najah213.com · نجاح 213

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

إمتحان البكالوريا التجريبي
دورة مـــــاي 2024م
الشعبة: علوم تجريبية

ثانويات المقاطعة الأولى -جيجل
ثانوية بن زايد السعيد -العوانة
ثانوية صالحي عثمان -بئر بوحوش

إختبار في مادة الرياضيات

المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأوّل:

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

تضم جمعية سبع نساء وتسعة رجال، من بينهم إمرأة واحدة إسمها فاطمة، ورجل واحد إسمه عبد الله.
أرادت الجمعية تشكيل لجنة تضم رئيسا ونائبا وكاتبا من أجل تمثيلها في إحدى المناسبات الوطنية.

1/ أحسب احتمال الأحداث التالية: **A** «اللجنة تضم عبد الله» **B** «فاطمة كاتبة للّجنة»

C «اللجنة تضم إما فاطمة وإما عبد الله» **D** «اللجنة تتكون من رجال ونساء معا»

2/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل لجنة عدد الرجال فيها.

ا/ عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

ب/ استنتج $E(2024X + 1445)$.

ج/ أحسب الإحتمال $P\left(\int_1^X \ln t\, dt < 1\right)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
نعتبر النقطتين A و B لاحقتيهما على الترتيب: $Z_A = 1 - 2i$ و $Z_B = -i$.

في كل حالة من الحالات التالية، عيّن الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة مع التبرير:

1/ حل المعادلة: $(1 + 2i)\overline{Z} + 2 - i = 0$ ذات المجهول Z من $\mathbb{C}$ هو:

(أ) $Z = -i$	(ب) $Z = i$	(جـ) $Z = 1 - 2i$

2/ عمدة للعدد المركب Z حيث: $Z = -3\left(-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)$ هي:

(أ) $\frac{\pi}{7}$	(ب) $-\frac{\pi}{7}$	(جـ) $\pi - \frac{\pi}{7}$

3/ العدد المركب $L = \left(\frac{Z_A - Z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1445}$ يساوي:

(أ) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$	(ب) $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$	(جـ) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

4/ إذا كانت θ عمدة لعدد مركب Z و r طويلته، فإن العدد المركب $\frac{Z_B}{Z}$ يُكتب على الشكل الأسي:

(أ) $r.e^{-i(\theta+\frac{\pi}{2})}$	(ب) $\frac{1}{r}.e^{i(-\theta+\frac{\pi}{2})}$	(جـ) $\frac{1}{r}.e^{-i(\theta+\frac{\pi}{2})}$

5/ مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق $\arg(iZ - 1) = \frac{\pi}{4} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و A نقطة منها هي:

(أ) نصف المستقيم $[BA]$ ماعدا النقطة B .	(ب) المستقيم (BA) ماعدا النقطة B .	(جـ) الدائرة التي $[BA]$ قطر لها ماعدا النقطة B .

www.dzexams.com
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2u_n - 1}$.

1/ ا/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 = \dfrac{(u_n - 1)^2}{2u_n - 1}$.

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 1 > 0$.

2/ أُدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{u_n}\right)$.

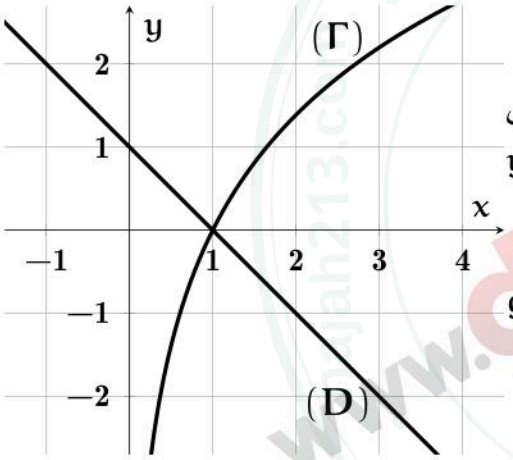
ا/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ثم أُحسب حدها الأول v_0 .

ب/ أكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n ثم أُحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4/ أُحسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = \left(1 - \dfrac{1}{u_0}\right) \times \left(1 - \dfrac{1}{u_1}\right) \times \cdots \times \left(1 - \dfrac{1}{u_n}\right)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



I/ الشكل المقابل يوضح (Γ) التمثيل البياني للدالة u المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $u(x) = 2\ln x$ و (D) المستقيم ذو معادلة: $y = -x + 1$

1/ بقراءة بيانية حدد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (D) .

2/ استنتج حسب قيم x من $]0; +\infty[$ إشارة: $g(x) = x - 1 + 2\ln x$

II/ نعرّف الدالة f على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 2 + (\ln x)^2 - \ln x$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ أُحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2/ ا/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

ب/ استنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّين α و β حيث: $0.5 < \alpha < 0.4$ و $2.2 < \beta < 2.1$.

4/ أُدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلة له هي: $y = x$.

5/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) ، ثم أُكتب معادلة المماس (T) .

6/ ا/ أنشئ (Δ) و (T) و (C_f) .

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $f(x) = x - m$.

7/ h الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = -x(\ln x)^2 + ax\ln x + bx$ حيث a و b عددان حقيقيان.

ا/ عين العددين a و b حتى تكون الدالة h أصلية للدالة $x \longmapsto 2 - (\ln x)^2 + \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب/ أُحسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = x$ و $x = \dfrac{1}{e}$ و $x = e^2$.

