najah213.com · نجاح 213

ثانوية: المجاهد صديقي نوري
المستوى: 3 ثانوي علوم تجريبية

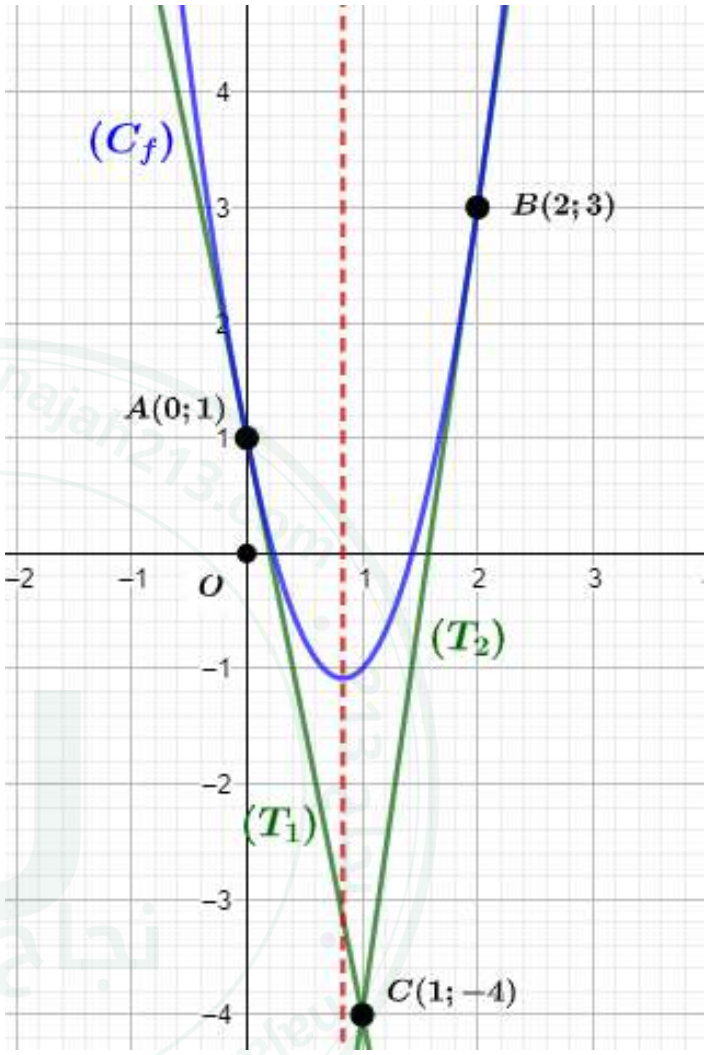
سلسلة تمارين رقم ②

الموسم الدراسي: 2021 / 2022
الأستاذ: قويسم براهيم الخليل

◄ التمرين 01:

I) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث: $f(x) = ax^2 + bx + c$

(C_f) تمثيلها البياني المعطى في الشكل المقابل:



حيث: (C_f) يمر بالنقطتين $A(0;1)$ و $B(2;3)$، والمماسين (T_1) و(T_2) في النقطتين A وB يتقاطعان في النقطة $C(1;-4)$

① اكتب معادلتي المماسين عند النقطتين A و B.

② استنتج $f'(0)$ و $f'(2)$

③ أوجد الأعداد الحقيقية a، b و c.

④ ادرس تغيرات الدالة f

⑤ أوجد المماسات لـ (C_f) التي تمس المبدأ O

⑥ بين أنّ المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{5}{6}$ محور تناظر لـ (C_f) .

II) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = 3x^2 - 5|x| + 1$$

① بيّن أنّ h دالة زوجية

② اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

③ وضح كيف يتم إنشاء (C_h) المنحنى الممثل للدالة h انطلاقا من (C_f) ، ثم أنشئه.

◄ التمرين 02:

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 3x + 16$$

① ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$، ثم شكل جدول تغيراتها.

② بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$$-2.5 < \alpha < -2$$

③ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$$

② ادرس تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

③ بين أنّ

$$f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$$

ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$

④ بين أن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

⑤ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

⑥ أوجد فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

⑦ مثل بيانيا (Δ) و (C_f) .

⑧ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x^3 - mx^2 - 8 - m = 0$

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = \frac{|x|x^2 - 8}{x^2 + 1}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المستوي السابق

① ادرس شفعية الدالة h

② اكتب h دون استعمال رمز القيمة المطلقة.

③ بيّن كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f). ثم أنشئه.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

◄ التمرين 03:

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$$

① ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

② بين أنّ $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$$\alpha \in]2; 3[$$

③ استنتج إشارة $g(x)$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

① بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

② ادرس تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

③ بيّن أن

$$f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$$

ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$

④ عين a، b، c بحيث:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$$

⑤ بيّن أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل (Δ)

⑥ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ).

⑦ عين معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0

⑧ مثل بيانيا كل من (Δ)، (T) و (C_f) .

⑨ ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$x^3 - (3+m)x^2 + (3+2m)x + 1 - m = 0$$

◄ التمرين 04:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = |x+2| + \frac{1}{x+1}$$

و (C_f) المنحنى الممثل لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

① اكتب عبارة الدالة f دون كتابة رمز القيمة المطلقة.

② ادرس قابلية الاشتقاق f عند 2،

ثم فسر هندسيا النتيجة.

③ احسب $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$ ،

ثم فسر هندسيا النتيجة.

④ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

⑤ ادرس تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

① برهن أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ_1) و(Δ_2)، يطلب تعيين معادلتيهما.

② ادرس الوضعية بين (C_f) و كلا من (Δ_1) و (Δ_2)

③ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty; -2[$ حيث: $-2.7 < \alpha < -2.6$

④ مثّل بيانيا كل من (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_f) .

◄ التمرين 05:

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 6x + 12$$

① ادرس اتجاه تغير الدالة g.

② بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث:

$$\alpha \in]-1.48 \ ; \ 1.47[$$

③ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

①

أ/ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x أن:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

ج/ ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

②

أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

③ بين أن: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

④ مثل بيانيا المستقيم (Δ) والمنحني (C_f).

• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

◄ حل التمرين 01:

I)

① كتابة معادلتي المماسين عند النقطتين A و B:

• لدينا (T_1) يمر من النقطتين A و C

ومنه شعاع توجيه المستقيم (AC) هو شعاع توجيه لـ (T_1):

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-0\\-4-1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$$

إذن معادلة (T_1) هي: $(T_1): -5x+(-1)y+c=0$

نعوض النقطة A في معادلة (T_1) نجد:

$$-5(0)-(1)+c=0 \Rightarrow c=1$$

إذن: $(T_1): -5x-y+1=0$ أي: $\boxed{(T_1): y=-5x+1}$

• ولدينا (T_2) يمر من النقطتين B و C

ومنه شعاع توجيه المستقيم (BC) هو شعاع توجيه لـ (T_2):

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1-2\\-4-3\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-1\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$$

إذن معادلة (T_2) هي: $(T_2): -7x+(1)y+c=0$

نعوض النقطة B في معادلة (T_2) نجد:

$$-7(2)+(3)+c=0 \Rightarrow c=11$$

إذن: $(T_2): -7x+y+11=0$ أي: $\boxed{(T_1): y=7x-11}$

② استنتاج $f'(0)$ و $f'(2)$:

$$f'(0)=-5 \quad \text{و} \quad f'(2)=7$$

③ ايجاد الأعداد الحقيقية a، b و c:

لدينا (C_f) يمر من النقطة A و B ، ولدينا سابقا $f'(0)=-5$

ومنه:

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(2)=3 \\ f'(0)=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(0)^2+b(0)+c=1 \\ a(2)^2+b(2)+c=3 \\ 2a(0)+b=-5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=1 \\ 4a+2b+c=3 \\ b=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-5 \\ c=1 \end{cases}$$

