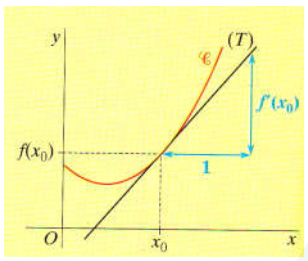
najah213.com · نجاح 213

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبة

# مجلة المفيد فى الرياضيات

## للأستاذ بلجودي حمـــــــو

## بكالوريا 2022 شعب علمية




$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

# الاشتقاقية

## تتضمن ما يلي :

- ملخص الدرس .
- سلسلــة تمارين .
- واجـــــب.
- حل بعض الأسئلة من السلسلة .

الأستاذ : بلجودي حمـــــو

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مدرسة روافد المستقبـــل
الأستاذ : بلجودي حمـــو

دروس الدعم في مادة الرياضيات
3 ثانوي شعب علمية.

# الاشتقاقية — بكالوريا 2022

## ⇦العدد المشتق:

$f$ دالة معرفة على مجال $I$ من $\Re$ . $a$ و $a+h$ عددان حقيقيان من $I$ مع $h \neq 0$ .إذا كانت $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=A$ حيث $A$ عدد حقيقي فإن الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند $a$. يسمى $A$ العدد المشتق للدالة $f$ عند $a$ ونرمز له بـ $f'(a)$.

## ⇦الدالة المشتقة:

إذا قبلت الدالة $f$ الاشتقاق عند كل عدد حقيقي $x$ من $I$ نقول أنها تقبل الاشتقاق على $I$وتسمى الدالة $x\mapsto f'(x)$ :$f'$ الدالة المشتقة للدالة $f$.

## ⇦ التفسير الهندسي (مماس منحنى دالة):

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

## ❖المشتقات و العمليات:

| مجالات قابلية الاشتقاق | $f'(x)$ | $f(x)$ |
|---|---|---|
| $\Re$ | $0$ | الثابت الحقيقي $a$ |
| $\Re$ | $1$ | $x$ |
| $\Re$ | $a$ | $ax$ |
| $\Re$ | $nx^{n-1}$ | $x^n$ ( $n\in N$ و $n\geq 2$ ) |
| $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ | $\dfrac{1}{x}$ |
| $]0;+\infty[$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\sqrt{x}$ |
| $\Re$ | $\cos x$ | $\sin x$ |
| $\Re$ | $-\sin x$ | $\cos x$ |

| من $x$ من اجل كل $I$ ، | $f'(x)$ | $f(x)$ |
|---|---|---|
| $u\succ 0$ | $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $\sqrt{u(x)}$ |
| | $n\times u'\times u^{n-1}$ | $n\in N,\ n\geq 2$ و $(u(x))^n$ |
| $u\neq 0$ | $-\dfrac{n\times u'}{u^{n+1}}$ | $n\in N,\ n\geq 2$ و $\dfrac{1}{(u(x))^n}$ |
| | $u'\times\cos(u)$ | $\sin(u(x))$ |
| | $-u'\times\sin(u)$ | $\cos(u(x))$ |

$u$ و $v$ دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال $I$ من $\Re$ و $k$ عدد حقيقي.

| الدالة | $u+v$ | $ku$ | $uv$ | $\dfrac{u}{v},(v\neq 0)$ |
|---|---|---|---|---|
| المشتقة | $u'+v'$ | $ku'$ | $u'\times v+v'\times u$ | $\dfrac{u'\times v-v'\times u}{v^2},v\neq 0$ |

## ❖طـــــــرق:

لدراسة قابلية اشتقاق دالة $f$ عند $a$ نحسب $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+a)-f(a)}{h}$ أو ($\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$)

| إذا كان | فإن |
|---|---|
| $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+a)-f(a)}{h}=l$ ( $l$ عدد حقيقي ) | $f$ تقبل الاشتقاق عند $a$ و المنحني $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ يقبل عند النقطة ذات الفاصلة $a$ مماسا معامل توجيهه $l$ . |
| $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+a)-f(a)}{h}=+\infty$ أو $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+a)-f(a)}{h}=-\infty$ | $f$ لا تقبل الاشتقاق عند $a$ و المنحني $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ يقبل عند النقطة ذات الفاصلة $a$ مماسا موازيا لحامل محور التراتيب. |
| $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=l$ و $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=l'$ و كان $l\neq l'$ | الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند $a$ من اليمين و من اليسار و لكنها غير قابلة للاشتقاق عند $a$ .و المنحني الممثل للدالة $f$ يقبل عند النقطة ذات الفاصلة $a$ نصفي مماسين معاملا توجيههما $l$ و $l'$ . |

⇦لإيجاد $f'(a)$ معامل توجيه المماس عند $a$ بيانيا نختار نقطتين من هذا المماس و لتكن مثلا $A$ و $B$ حيث $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ فيكون :

$$f'(a)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

☜ إذا كان المماس عند $a$ أفقيا فان $f'(a)=0$ .