انتهى الموضوع الأوّل.

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الموضوع الثّاني:

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

صندوقان U_1 و U_2 متماثلان غير شفافين يحتويان على كريات متماثلة لا يمكن التفريق بينها باللمس، حيث:
يحتوي U_1 على خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 1 ، 1 ، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 1 .
يحتوي U_2 على ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 1 ، 1 ، 2 وكريتين خضراوين مرقمتين بـ: 0 ، 1 .

I/ نختار عشوائيا أحد الصندوقين: فإذا كان U_1 نسحب منه كريتين على التوالي دون إرجاع،
وإذا كان U_2 نسحب منه كريتين على التوالي مع الإرجاع.

1/ أُحسب إحتمال الحدثين: **A** «الكريتين المسحوبتين من نفس اللون»
B «الكريتين المسحوبتين تحملان نفس الرقم»

2/ هل الحدثان A و B مستقلان؟ علّل.

3/ إذا علمت أن الكريتين المسحوبتين مختلفتين في اللون، ما إحتمال أن تكونا من الصندوق U_1 ؟

II/ نضع كريات كلٍ من الصندوقين U_1 و U_2 في صندوق آخر U_3، ثم نسحب من هذا الأخير عشوائيا كريتين في آن واحد. وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المحصل عليهما.

1/ عين قيم المتغير العشوائي X .

2/ عيّن قانون إحتمال المتغير العشوائي X ثم أُحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

I/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب Z التالية: $(\overline{Z}+3+2i)(Z^2-2Z+5)=0$

II/ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.
نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب: $Z_A=1-2i$ ، $Z_B=\overline{Z_A}$ ، $Z_C=-3+2i$ و $Z_D=-1$.

1/ ا/ أُحسب $|Z_A-Z_D|$ ، $|Z_B-Z_D|$ ، $|Z_C-Z_D|$.
ب/ استنتج أن النقط A و B و C تنتمي إلى نفس الدائرة، يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

2/ ا/ أُكتب العدد المركب: $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
ب/ استنتج أن النقطة A هي صورة النقطة C بتحويل نقطي R يُطلب تعيين عناصره المميزة.

3/ ا/ عين Z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة: $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$.
ب/ بيّن أن الرباعي ABCG مربع.

4/ عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث: $|\overline{Z}+1|=|iZ+2+3i|$.

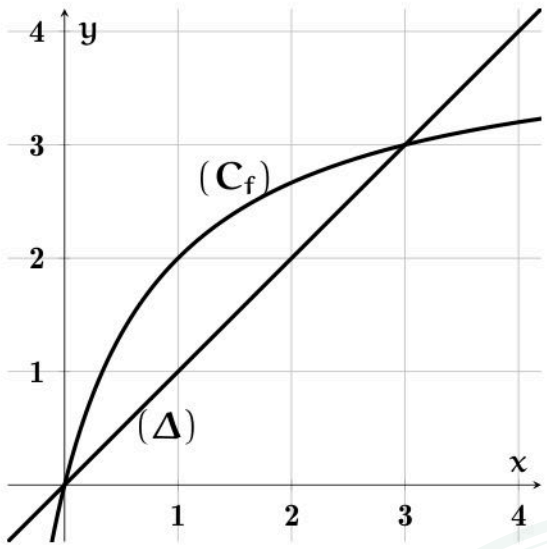
التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=4-\frac{4}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ كما هو موضح في الشكل أدناه؛ حيث (Δ) هو المستقيم ذو معادلة $y=x$.
ولتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1/ بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213



2/ ا/ أنقل الشكل المقابل، ثم مثّل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل موضحا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3/ ا/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 3$

ب/ أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

4/ نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$.

ا/ بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ثم أحسب v_0 .

ب/ أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n وأحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5/ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{u_n}{u_n - 3} + \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 3} + \cdots + \frac{u_{n+2024}}{u_{n+2024} - 3}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/ يمثل الجدول المقابل تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{-x} - x - 2$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

1/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0.5 < \alpha < -0.4$.

2/ حدّد حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$، ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(-x)$.

II/ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 1 - x + \frac{x-1}{e^x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول: $2cm$) .

1/ ا/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب/ بيّن أن المستقيم (D) ذو معادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج/ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) .

2/ ا/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -\frac{g(-x)}{e^x}$.

ب/ ادرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3/ بيّن أن: $f(-\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha+2}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(-\alpha)$.

4/ ا/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = (1-x)(1-e^{-x})$.

ب/ عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل، ثم أنشئ (D) و (C_f) بدقة.

5/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $(-1+2m+x)e^x = x - 1$.

6/ ا/ باستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أن: $\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - \frac{2}{e}$.

ب/ أحسب بالـ cm^2 مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و (D) والمستقيمين ذي معادلتين $x = 0$ و $x = 1$.

