالات التالية :

1- $\|\vec{u}\| = 3$ و $\|\vec{v}\| = 2$ و $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{4}$

2- $\|\vec{u}\| = \frac{4}{7}$ و $\|\vec{v}\| = \frac{1}{2}$ و $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{6}$

3- $\|\vec{u}\| = 5$ و $\|\vec{v}\| = \frac{3}{2}$ و $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$

4- $\|\vec{u}\| = 3$ و $\|\vec{v}\| = 4$ و $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{7\pi}{6}$

5- $\|\vec{u}\| = 6$ و $\|\vec{v}\| = 5$ و $(\vec{u},\vec{v}) = -\frac{\pi}{4}$

6- $\|\vec{u}\| = 4\sqrt{3}$ و $\|\vec{v}\| = \frac{7}{3}$ و $(\vec{u},\vec{v}) = -\frac{\pi}{6}$

## حل التمرين رقم 1

1- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 3 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}$

2- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{7}$

3- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 5 \times \frac{3}{2} \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-15}{4}$

لأن : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

4- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 3 \times 4 \times \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -6\sqrt{3}$

لأن : $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

5- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 6 \times 5 \times \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 15\sqrt{2}$

لأن : $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 4\sqrt{3} \times \frac{7}{3} \times \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 14$

لأن : $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



**تمرين 2**

أحسب الجداءات السلمية التالية : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{CD}\,.\,\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{DO}\,.\,\overrightarrow{OI}$ ، $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{DB}$ حيث: $OI = 1$ .




## حل التمرين رقم 2

1- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا و لهما نفس الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 9 \times 6 = 54$

2- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CB}$ مرتبطين خطيا و متعاكسين في الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{CB} = -4 \times 3 = -12$

3- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا و متعاكسين في الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD} = -9 \times 10 = -90$

4- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطين خطيا و لهما نفس الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{CD}\,.\,\overrightarrow{AD} = 10 \times 4 = -40$

5- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{DO}$ و $\overrightarrow{OI}$ مرتبطين خطيا و لهما نفس الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{DO}\,.\,\overrightarrow{OI} = 6 \times 1 = 6$

6- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{IA}$ و $\overrightarrow{DB}$ مرتبطين خطيا و متعاكسين في الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{DB} = -3 \times 13 = -39$

**النجاح** يحققه فقط الذين **يواصلون المحاولة** بنظرة ايجابية للأشياء



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213



تمرين 3

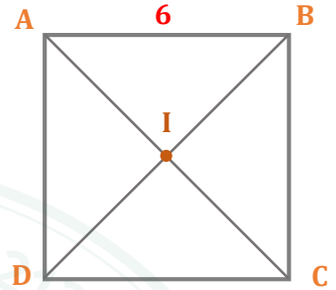
$ABCD$ مربع حيث:

$AB = 6$ و $I$ نقطة تقاطع قطريه.

أحسب الجداءات السلمية التالية :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{BI}$ ، $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$




## حل التمرين رقم 3

1- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ مرتبطين خطيا و لهما نفس الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = 6 \times 6 = 36$

2- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CB}$ متعامدين .

فان : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} = 0$

3- بما أن : قطرا المربع متعامدين فان الشعاعين $\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{IC}$ متعامدين.

ومنه : $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = 0$

4- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{DI}$ و $\overrightarrow{BI}$ مرتبطين خطيا و متعاكسين في الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{BI} = -6 \times 6 = -36$

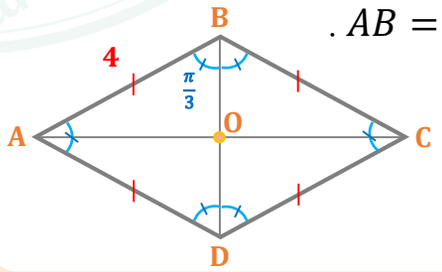
تمرين 4

$ABD$ و $BCD$ مثلثان متقايسا الأضلاع حيث $AB = 4$ .