إذن: $f(x)=3x^2-5x+1$

④ دراسة تغيرات الدالة f:

$$f'(x)=0 \Rightarrow 6x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{6}$$

⑤ ايجاد المماسات لـ (C_f) التي تمس المبدأ O:

لايجاد المماسات التي تمس (C_f) في النقطة $O(0;0)$ نعوض النقطة O في معادلة المماس العامة، ثم نحل المعادلة:

$$f'(x)(x_O-x)+f(x)=y_O$$

$$\Rightarrow (6x-5)(0-x)+3x^2-5x+1=0$$

$$\Rightarrow -6x^2+5x+3x^2-5x+1=0 \Rightarrow -3x^2+1=0$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \text{أو} \\ x=-\sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{أو} \\ x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

ومنه (C_f) يقبل مماسين في النقطتين ذات الفاصلتين $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ يمران بالمبدأ O. نسميهما (T_3) و (T_4)

- ايجاد معادلة لـ (T_3):

$$(T_3): y=f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$=2\sqrt{3}x-2-5x+\frac{5\sqrt{3}}{3}+1-\frac{5\sqrt{3}}{3}+1=(2\sqrt{3}-5)x$$

- ايجاد معادلة لـ (T_4):

$$(T_4): y=f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$=-2\sqrt{3}x-2-5x-\frac{5\sqrt{3}}{3}+1+\frac{5\sqrt{3}}{3}+1=-(2\sqrt{3}+5)x$$

⑥ تبيين أنّ المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{5}{6}$ محور تناظر لـ (C_f) :

• لدينا: $x\in D_f$ معناه $x\in\mathbb{R}$ معناه $\left(2\left(\frac{5}{6}\right)-x\right)\in\mathbb{R}$

• ولدينا:

$$f\left(\frac{5}{3}-x\right)=3\left(\frac{5}{3}-x\right)^2-5\left(\frac{5}{3}-x\right)+1$$

$$=\frac{25}{3}-10x+3x^2-\frac{25}{3}+5x+1$$

$$=3x^2-5x+1=f(x)$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{5}{6}$ محور تناظر لـ (C_f)

II)

① تبيين أنّ h دالة زوجية:

$$h(-x)=3(-x)^2-5|-x|+1=3x^2-5|x|+1$$

$$=h(x)$$

معناه أن الدالة h زوجية. $h(-x)=h(x)$

② كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$h(x)=3x^2-5|x|+1=\begin{cases}3x^2-5x+1 & ;\ x\geq 0\\ 3(-x)^2-5(-x)+1 & ;\ x\leq 0\end{cases}$$

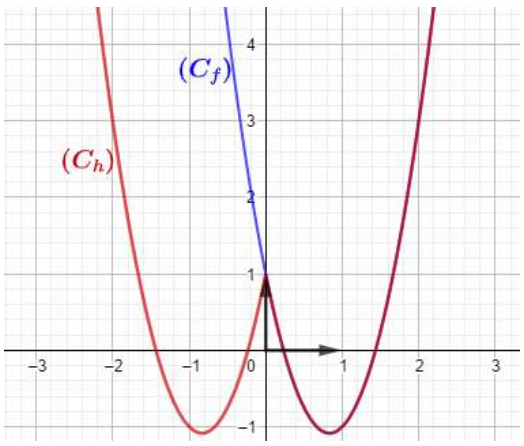
$$=\begin{cases}f(x) & ;\ x\geq 0\\ f(-x) & ;\ x\leq 0\end{cases}$$

③ توضيح كيف يتم إنشاء (C_h) :

لما $x\geq 0$ (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x\geq 0$

وبما أنّ الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب.