انتهى الموضوع الثاني.

www.dzexams.com
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

مناقشة الكالوريا التجريبية

الموضوع الأول

الجواب الأول

لجنة مهام ترتيبة $A_{16}^3 = 3360$ = { 9 H (8 + عبد الله) ، 7 F (6 + مظلمة) }

أ. حساب الاحتمالات

A "اللجنة تضم عبد الله"

$$P(A) = \frac{3 \times A_1^1 A_{15}^2}{A_{16}^3} = \frac{630}{3360} = \frac{3}{16}$$

B "تاظمة كاتبة للجنة"

$$P(B) = \frac{A_1^1 A_{15}^2}{3360} = \frac{210}{3360} = \frac{1}{16}$$

C "اللجنة تضم إما فاطمة وإما عبد الله"

$$P(C) = \frac{3 \times (A_1^1 A_{14}^2 + A_1^1 A_{14}^2)}{3360} = \frac{13}{40}$$

D "اللجنة تتكون من النساء والرجال معا"

$$P(D) = \frac{3(A_9^2 A_7^1 + A_9^1 A_7^2)}{3360} = \frac{63}{80}$$

$$= 1 - P(\bar{D}) = 1 - \frac{(A_9^3 + A_7^3)}{3360} =$$

ب) المتغير العشوائي

FFF ⟶ 0 ; FHH ⟶ 2

FFH ⟶ 1 ; HHH ⟶ 3

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(X=0) = \frac{A_7^3}{3360} = \frac{1}{16}$$

$$P(X=1) = 3 \times \frac{A_7^2 A_9^1}{3360} = \frac{21}{80}$$

$$P(X=2) = 3 \times \frac{A_7^1 A_9^2}{3360} = \frac{9}{20}$$

$$P(X=3) = \frac{A_9^3}{3360} = \frac{3}{20}.$$

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{27}{80}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{20}$

حساب الأمل :

$$E(X) = \sum x_i p_i$$

$$= \frac{27}{80} + 2 \times \frac{9}{20} + 3 \times \frac{3}{20}.$$

$$= 1,6875 = \frac{27}{16}.$$

استنتاج $E(2024X + 1447)$

$$E(2024X + 1447)$$

$$= 2024 \times E(X) + 1447$$

$$= 4860,5$$

ج حساب احتمال $P\left(\int_1^x \ln t \, dt \geq 1\right)$

$$\int_1^x \ln t \, dt = [t \ln t - t]_1^x$$

$$= x \ln x - x + 1.$$

$$x \ln x - x + 1 \geq 1$$

$$x \ln x - x \geq 0$$

$x > 0$; $x(\ln x - 1) \geq 0$ بكافئ

$$\ln x - 1 \geq 0$$

$$\ln x \geq 1$$

$$x \geq e$$

$$x \in \{1, 2\}$$

$P\left(\int_1^x \ln t \, dt \geq 1\right) = P(X=1) + P(X=2)$ حيث

$$= \frac{63}{80}.$$

الجواب الثاني

1- حل المعادلة $(1+2i)\bar{z} + 2 - i = 0$

$$(1+2i)\bar{z} = -2 + i$$

$$\bar{z} = \frac{-2+i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i}$$

$$= \frac{-2+4i+i+2}{5} = \frac{5}{5}i = i$$

ومنه $z = -i$

أ- الاختبار

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ج) تحديد الحد، الأركب z

$z = -3\left(-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)$

$= 3\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$

$= 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$

و منه عمدة له $-\frac{\pi}{7}$

الاختيار - ب -

3 $L = \left(\frac{z_A - z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1400\pi}$

$\frac{z_A - z_B}{\sqrt{2}} = \frac{1 - 2i + i}{\sqrt{2}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$

$= e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$L = \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{1400\pi} = e^{-i\frac{1400\pi}{4}\pi}$

$= e^{-i(360\pi + \frac{5\pi}{4})}$

$= e^{-i\frac{5\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

الاختيار - ج -

(4 $\frac{z_B}{z} = \frac{-i}{z} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{re^{i0}} = \frac{1}{r}e^{-i(\frac{\pi}{2}+0)}$

الاختيار - ج -

(5 مجموعة النقط.

$\arg(iz-1) = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$\arg(iz+i^2) = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$\arg(i(z-(-i)) = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$\arg(i) + \arg(z-z_B) = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$\arg(z-z_B) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + k\pi = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$(\vec{u}, \vec{BM}) = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$

ومنه المستقيم (BA) ماعدا النقطة B.

الاختيار - ب -

الجواب الثالث

$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} \end{cases}$

1- يبيان أن: $u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n - 1)^2}{2u_n - 1}$

$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} - 1 = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2u_n - 1}$

$= \frac{(u_n - 1)^2}{2u_n - 1}$.

ب) البرهان بالتراجع أن: $u_n - 1 > 0$

التحقق من صحة الخاصية الابتدائية.

$u_0 - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$

ومنه الخاصية الابتدائية محققة

نفرض أن $u_n - 1 > 0$ من أجل n عدد طبيعي

ونبرهن أن $u_{n+1} - 1 > 0$.

لدينا $(u_n - 1)^2 > 0$ ... ① ، عليه $u_n - 1 > 0$

ولدينا $u_n > 1$ ... ② ، ومنه $2u_n - 1 > 0$

من ① و ② نجد $\frac{(u_n - 1)^2}{2u_n - 1} > 0$ ، ومنه

$u_{n+1} - 1 > 0$.

وعليه من أجل كل n من N لدينا $u_n - 1 > 0$.

ج - اتجاه تغير المتتالية.