أحسب الجداءات السلمية التالية :

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD}$






## حل التمرين رقم 4

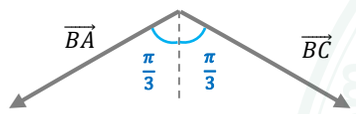
1- لدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \text{AB} \times \text{AD} \times \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

ومنه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 4 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ اذن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 8$

2- لدينا : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \text{BA} \times \text{BC} \times \cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$

ومنه : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 4 \times 4 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ اذن : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -8$

لأن : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

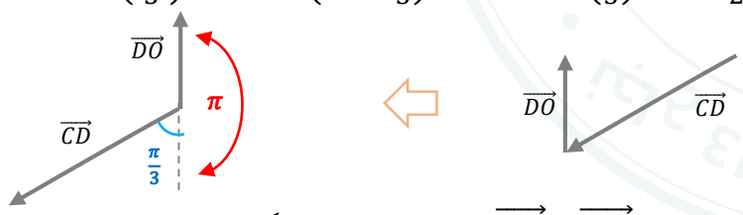



3- لدينا : $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD} = \text{DO} \times \text{CD} \times \cos(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{CD})$

ومنه : $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD} = 2 \times 4 \times \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ اذن : $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD} = -4$

لأن : $(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{DO},-\overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DC}) + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$

حيث : $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$




4- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CB}$ مرتبطين خطيا و متعاكسين في الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = -4 \times 4$ اذن : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = -8$

يقوم **الناجحون** بما لا يرغب به **الفاشلون** ، لذا **لا** تتمنى ان يكون الامر **سهلا**
بل تمنى ان تكون **انت الأفضل**



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213



تمرين 5

أحسب بطريقتين الجداء السلمي $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ في كل حالة من الحالات التالية :

1- $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

2- $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

3- $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$

4- $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$

## حل التمرين رقم 5

**الطريقة الأولى : نستعمل " $\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy'$ "**

1- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 3\times(-1) + (-2) = 5$

2- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = (4\times 2) + (-6)\times(1) = 2$

3- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = (5\times 7) + (2\times 8) = 51$

4- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = (2)\times(-4) + (-4)\times(-2) = 0$

**الطريقة الثانية : نستعمل " $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$ "**

1- لدينا :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2}$

$\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2}$

وعليه : $\|\vec{u}\|^2 = 13$ ، $\|\vec{v}\|^2 = 2$ و $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 8$

اذن : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}(13 + 5 - 8) = 5$

2- لدينا :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + (-6)^2}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2}$

$\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-7)^2}$



وعليه : $\|\vec{u}\|^2 = 52$ ، $\|\vec{v}\|^2 = 5$ و $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 53$

اذن : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}(52 + 5 - 53) = 2$

3- لدينا :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{5^2 + 2^2}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{7^2 + 8^2}$

$\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2}$

وعليه : $\|\vec{u}\|^2 = 29$ ، $\|\vec{v}\|^2 = 113$ و $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 40$

اذن : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}(29 + 113 - 40) = 51$

4- لدينا :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2}$

$\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{6^2 + (-2)^2}$

وعليه : $\|\vec{u}\|^2 = 20$ ، $\|\vec{v}\|^2 = 20$ و $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 40$

اذن : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}(20 + 20 - 40) = 0$

### ملاحظة

اذا كان $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ فان حساب مركبات الشعاع $\vec{u}-\vec{v}$ هي كتالي :

$$\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\end{pmatrix}$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213



تمرين 6 ★

في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ لدينا النقط $A(5,2)$ ، $B(3,4)$ و $C(0,1)$ .

1- أحسب الجداء السلمي لـ : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ .

2- ماذا يمكن القول عن المثلث $ABC$ .

## حل التمرين رقم 6

**الطريقة الأولى : نستعمل " $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$ "**

1- ▪ لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-5\\4-2\end{pmatrix}$ و منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ و لدينا $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-5\\1-2\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$ .

اذن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-2)\times(-5)+(2)\times(-1)=8$

▪ لدينا : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}5-3\\2-4\end{pmatrix}$ و منه $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ و لدينا $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0-3\\1-4\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$ .

اذن : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=(2)\times(-3)+(-2)\times(-3)=0$

▪ لدينا : $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5-0\\2-1\end{pmatrix}$ و منه $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ و لدينا $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}3-0\\4-1\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ .

اذن : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=(5)\times(3)+(1)\times(3)=18$

**الطريقة الثانية : نستعمل " $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$ "**

1- لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-5\\4-2\end{pmatrix}$ و منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ و لدينا $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-5\\1-2\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$ .