- إنشاء (C_h) :



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

◄ حل التمرين 02:

I)

① دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x-\infty}(x^3) = -\infty$

ولدينا $g'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2+1)$

بما أنّ: $(x^2+1) > 0$ فإن $g'(x)$ موجبة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

② تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ولدينا: $g(-2) \times g(-2.5) < 0$

لأن: $g(-2) \approx 2$ و $g(-2.5) \approx -7.13$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-2 < \alpha < -2.5$

③ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	−	0	+

II)

① تبيين أن $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3-8)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 + 16x}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^3+3x+16)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{x \cdot g(x)}{(x^2+1)^2}$$

② دراسة تغيرات الدالة f:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

ولدينا: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$

لدينا: $(x^2+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ كالتالي:

x	$-\infty$	α		0	$+\infty$
$g(x)$	−	0	+	|	+
x	−	|	−	0	+
$f'(x)$	+	0	−	0	+

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$	α		0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘	-8	↗ $+\infty$

③ تبيين أنّ $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$:

$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 + 3\alpha + 16 = 0 \Rightarrow \alpha^3 = -(3\alpha+16)$

لدينا: $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 + 3\alpha + 16 = 0$

$\Rightarrow \alpha\alpha^2 + 3\alpha + 16 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{-(3\alpha+16)}{\alpha}$

ومنه:
$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3-8}{\alpha^2+1} = \frac{(-3\alpha-16-8)}{\left(\frac{-(3\alpha+16)}{\alpha}+1\right)}$$
$$= \frac{(-3\alpha-24)}{\left(\frac{-3\alpha-16+\alpha}{\alpha}\right)} = \frac{(-3\alpha-24)}{\left(\frac{-2\alpha-16}{\alpha}\right)}$$
$$= \frac{3\alpha(\alpha+8)}{2(\alpha+8)} = \frac{3}{2}\alpha$$

- تعيين حصرا لـ $f(\alpha)$:

لدينا: $-2 < \alpha < -2.5$ ومنه: $-7.5 < 3\alpha < -6$

ومنه: $-3.75 < \frac{3}{2}\alpha < -3$ إذن: $-3.75 < f(\alpha) < -3$

④

أ/ تبيين أن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - y_{(\Delta)}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-8}{x^2+1} - x\right)$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-8-x}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{x}{x^2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

ومنه (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{x^3-8}{x^2+1} - x = \frac{-(x+8)}{x^2+1}$$

لدينا: $(x^2+1) > 0$ ومنه: $-(x+8) = 0 \Rightarrow x = -8$

الوضعية:

x	$-\infty$	-8	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	+	0	−

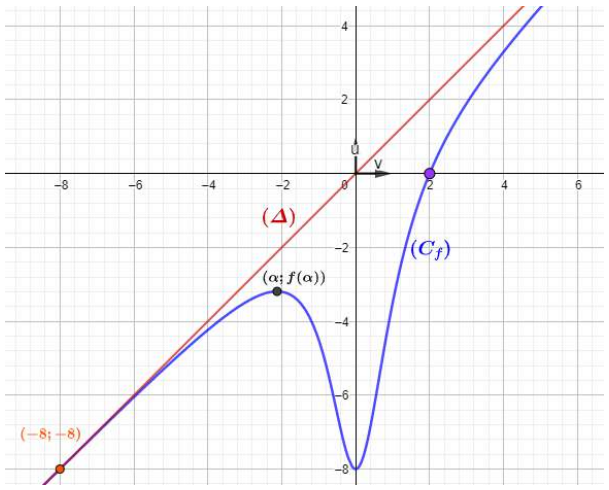
⑤

أ/ ايجاد فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3-8}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

إذن: $(C_f) \cap (xx') = \{2\}$

ب/ التمثيل البياني:



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ج/ المناقشة البيانية:

$$x^3 - mx^2 - 8 - m = 0 \Rightarrow x^3 - 8 - m(x^2+1) = 0$$
$$\Rightarrow x^3 - 8 = m(x^2+1) \Rightarrow \frac{x^3-8}{x^2+1} = m \Rightarrow f(x) = m$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات الأفقية ذات المعادلة $y_m = m$، وهي:

لما $m < -8$ المعادلة تقبل حل سالب

لما $m = -8$ المعادلة تقبل حلين: حل مضاعف معدوم $x = -8$ ، وحل سالب

لما $-8 < m < -2$ المعادلة تقبل حل موجب وحلين سالبين

لما $m = -2$ المعادلة تقبل حلين: حل موجب وحل مضاعف سالب

لما $m > -2$ المعادلة تقبل حل وحيد موجب

III)

① دراسة شفعية الدالة h:

$$h(-x) = \frac{|-x|(-x)^2 - 8}{(-x)^2+1} = \frac{|x|x^2-8}{x^2+1} = h(x)$$

ومنه الدالة h زوجية

② كتابة h دون استعمال رمز القيمة المطلقة:

$$h(x) = \frac{|x|x^2-8}{x^2+1} = \begin{cases} f(x) & ; \ x \geq 0 \\ f(-x) & ; \ x \leq 0 \end{cases}$$

③ استنتاج رسم (C_h) :

(C_h) يطابق (C_f) لما $x > 0$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة إلى محور التراتيب.

◄ حل التمرين 03:

I)

① دراسة تغيرات الدالة g:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

لدينا: $g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 == 3(x-1)^2$

لدينا: $(x-1)^2 > 0$ ومنه: $g'(x) > 0$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

② تبيين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تبل حلا وحيدا α :

لدينا: • الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

• $g(2) \times g(3) < 0$

لأن: $g(3) \approx 4$ و $g(2) \approx -3$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

③ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$		

II)

① حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{x^2}\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) = \frac{2}{(0^+)^2} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x) = \frac{2}{(0^-)^2} = +\infty$

② تبيين أن: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$:

$$f'(x) = \frac{(3x^2-6x+3)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3-3x^2+3x+1)}{(x-1)^4}$$
$$= \frac{3x^3-6x^2+3x-3x^2+6x-3-2x^3+6x^2-6x-2}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{x^3-3x^2+3x-5}{(x-1)^3} = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

③ دراسة تغيرات الدالة f:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3} = \frac{g(x)}{(x-1)(x-1)^2}$$

لدينا: $(x-1)^2 \geq 0$، ومنه الإشارة من إشارة $g(x) \cdot (x-1)$

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$x-1$	$-$		$+$			$+$	
$g(x)$	$-$		$-$	0	$+$		
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$		

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

④ تبيين أنّ $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 5 = 0$$
$$\Rightarrow \alpha^3 = 3\alpha^2 - 3\alpha + 5$$

ومنه:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{(\alpha-1)^2}$$
$$= \frac{3\alpha^2 - 3\alpha + 5 - 3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{(\alpha-1)^2} = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$$

- تعيين حصرا لـ $f(\alpha)$:

لدينا: $2.5 < \alpha < 2.6$ ومنه: $1.5 < \alpha - 1 < 1.6$

ومنه: $(1.5)^2 < (\alpha-1)^2 < (1.6)^2$

ومنه: $\frac{1}{(1.6)^2} < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < \frac{1}{(1.6)^2}$

ومنه: $\frac{6}{(1.6)^2} < \frac{6}{(\alpha-1)^2} < \frac{6}{(1.6)^2}$ ومنه: $2.34 < f(\alpha) < 2.67$

⑤

أ/ تعيين الأعداد الحقيقية a، b، c :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2} = \frac{(ax+b)(x^2-2x+1)+c}{(x-1)^2}$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$= \frac{ax^3 + (b-2a)x^2 + (a-2b)x + b + c}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$

ب/ تبيين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين:

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$ ، ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 1$

ولدينا: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[\frac{2}{(x-1)^2}\right] = 0$

ومنه: (C_f) يقبل م م م (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته $y = x - 1$

ج/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ):