$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} - u_n$

$= \frac{u_n^2 - 2u_n^2 + u_n}{2u_n - 1}$

$= \frac{-u_n^2 + u_n}{2u_n - 1} = \frac{u_n(1 - u_n)}{2u_n - 1}$

لدينا $-u_n + 1 < 0$ ... ① ، ومنه $u_n - 1 > 0$

$u_n > 0$ ... ② ، ومنه $u_n - 1 > 0$

$2u_n - 1 > 0$ ... ③

وعليه $u_{n+1} - u_n < 0$ ، ومنه

(u_n) متناقصة.

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$$P_n = e^{\ln\frac{3}{4}\left(\frac{1-e^{n+1}}{1-e}\right)}$$

$$P_n = e^{\ln\left(\frac{3}{4}\right)\left(e^{n+1}-1\right)}.$$

الجواب الرابع

I 1- القراءة البيانية: تحديد وضعية (Γ) بالنسبة لـ (D) ومن التمثيل البياني

x	0	1	$+\infty$
الوضع النسبي	(Γ) تحت (D)	(Γ) (D) يقطعان	(Γ) فوق (D)

2- استنتاج إشارة $g(x)$

$g(x) = x - 1 + 2\ln x = 2\ln x - (-x+1)$

اعتمادا على الوضع النسبي لـ (Γ) و (D) فإن:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	−	0	+

II $f(x) = x - 2 + (\ln x)^2 - \ln x$

أ- حساب النهايات

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln x\left(\frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln x} + \ln x - 1\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

ومنه $x=0$ معادلة لمستقيم مقارب عمودي

2- تبيان أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

$f'(x) = 1 + 2\times\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} = \frac{x+2\ln x-1}{x}$

$= \frac{g(x)}{x}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

ومنه f متناقصة تماما على $]0;1]$ ومتزايدة على $[1;+\infty[$

جدول تغيراتها

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

3- تبيان أن $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $\alpha < \beta$

على المجال $]0;1]$ f مستمرة ومتناقصة تماما على $]0;1]$ فهي كذلك على $[0,43;0,44]$ ولدينا

$f(0,43)\times f(0,44) < 0$ لأن $f(0,44) = 0,16$ و $f(0,43) = -0,33$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,43 < \alpha < 0,44$.

$v_n = \ln\left(1-\frac{1}{u_n}\right)$

1- إثبات أن (v_n) هندسية أساسها q:

معناه $v_{n+1} = 2v_n$

$v_{n+1} = \ln\left(1-\frac{1}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{\frac{u_n^2}{2u_n-1}}\right)$

$= \ln\left(1-\frac{2u_n-1}{u_n^2}\right)$

$= \ln\left(\frac{u_n^2-2u_n+1}{u_n^2}\right)$

$= \ln\left(\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)^2\right) = 2\ln\left(1-\frac{1}{u_n}\right)$

$= 2v_n$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول

$v_0 = \ln\left(1-\frac{1}{4}\right)$

$= \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

عبارة v_n بدلالة u_n:

$v_n = v_0 \times q^n = \ln\left(\frac{3}{4}\right)\times 2^n = \ln\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}$

ولدينا $v_n = \ln\left(1-\frac{1}{u_n}\right)$

$1-\frac{1}{u_n} = e^{v_n}$

$\frac{1}{u_n} = 1 - e^{v_n} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}$

$u_n = \frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}$

حساب $\lim u_n$:

$\lim u_n = \lim \frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}} = 1$ لأن $\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n} \to 0$

4- حساب الجداء:

$P_n = \left(1-\frac{1}{u_0}\right)\left(1-\frac{1}{u_1}\right)\times\dots\times\left(1-\frac{1}{u_n}\right)$

لدينا $1-\frac{1}{u_n} = e^{v_n}$ أي

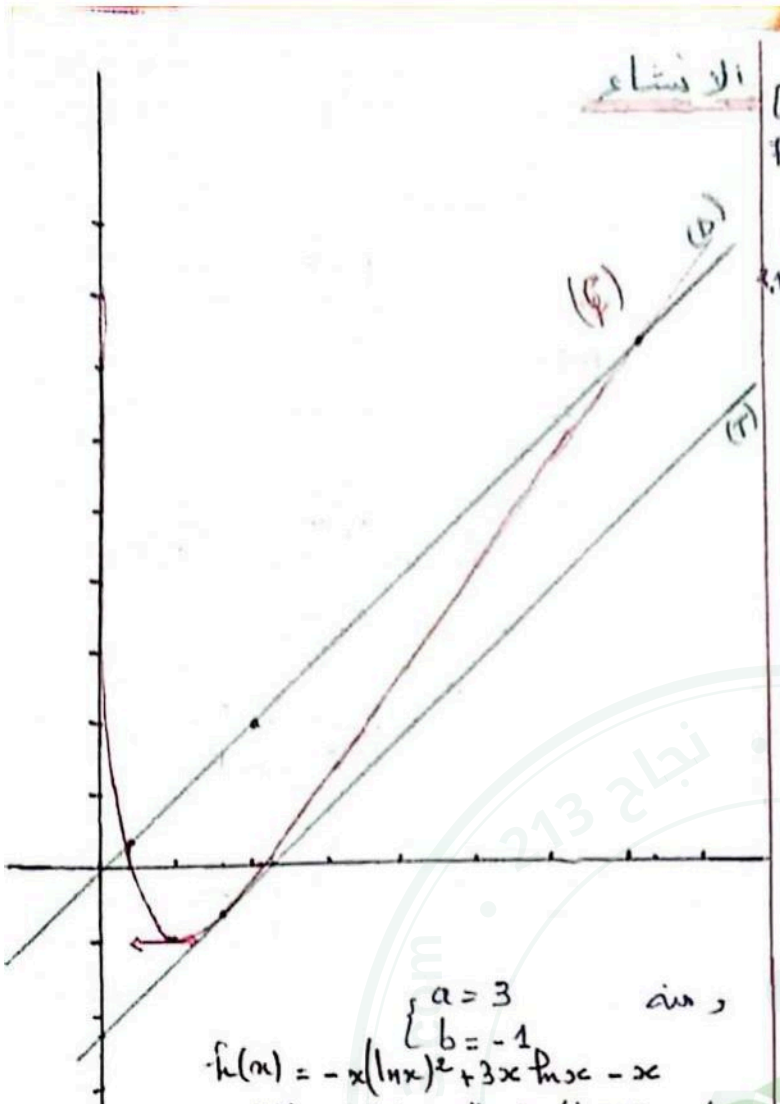
$P_n = e^{v_0}\times e^{v_1}\times\dots\times e^{v_n} = e^{v_0+v_1+\dots+v_n}$