ولدينا أيضا : $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$ وعليه $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}3-0\\4-1\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ .

اذن :

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-2)^2+(2)^2}$

$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-5)^2+(-1)^2}$

$\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|=\|\overrightarrow{CB}\|=\sqrt{3^2+3^2}$

وعليه : $\|\overrightarrow{AB}\|^2=8$ و $\|\overrightarrow{AC}\|^2=26$ و $\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2=18$



اذن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(8+26-18)=8$

▪ لدينا : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}5-3\\2-4\end{pmatrix}$ و منه $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ و لدينا $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0-3\\1-4\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$ .

ولدينا أيضا : $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$ وعليه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-5\\1-2\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$ .

اذن :

$\|\overrightarrow{BA}\|=\sqrt{(2)^2+(-2)^2}$

$\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}$

$\|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\|=\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-5)^2+(-1)^2}$

وعليه : $\|\overrightarrow{BA}\|^2=8$ و $\|\overrightarrow{BC}\|^2=18$ و $\|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\|^2=26$

اذن : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(8+18-26)=0$

▪ لدينا : $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5-0\\2-1\end{pmatrix}$ و منه $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ و لدينا $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}3-0\\4-1\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ .

ولدينا أيضا : $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}$ وعليه $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}5-3\\2-4\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ .

اذن :

$\|\overrightarrow{CA}\|=\sqrt{5^2+1^2}$

$\|\overrightarrow{CB}\|=\sqrt{3^2+3^2}$

$\|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\|=\|\overrightarrow{BA}\|=\sqrt{2^2+(-2)^2}$

وعليه : $\|\overrightarrow{CA}\|^2=26$ و $\|\overrightarrow{CB}\|^2=18$ و $\|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\|^2=8$

اذن : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}(26+18-8)=18$

2- لدينا : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0$ وعليه الشعاعين $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدين .

اذن : المثلث $ABC$ قائم في $B$ .

لايهم من اين انت قادم ، المهم الى اين انت ذاهب .



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213 • najah213.com • نجاح 213 • najah213.com

تمرين 7 ★★

في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ يعطى :

1- $\vec{u}(3,-2)$ و $\vec{v}(2,4)$ ـــــــــ أحسب $\vec{u}.\vec{v}$ و $\|\vec{v}\|$ و $\vec{u}^2$ .

2- $\vec{u}\left(\frac{1}{2},-2\right)$ و $\vec{v}(4,-1)$ ـــــــــ أحسب $\vec{u}.\vec{v}$ و $\cos(\vec{u},\vec{v})$ .

3- $\vec{u}.\vec{v}=-\frac{4\sqrt{3}}{2}$ و $(\vec{u},\vec{v})=\frac{5\pi}{6}$ و $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ ـــــــــ أحسب $\|\vec{u}\|$ .

4- $\vec{u}\left(\cos\frac{2\pi}{3},\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ و $\vec{v}\left(\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ـــــ أحسب $\vec{u}.\vec{v}$ و $\cos(\vec{u},\vec{v})$ .

## حل التمرين رقم 7

1- لدينا : $\vec{u}.\vec{v}=(3\times 2)+(-2)\times(4)=-2$

و لدينا : $\|\vec{v}\|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$

و لدينا أيضا : $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}=(3\times 3)+(-2)\times(-2)=13$

2- لدينا : $\vec{u}.\vec{v}=\left(\frac{1}{2}\times 4\right)+(-2)\times(-1)=4$

و لكن : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

و عليه : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-2)^2}=\sqrt{\frac{17}{4}}$ و $\|\vec{v}\|=\sqrt{4^2+(-1)^2}=\sqrt{17}$

ومنه : $4=\sqrt{\frac{17}{4}}\times\sqrt{17}\times\cos(\vec{u},\vec{v})$ اذن : $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{8}{17}$

3- لدينا : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

و منه : $-\frac{4\sqrt{3}}{2}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

و عليه : $\|\vec{u}\|^2=4$ (لأن : $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$)

اذن : $\|\vec{u}\|=2$



4- أولا نقوم بتبسيط مركبات الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ :

لدينا $\vec{u}\left(\cos\frac{2\pi}{3},\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ فتصبح $\vec{u}\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(لأن : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

و لأن : $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ )

و لدينا $\vec{v}\left(\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4}\right)$ فتصبح $\vec{v}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

وعليه : $\vec{u}.\vec{v}=\left(-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{4}$

و لدينا : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

و منه : $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{4}=1\times 1\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

(لأن : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ و $\|\vec{v}\|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$)

اذن : $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{4}$

> ليس النجاح هو مفتاح السعادة **بل** السعادة هي مفتاح النجاح
> فان انت **احببت** ما تقوم به فلسوف يكون **النجاح** من نصيبك.