الأستاذ : بلجودي حمـــو

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# تمارين

## التمرين -1-

في كل حالة من الحالات التالية ,أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ المعرفة على المجموعة $D$ عند $a$ مفسرا النتيجة بيانيا:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $D=R,\quad f(x)=2\sin(x)$ | $D=R,\ f(x)=x^2+x+1$ | $D=[3;+\infty[,\ f(x)=\sqrt{x-3}$ | $D=R-\{1\},f(x)=\lvert x-2\rvert+\dfrac{2}{x-1}$ |
| $a=0$ | $a=2$ | $a=4\quad a=3$ | $a=2$ |

## التمرين -2-

$f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

أ ـ تحقق أنّه من أجل كل $h$ غير معدوم يكون : $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$ .

ب ـ استنتج أن الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند 1 مبيّنا $f'(1)$ .

## التمرين -3-

$f$ الدالة المعرفة على $[-2;+\infty[$ بِـ : $f(x)=\sqrt{x+2}$ .

⇦أحسب $\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(-2+h)}{h}$ . ، هل الدالة $f$ تقبل الاشتقاق على يمين $-2$ ؟ ، فسر هندسيا إجابتك .

## التمرين -4-

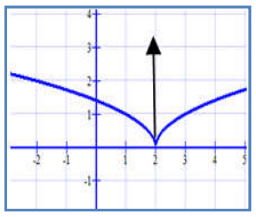
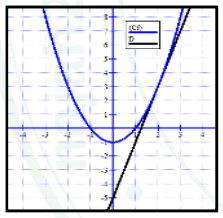
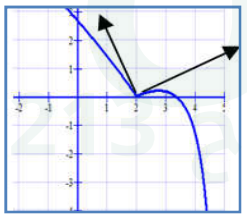
نعتبر الدالة $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بِـ : $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$ .

⇦ بيّن أنّ الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند 1 .

استنتج أن الدالة $f$ مستمرة عند 1.

## التمرين -5-

في كل حالة $(C_f)$ هو التمثيل البياني لدالة $f$ :

⇦ هل الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند 2 .

⇦ عين العدد المشتق في حالة وجوده.

## التمرين -6-

عين الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية على $D$ :

| | | |
|---|---|---|
| $D=\Re,\quad f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-3x^2+2\bullet 1$ | $D=\Re,f(x)=(x^2+2x-1)(x-2)\bullet 2$ | $D=]1;+\infty[,\ f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x-1}\bullet 3$ |
| $D=]1;+\infty[,\ f(x)=2x-1+\dfrac{x}{x-1}\bullet 4$ | $D=\Re\ ,f(x)=(x^2-2x-3)^3\bullet 5$ | $D=\left]\dfrac{5}{3};+\infty\right[\ ,\ f(x)=\sqrt{3x-5}\bullet 6$ |
| $D=]-\infty;1[,\ f(x)=\dfrac{1}{(x^2-1)^3}\bullet 7$ | $D=\Re\ ,f(x)=\sin(x^2+5)\bullet 8$ | $D=]0;+\infty[,\ f(x)=(2x-3)\sqrt{x}\bullet 9$ |
| $D=]0;+\infty[\ ,\ f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\bullet 10$ | $D=\Re-\{-1\},\quad f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}\bullet 11$ | $D=\Re,\quad f(x)=x+\cos x$ |

⇦ أدرس اتجاه تغير $f$ في الحالات 1 ، 3 ، 5 ، 6 ، 9 ، 10 ، 11 ، 12 .

## التمرين -7-

$f$ الدالة المعرفة و القابلة للاشتقاق على $\Re$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد م $(O,I,J)$.

المنحني $(C_f)$ يشمل النقطة $A(0;-1)$ ،يقبل في النقطة $B(1;-3)$ مماسا أفقيا .

نفرض أن $f$ معرفة على $\Re$ بـ $f(x)=ax^3+bx+c$ حيث $a$ ، $b$ و $c$ أعداد حقيقية .

⇦ احسب الدالة المشتقة للدالة $f$ بدلالة $a$ و $b$ .

بين باستعمال الشروط السابقة أن : $a=1$ ، $b=-3$ ، $c=-1$

الأستاذ : بلجودي حمـــو

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

## التمرين -8-

1. أكتب معادلة للمماس $\Delta$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(x)=(1+x)^3$ | $f(x)=\sqrt{1+x}$ | $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ | $f(x)=\sin x$ |

2. برّر التقريب التآلفي عند 0 في كل الحالة من الحالات التالية : $(1+x)^3 \approx 1+3x$ ، $\sqrt{1+x} \approx 1+\dfrac{x}{2}$ ، $\dfrac{1}{1+x} \approx 1-x$ ، $\sin x \approx x$ .