www.dzexams.com

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الإنشاء



$[1;+\infty[$ على المجال f مستمرة ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$

$f(2,1)=0,03$ ، $f(2,2)=-0,09$ ، لدينا $[2,1;2,2]$ على f ذالك

$f(2,1)f(2,2)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $2,1<\beta<2,2$

4- دراسة وضعية (C_f) مائلة لـ (Δ)

$f(x)\ldots y = x-2+(\ln x)^2-\ln(x)-x$

$=(\ln x)^2-\ln x-2$.

بوضع $\ln x = y$ نجد $y^2-y-2=0$

$(y-2)(y+1)=0$

ومنه $y=-1$ أو $y=2$ ، وعليه

$x=e^{-1}$ أو $x=e^2$ ومنه

x	0		e^{-1}		e^2		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)	

5- تبيان أن (C_f) تقبل مماسا موازيا لـ (Δ).

$f'(x)=1$ ومنه $g(x)=0$ أي

$2\ln x + x - 1 = x$ ومنه $2\ln x = 1$

$x=e^{\frac{1}{2}}$

معادلة المماس

$f'(e^{\frac{1}{2}})=1$

$f(e^{\frac{1}{2}})=e^1-2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{-9}{4}+e^{\frac{1}{2}}$

$(T): y=(x-e^{\frac{1}{2}})+e^{\frac{1}{2}}-\frac{9}{4}$

$=x-\frac{9}{4}$.

المناقشة

$f(x)=x-m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x-m$.

$m<-\frac{9}{4}$ أي $-m>\frac{9}{4}$ لا توجد حلول.

$m=-\frac{9}{4}$ أي $-m=\frac{9}{4}$ يوجد حل.

$m>-\frac{9}{4}$ أي $-m<\frac{9}{4}$ يوجد حلان متمايزان.

7) $h(x)=-x(\ln x)^2+a x\ln x+bx$

إيجاد a و b بحيث h دالة أصلية للدالة

$x \longrightarrow 2-(\ln x)^2+\ln x$

$h'(x)=-(\ln x)^2\cdot 2\ln x + a\ln x + a + b$

$=-(\ln x)^2+(a-2)\ln x + a+b$

ومنه $\begin{cases} a-2=1 \\ a+b=2 \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$

$h(x)=-x(\ln x)^2+3x\ln x - x$

ب) حساب المساحة (Δ) ، (C_f)

$x=e^2$ ، $x=\frac{1}{e}$

$[e^{-1};e^2]$ على (Δ) تحت (C_f)

ومنه

$$S=\int_{e^{-1}}^{e^2}(y-f(x))dx$$

$$=\int_{e^{-1}}^{e^2}(x-x+2-(\ln x)^2+\ln x)dx$$

$$=[h(x)]_{e^{-1}}^{e^2}$$

$$=h(e^2)-h(e^{-1})$$

$$=-e^2\times 4+3e^2\times 2-e^2-(-e^{-1}-3e^{-1}-e^{-1})$$

$$=(e^2+5e^{-1})\,cm^2.$$

www.dzexams.com

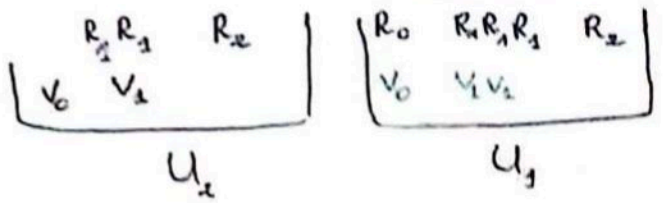
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الموضوع الثاني

التمرين الأول



1- حساب احتمال الحادثين A و B

$$P(A) = \frac{1}{2}\left(\frac{A_5^2 + A_3^2}{A_8^2} + \frac{3^2 + 2^2}{5^2}\right) = \frac{689}{1400}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}\left(\frac{A_5^2 + A_2^2}{A_8^2} + \frac{3^2 + 1^2 + 1^2}{5^2}\right) = \frac{583}{1400}.$$