تمرين 8 ★

$ABC$ مثلث حيث $AB=2$ ، $AC=3$ ، $BC=\frac{3}{2}$ .

1- أحسب $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

2- أحسب $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

لدينا : $\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right\|^2\right)$

و منه : $\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(CA^2+CB^2-\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2\right)$

و عليه : $\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2^2\right)=\frac{29}{8}$

(ملاحظة : $AB=BA$ و $AC=CA$ و $BC=CB$ )

**تمرين 9**

$ABC$ مثلث حيث $AB=2$ ، $BC=\frac{3}{2}$ ، $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=\frac{11}{8}$.

- أحسب $\cos\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right)$ .

**حل التمرين رقم 9**

لدينا : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)$

و منه : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right)$

و منه : $\frac{11}{8}=\frac{1}{2}\left(2^2+AC^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$ أي: $AC^2=1$ وعليه : $AC=1$

لكن : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right)$ و منه : $\frac{11}{8}=2\times1\times\cos\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right)$

اذن : $\cos\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right)=\frac{11}{16}$

**تمرين 10**

$ABC$ مثلث حيث : $AB=2$ و $AC=3$ و $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=4$ .

- بين ان المثلث $ABC$ قائم في $B$ .

**حل التمرين رقم 10**

لدينا : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=4$ أي: $\overrightarrow{AB}\,.\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=4$

و منه : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC}=4$ أي: $AB^2+\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC}=4$

و عليه : $4+\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC}=4$ أي : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC}=0$

اذن : المثلث $ABC$ قائم في $B$ .



**تمرين 11**

1- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان حيث : $\|\vec{u}\|=3$ و $\|\vec{v}\|=2$ و $\vec{u}\,.\,\vec{v}=-3$

- أحسب : $(4\vec{u}-3\vec{v})(\vec{u}+2\vec{v})$ ، $(3\vec{u}-2\vec{v})^2$ .

2- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان حيث : $\|\vec{u}\|=3$ و $\|\vec{v}\|=2$ و $\vec{u}\,.\,\vec{v}=-3$

- أحسب : $(\vec{u}+\vec{v})^2$ ، $(\vec{u}-\vec{v})^2$ ، $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})$ .

**حل التمرين رقم 11**

1- حساب : $(4\vec{u}-3\vec{v})(\vec{u}+2\vec{v})$ :

$$(4\vec{u}-3\vec{v})(\vec{u}+2\vec{v})=4\vec{u}^2+8\vec{u}\,.\,\vec{v}-3\vec{v}\,.\,\vec{u}-6\vec{v}^2$$
$$=4\times(3)+2\times(-3)-6\times(-3)=24$$

- حساب : $(3\vec{u}-2\vec{v})^2$ :

$$(3\vec{u}-2\vec{v})^2=9\vec{u}^2+4\vec{v}^2-2((3\vec{u}).(-2\vec{v}))$$
$$=9\vec{u}^2+4\vec{v}^2+12\vec{u}\,.\,\vec{v}$$
$$=9\times(9)+4\times(4)+12\times(-3)=61$$

2- - حساب : $(\vec{u}+\vec{v})^2$ :

$$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}\,.\,\vec{v}=9+4+2\times(-3)=7$$

- حساب : $(\vec{u}-\vec{v})^2$ :

$$(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}\,.\,\vec{v}=9+4-2\times(-3)=19$$

- حساب : $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})$ :

$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2=9-4=5$$

أحيانا يغلق الله سبحانه و تعالى امامنا بابا لكي يفتح لنا بابا آخر أفضل منه
ولكن الانسان يضيع تركيزه في النظر الى الباب الذي أغلق
بدلا من باب الامل الذي انفتح امامه على مصراعيه.



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com