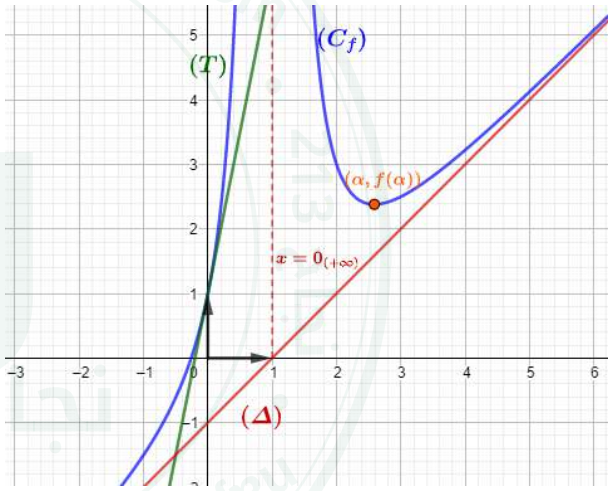
بما أن: $(x-1)^2 > 0$ ، فإنّ: $\left(f(x) - y_{(\Delta)}\right) > 0$

ومنه: (C_f) يقع فوق (Δ) على D_f.

⑥ تعيين معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

$$y_{(T)} = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{g(0)}{(-1)^3}x + f(0) = 5x + 1$$

⑦ التمثيل البياني:



⑧ المناقشة البيانية:

$$x^3 - (3+m)x^2 + (3+2m)x + 1 - m = 0$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 - mx^2 + 3x + 2mx + 1 + m = 0$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = mx^2 - 2mx + m$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = m(x^2 - 2x + 1)$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = m(x-1)^2$$
$$\Rightarrow \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} = m$$
$$\Rightarrow f(x) = m$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات الأفقية ذات المعادلة: $y_m = m$ ، وهي:

لما $m < 1$ المعادلة تقبل حل سالب

لما $m = 1$ المعادلة تقبل حل معدوم

لما $1 < m < f(\alpha)$ المعادلة تقبل حل موجب

لما $m = f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين أحدهما مضاعف موجب والآخر موجب

لما $m > f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين موجبين

◄ حل التمرين 04:

① كتابة عبارة الدالة f دون كتابة رمز القيمة المطلقة:

$$f(x) = |x+2| + \frac{1}{x+1}$$
$$= \begin{cases} x + 2 + \frac{1}{x+1} & ; \quad x \in [-2; -1[\cup]-1; +\infty[\\ -x - 2 + \frac{1}{x+1} & ; \quad x \in]-\infty; -2] \end{cases}$$

② دراسة قابلية الاشتقاق للدالة f عند (-2):

لدينا: $f(-2) = -1$ ولدينا:

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \left(\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)}\right) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \left(\frac{-x - 2 + \frac{1}{x+1} - (-1)}{x+2}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \left(\frac{-x - 1 + \frac{1}{x+1}}{x+2}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \left(\frac{-x^2 - x - x - 1 + 1}{(x+2)(x+1)}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \left(\frac{-x^2 - 2x}{(x+2)(x+1)}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \left(\frac{-x(x+2)}{(x+2)(x+1)}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \left(\frac{-x}{x+1}\right)$$
$$= \frac{2}{-1} = -2 \in \mathbb{R}$$

ومنه الدالة f تقبل الاشتقاق عند -2 من اليسار

ولدينا:

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \left(\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-1)}\right) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \left(\frac{x + 2 + \frac{1}{x+1} - (-1)}{x+2}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \left(\frac{x + 3 + \frac{1}{x+1} + 1}{x+2}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \left(\frac{x^2 + x + 3x + 3 + 1}{(x+2)(x+1)}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \left(\frac{x^2 + 4x + 4}{(x+2)(x+1)}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \left(\frac{(x+2)(x+2)}{(x+2)(x+1)}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \left(\frac{x+2}{x+1}\right) = \frac{0}{-1} = 0 \in \mathbb{R}$$

ومنه الدالة f تقبل الاشتقاق عند -2 من اليمين

وبما أنّ $-2 \neq 0$ فإنّ الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند -2

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

- التفسير الهندسي للنتيجة: (C_f) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة -2 معامل توجيه كل منهما 0 و -2 على الترتيب

③

أ/ حساب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$:

- $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \left(x+2+\dfrac{1}{x+1}\right) = 1+\dfrac{1}{0^+} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} \left(x+2+\dfrac{1}{x+1}\right) = 1+\dfrac{1}{0^-} = -\infty$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x=-1$

أ/ حساب $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$:

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(x+2+\dfrac{1}{x+1}\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(-x-2+\dfrac{1}{x+1}\right) = +\infty$

④ دراسة تغيرات الدالة f:

- دراسة $f'(x)$:

• لما: $x \in [-2;-1[\cup]-1;+\infty[$:

$$f'(x) = 1-\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ و $(x+2) \geq 0$ ومنه:

إذن: $f'(x) > 0$ لما: $x \in]0;+\infty[$

$f'(x) < 0$ لما: $x \in [-2;-1[\cup]-1;0[$

• لما: $x \in]-\infty;-2]$:

$$f'(x) = -1-\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-2x-2-1}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-2x-3}{(x+1)^2} = \frac{-(x^2+2x+3)}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه:

لدينا: $\Delta = -8 < 0$ ومنه: $(x^2+2x+3) > 0$

إذن: $f'(x) < 0$ لما: $x \in]-\infty;-2]$

- تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$
			$-\infty$				

⑤

ب/ برهان أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين :

- لما: $x \in [-2;-1[\cup]-1;+\infty[$:

$$\lim_{x\to +\infty}[f(x)-(x+2)] = \lim_{x\to +\infty}\left[\frac{1}{x+1}\right] = 0$$

ومنه (C_f) يقبل م م (Δ_1) بجوار $+\infty$ معادلته: $y = x+2$

- لما: $x \in]-\infty;-2]$:

$$\lim_{x\to -\infty}[f(x)-(-x-2)] = \lim_{x\to -\infty}\left[\frac{1}{x+1}\right] = 0$$

ومنه (C_f) يقبل م م (Δ_2) بجوار $-\infty$ معادلته: $y = -x-2$

ج/ دراسة الوضعية بين (C_f) و (Δ_1) :

- لما: $x \in [-2;-1[\cup]-1;+\infty[$:

$$f(x)-y_{(\Delta_1)} = \frac{1}{x+1}$$

لدينا: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ ومنه:

x	-2		-1	$+\infty$
$f(x)-y_{(\Delta_1)}$		$-$	‖	$+$

- دراسة الوضعية بين (C_f) و (Δ_2) :

- لما: $x \in]-\infty;-2]$:

$$f(x)-y_{(\Delta_2)} = \frac{1}{x+1}$$

لدينا: $(x+1) < 0$ على المجال $]-\infty;-2]$

ومنه: $\left(f(x)-y_{(\Delta_2)}\right) < 0$ إذن: (C_f) تحت (Δ_1)

⑥ تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α :

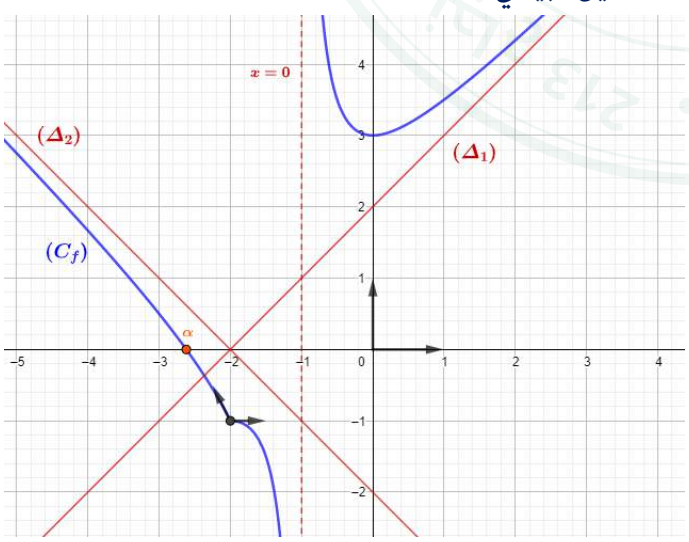
لدينا: الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;-2]$

ولدينا: $f(-2.6)\times f(-2.7) < 0$

لأنّ $f(-2.7) \approx 0.11$ و $f(-2.6) \approx -0.02$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-2.7 < \alpha < -2.6$.