2- البحث في استقلال الحادثين:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2}\left(\frac{A_3^2 + A_2^2}{A_8^2} + \frac{2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}{5^2}\right) = \frac{37}{175}$$

ولدينا:

$$P(A) \times P(B) = \frac{401687}{1960000} \neq P(A \cap B)$$

ومنه الحادثان A و B غير مستقلين

3- الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين حساب $P_{\bar{A}}(U_1)$

$$P_{\bar{A}}(U_1) = \frac{P(U_1 \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{1}{2} \times 2A_3^1 A_5^1}{1 - P(A)} = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{711}{1400}} = \frac{125}{237}.$$

II المتغير العشوائي

قيم المتغير العشوائي: $0+0 \to 0$، $0+1 \to 1$، $0+2 \to 2$، $1+1 \to 2$، $1+2 \to 3$، $2+2 \to 4$

وعليه قيم المتغير العشوائي هي: 4، 3، 2، 1، 0

قانون المتغير العشوائي

$$P(X=0) = \frac{C_3^2}{C_{13}^2} = \frac{3}{78}$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_8^1}{C_{13}^2} = \frac{24}{78}$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^1 C_2^1 + C_8^2}{C_{13}^2} = \frac{34}{78}$$

$$P(X=3) = \frac{C_8^1 C_2^1}{C_{13}^2} = \frac{16}{78}$$

R_0V_0	R_1R_1	R_2
V_0	R_1R_1	R_2
	R_1V_1	
	V_1V_2	

$$P(X=4) = \frac{C_2^2}{C_{13}^2} = \frac{1}{78}$$

$X=x_i$	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{78}$	$\frac{24}{78}$	$\frac{34}{78}$	$\frac{16}{78}$	$\frac{1}{78}$

حساب الأمل الرياضي

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i P_i = \frac{24}{13} = 1,846 = \frac{144}{78}.$$

التمرين الثاني

$$(\bar{z} + 3 + 2i)(z^2 - 2z + 5) = 0 \quad \text{I}$$

$z^2 - 2z + 5 = 0$ أو $\bar{z} + 3 + 2i = 0$

$\bar{z} = -3 - 2i$ أي $z = -3 + 2i$

حساب المميز $\Delta = 4 - 20 = -16$

$$z_1 = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = 1 + 2i$$

$z_C = -3 + 2i$ ، $z_B = 1 + 2i$ ، $z_A = 1 - 2i$ (II

$z_D = -1$

1- حساب $|z_C - z_D|$ ، $|z_B - z_D|$ ، $|z_A - z_D|$

$$|z_A - z_D| = |1 - 2i + 1| = |2 - 2i| = \sqrt{8}$$

$$|z_B - z_D| = |1 + 2i + 1| = |2 + 2i| = \sqrt{8}$$

$$|z_C - z_D| = |-3 + 2i + 1| = |-2 + 2i| = \sqrt{8}$$

ب) لدينا $AD = BD = CD$ وعليه A، B، C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D، ونصف قطرها $r = \sqrt{8}$.

ج- كتابة $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ على الشكل الأسي.

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{1 - 2i - 1 - 2i}{-3 + 2i - 1 - 2i} = \frac{-4i}{-4} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

لدينا $\begin{cases} \left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ وعليه المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين

د) استنتاج أن A صورة C بتحويل R

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ومنه $z_A - z_B = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_B)$.

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ومنه A صورة C بالدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

3) تعيين z_G

$$z_G = \frac{z_A - z_B + z_C}{1 - 1 + 1} = 1 - 2i - 1 - 2i - 3 + 2i$$

$$= -3 - 2i = \bar{z}_C$$

لبيان أن الرباعي ABCG مربع.

لدينا $z_G = \bar{z}_C$ وعليه $BC = AG$

و $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$ ومنه الرباعي ABCG مربع

4) مجموعة النقط

$$|\bar{z} + 1| = |iz + 2 + 3i|$$

$$|\bar{z} + \bar{1}| = |iz - 2i^2 + 3i|$$

$$|\overline{z+1}| = |i(z + 3 - 2i)|$$

$$|z - (-1)| = |i||z - (-3 + 2i)|$$

$$|z - z_D| = |z - z_C|$$

$$DM = CM$$

ومنه مجموعة النقط هي المستقيم المحوري للقطعة [DC]

التمرين الثالث

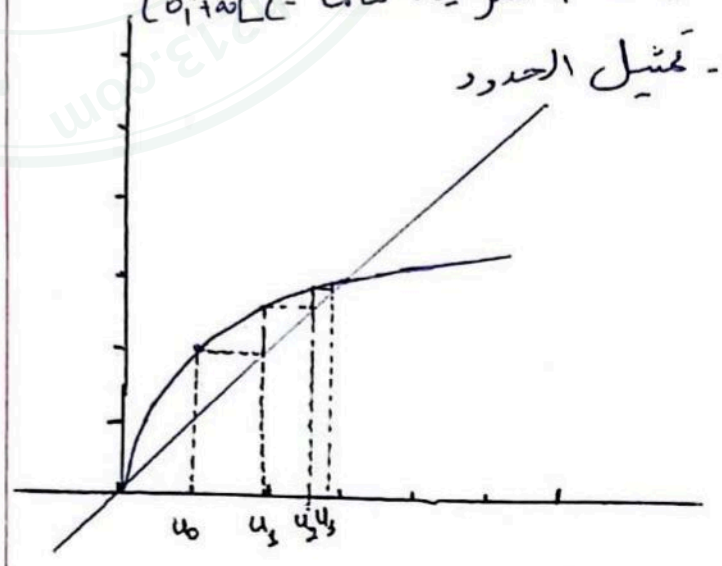
$$f(x) = 4 - \frac{4}{x+1}$$

1- بيان أن f متزايدة تماما

$$f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2} > 0$$

ومنه f متزايدة تماما $[0; +\infty[$

2- تمثيل الحدود



ب) التخمين.

$u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ ومنه (u_n) متزايدة والمسافة بين الحدود تتناقص مهما متتالية.

3- 1. البرهان بالتراجع أن $0 < u_n < 3$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 < u_n < 3$"

التحقق من صحة الخاصية $P(0)$

من أجل $n=0$: $0 < u_0 = 1 < 3$ محققة.

نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونبرهن $P(n+1)$

نفرض أن $0 < u_n < 3$

ولدينا f متزايدة ومنه $f(0) < f(u_n) < f(3)$

$0 < 1 < u_{n+1} < 3$

وعليه $P(n+1)$ صحيحة ومنه $P(n)$ صحيحة

ب- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n).

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_n + 1} - u_n = \frac{4u_n - u_n^2 - u_n}{u_n + 1}$$

$$= \frac{u_n(3 - u_n)}{u_n + 1}$$

① ... $0 < u_n < 3$

② ... $1 < u_{n+1} < 4$

③ ... $0 < 3 - u_n < 3$ ومنه $0 < u_n < 3$

من ① و ② و ③ نجد $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه (u_n) متزايدة.

التقارب

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

$$v_n = 1 - \frac{3}{u_n} \quad (4$$

بيان أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

محاه $v_{n+1} = q \cdot v_n$

$$v_{n+1} = 1 - \frac{3}{u_{n+1}} = 1 - \frac{3}{\frac{4u_n}{u_n + 1}}$$

$$= 1 - \frac{(u_n + 1)3}{4u_n}$$

$$= \frac{u_n - 3}{4u_n} = \frac{1}{4} v_n.$$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0 = 1 - \frac{3}{u_0}$ أي $v_0 = -2$.

عبارة v_n : $v_n = v_0 q^n = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n$

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

عبارة u_n : لدينا $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$

ومنه $\frac{3}{u_n} = 1 - v_n$

$u_n = \frac{3}{1 - v_n} = \frac{3}{1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n}$.

نهاية u_n

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{3}{1} = 3$

لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

ب) حساب المجموع S_n.

$S_n = \frac{u_n}{u_n - 3} + \cdots + \frac{u_{n+2024}}{u_{n+2024} - 3}$.

لدينا $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$ ومنه $\frac{1}{v_n} = \frac{u_n}{u_n - 3}$.

$S_n = \frac{1}{v_n} + \frac{1}{v_{n+1}} + \cdots + \frac{1}{v_{n+2024}}$ ومنه

$S_n = \frac{1}{v_n}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{2025}}{1 - \frac{1}{9}}\right)$

$= -\frac{1}{2} \times 4^n \left(\frac{1 - 4^{2025}}{-3}\right)$

$= \frac{4^n}{6}\left(1 - 4^{2025}\right)$

الجواب الرابع

$g(x) = e^{-x} - x - 2$

1- بيان ان $g(x)=0$ يقبل حلا وحيدا α حيث $-0,5 < \alpha < -0,4$

من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ انها مستمرة ومتناقصة تماما على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة ومتناقصة على $[-0,5;-0,4]$، لدينا $g(-0,5) = \ldots$ ، $g(-0,4) = \ldots$

ومنه $g(-0,5) \times g(-0,4) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=0$ يقبل حلا وحيدا α حيث $-0,5 < \alpha < -0,4$

اشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

اشارة $g(-x)$

بما ان $x > -\alpha$ اذن $-x < \alpha$ فان $g(-x) > 0$

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$g(-x)$		$-$	0	$+$	

وعليه

$f(x) = 1 - x + \frac{x-1}{e^x}$. II

أ) حساب النهايات

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - xe^x + x - 1}{e^x} = -\infty$

ب) تبيان أن $y = -x + 1$ مقارب لـ $(\mathcal{C}_f)$

$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - y\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{e^x} = 0$

ومنه (D) مقارب لـ $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$.

2) دراسة الوضعية

لدينا $f(x) - y = \frac{x-1}{e^x}$ ومن $e^x > 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية	$(\mathcal{C}_f)$ تحت (D)		$(\mathcal{C}_f)$ يتقاطع (D)		$(\mathcal{C}_f)$ فوق (D)

ج- حساب $f'(x)$.

$f'(x) = -1 + e^{-x} - e^{-x}(x-1)$

$= -e^{-x}\left(e^x + x - 2\right)$

$= \frac{-g(-x)}{e^x}$.

ب) دراسة اتجاه التغير.

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$g(-x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

وعليه $e^x > 0$

ومنه f متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-\alpha)$	↘	$-\infty$

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

3- بيان أن: $f(-\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha+1}$.