⑦ التمثيل البياني:



◄ حل التمرين 05:

I)

① دراسة اتجاه تغير الدالة g:

لدينا $g'(x) = 3x^2+6$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ولدينا $3x^2+6>0$، إذن: الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

② تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا α :

بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$g(-1.48)=-0.12$ و $g(-1.47)=0.0035$

ولدينا $g(-1.48)\times g(-1.47)<0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، $g(x)=0$ تقبلا حلا وحيد

- استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II)

①

أ/ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب/ حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(3x^2)(x^2+2)-(2x)(x^3-6)}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{x(x^3+6x+12)}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

- جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$		α		0	$+\infty$
x	$-$		$-$		0	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$			$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	-3	↗ $+\infty$

②

أ/ تبيين أن المستقيم (Δ) مقارب مائل:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-6}{x^2+2}-x\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-6-x^3-2x}{x^2+2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-6-2x}{x^2+2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-2}{x}\right)=0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

ب/ دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لـ (Δ):

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y$ على $\mathbb{R}$:

$$f(x)-y=\frac{-2x-6}{x^2+2}$$

لدينا: $(x^2+2)>0$ ومنه الإشارة من $(-2x-6)$:

$-2x-6=0\Rightarrow -2x=6\Rightarrow x=-3$

ومنه إشارة $f(x)-y$:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) على المجال: $]-\infty;-3[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-3;-3)$
- (C_f) تحت (Δ) على المجال: $]-3;+\infty[$

③ تبين أن: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$:

يكفي أن نبرهن أنّ $f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=0$:

$$f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=\frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}-\frac{3}{2}\alpha$$
$$=\frac{2\alpha^3-12-3\alpha^3-6\alpha}{\alpha^2+2}$$
$$=\frac{-(\alpha^3+6\alpha+12)}{\alpha^2+2}$$
$$=-\frac{g(\alpha)}{\alpha^2+2}$$

ولدينا من السؤال السابق: $g(\alpha)=0$

ومنه:

$$f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=-\frac{0}{\alpha^2+2}=0$$

إذن: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$

- حصر $f(\alpha)$:

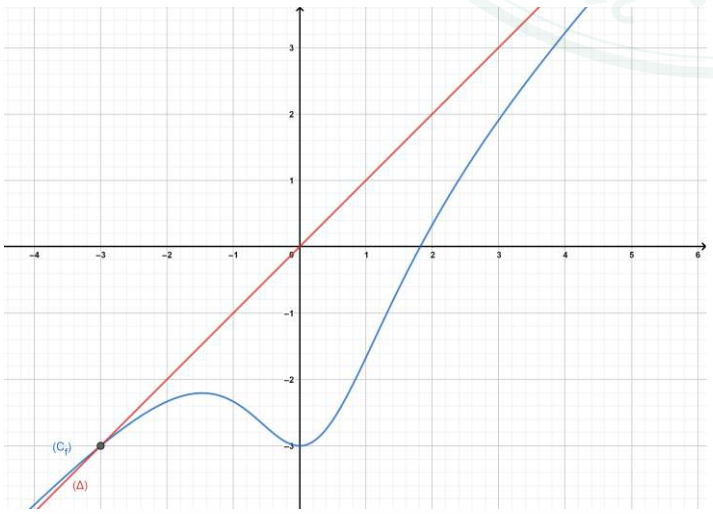
لدينا: $-1.48<\alpha<-1.47$

ولدينا: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$

ومنه:

$$\frac{3}{2}(-1.48)<\frac{3}{2}\alpha<\frac{3}{2}(-1.47)$$
$$-2.22<f(\alpha)<-2.21$$

④ إنشاء المستقيم (Δ) والمنحني (C_f):



• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com