$f(-\alpha) = 1 + \alpha + \frac{\alpha+1}{e^{-\alpha}}$

ولدينا $f(\alpha) = 0$ أي $e^{-\alpha} - \alpha - 2 = 0$

$f(-\alpha) = 1 + \alpha + \frac{-\alpha+1}{\alpha+2}$ أي $e^{-\alpha} = \alpha + 2$

$= \alpha + \frac{\alpha+2-\alpha+1}{\alpha+2} = \alpha + \frac{1}{\alpha+2}$

استنتاج حصر لـ $f(-\alpha)$.

① ... $-0,5 < \alpha < -0,4$ ومنه $1,5 < \alpha+2 < 1,6$

ومنه $\frac{1}{1,6} < \frac{1}{\alpha+2} < \frac{1}{1,5}$

② ... $0,625 < \frac{1}{\alpha+2} < 0,67$

بجمع ① و ② نجد:

$0,125 < f(\alpha) < 0,17$

4- بيان أن: $f(x) = (1-x)(1-e^{-x})$

$f(x) = 1 - x + \frac{x-1}{e^x}$

$= 1 - x + (x-1)e^{-x}$

$= (1-x)(1-e^{-x})$.

ب) تعيين نقط تقاطع $(\mathcal{C}_f)$ مع حامل محور الفواصل

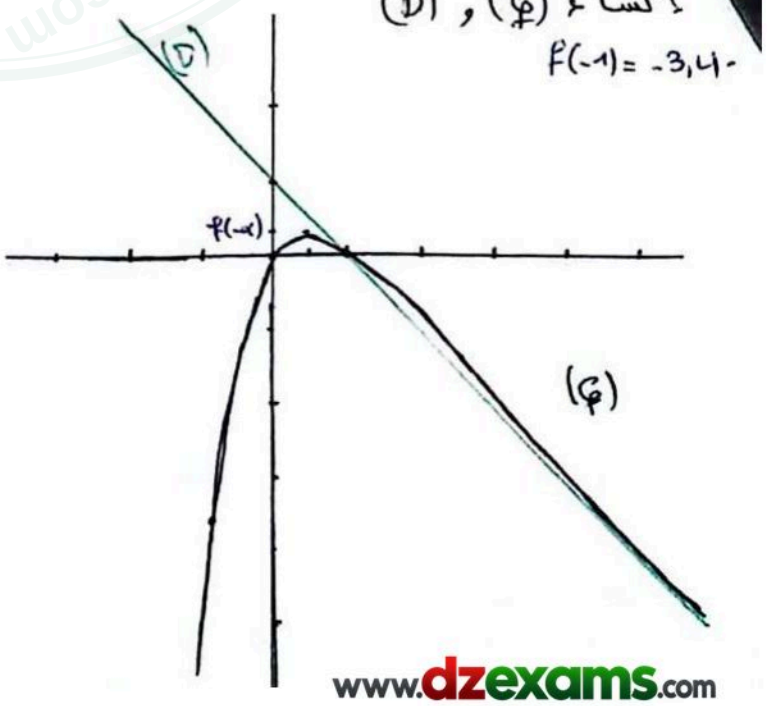
$f(x) = 0$ أي $(1-x)(1-e^{-x}) = 0$

$1-x = 0$ أو $1-e^{-x} = 0$ وعليه

$x = 1$ أو $x = 0$ ومنه $(\mathcal{C}_f)$ تقطع محور الفواصل في نقطتين $(1;0)$ و $(0;0)$.

إنشاء $(\mathcal{C}_f)$ و (D)

$f(-1) = -3,4$



5) المناقشة البيانية

$x - 1 = (-1 + 2m + x)e^x$ ومنه

$\frac{x-1}{e^x} = -1 + x + 2m$ ومنه

$1 - x + \frac{x-1}{e^x} = 2m$ وعليه $f(x) = 2m$

المستقيم $y = 2m$ موازي لحامل محور الفواصل يقطع $(\mathcal{C}_f)$

$2m = f(-\alpha)$ ومنه $m = \frac{f(-\alpha)}{2}$ يوجد حل مزدوج

$2m > f(-\alpha)$ ومنه $m > \frac{f(-\alpha)}{2}$ لا يوجد حلول

$2m = 0$ ومنه $m = 0$ يوجد حلّ

أحدهما موجب والآخر سالب

$0 < m < \frac{f(-\alpha)}{2}$ يوجد حلّان موجبان

$m < 0$ يوجد حلّان مختلفان في الإشارة

6- التكامل بالتجزئة $I = \int_0^1 x e^{-x} dx$

$u(x) = x$ $\quad u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x}$ $\quad v(x) = -e^{-x}$

$I = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx$

$= \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^1$

$= (-1e^{-1} - e^{-1}) - (-1)$

$= 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}$.

ب) حساب المساحة $x = 1$, $x = 0$, $(\mathcal{C}_f)$, (D)

$(\mathcal{C}_f)$ تحت (D) وعليه:

$S = -2 \times 2 \int_0^1 (f(x) - y) dx$

$= -4 \int_0^1 (x-1)e^{-x} dx$ cm²

$= -4 \left[\int_0^1 x e^{-x} dx + \int_0^1 -e^{-x} dx \right]$ cm²

$= -4 \left[\left(1 - \frac{2}{e}\right) + \left[e^{-x}\right]_0^1 \right]$ cm²

$= -4 \left(1 - \frac{2}{e} + e^{-1} - 1\right)$ cm²

$= \frac{4}{e}$ cm²

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com