3. أعط تقريبا تآلفيا لعبارة $f(a+h)$ من أجل $|h|$ قريب من 0 ؛ $f(x)=3x^2-5x+1$ و $a=2$

## التمرين -9-

$f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3-3x^2+2$ .

⇦بين أن منحني الدالة $f$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

⇦ بيّن أن منحني الدالة $f$ يقبل مماسا معامل توجيهه 3- . ⇦ ما عدد المماسات الأفقية التي يقبلها منحني الدالة $f$ .

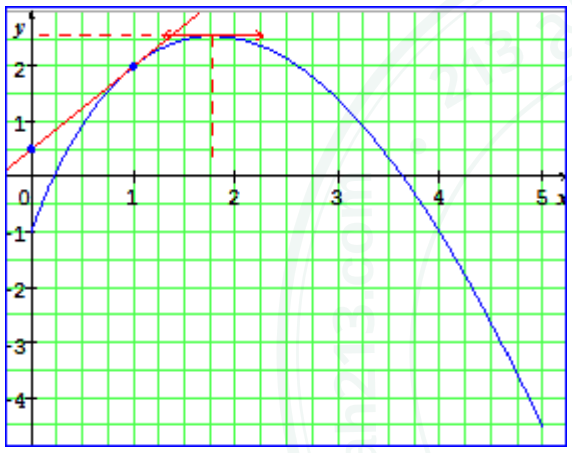
## التمرين -10-

$f$ الدالة المعرفة و القابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x+1}$ 1 .عين مشتقة الدالة $f$ على $]0;+\infty[$ .

2.استنتج الدوال المشتقة لكل من الدوال $g$ و $h$ و $k$ حيث : $g(x)=f(x^2)$ ، $h(x)=f(\sqrt{x})$ .

## التمرين -11-

الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة $f$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $[0;5[$



المستقيمان المرسومان في الشكل هما المماسان للمنحني عند النقطتين اللتين فاصلتاهما 1 و $\dfrac{16}{9}$ .بقراءة بيانية عين $f(1)$ و $f'(1)$ .

3. نقبل أنه من اجل كل عدد حقيقي $x$ من $[0;5[$ : $f(x)=a+bx\left(2-\sqrt{x}\right)$

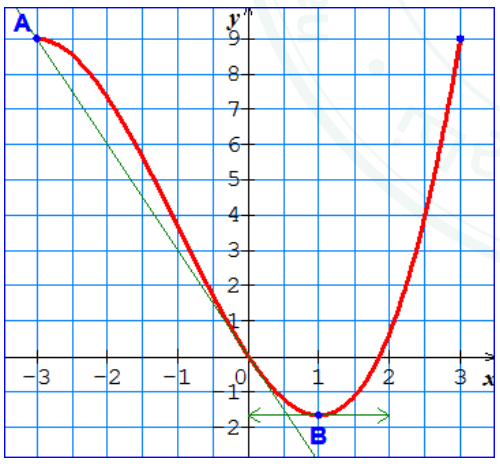
$a$ و $b$ عددان حقيقيان نريد حسابهما.

أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي $x$ من $[0;5[$ ، $f'(x)=b\left(2-\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\right)$

ب- باستعمال قيم $f(1)$ و $f'(1)$ المحصل عليها في السؤال1 عيّن $a$ و $b$ .

## التمرين -12-

الشكل الموالي هوالتمثيل البياني $\mathcal{C}$ لدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[-3;3]$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;I,J)$



المنحني $\mathcal{C}$ يحقق الشروط التالية :

يمر بمبدأ المعلم $O$ ، و يشمل النقطة $A(-3;9)$ ، يقبل في النقطة $B$ التي فاصلتها 1 مماسا أفقيا و يقبل المستقيم $(OA)$ كمماس عند النقطة $O$ .

1. ما هو معامل توجيه المستقيم $(OA)$؟

2.نفرض أن $f$ معرفة على $[-3;3]$ بـ: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

حيث $a$ ، $b$ ، $c$ و $d$ أعداد حقيقية .

أ- بين باستعمال الشروط السابقة أن : $a=\dfrac{1}{3}$ ، $b=1$ ، $c=-3$ و $d=0$

## التمرين -13-

جدول التغيرات الموالي هو لدالة $u$ معرفة على $D_u=[-2;3]$ عيّن إشارة $u(x)$.

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $u(x)$ | $2$ | ↗ | $3$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↗ | $2$ |

2) نعتبر الدوال $f$ ، $g$ ، $h$ و $k$ المعرفة بـ : $f=u^2$ ؛ $g=u^3$ ؛ $h=\dfrac{1}{u}$ ؛ $k=\sqrt{u}$

أ. عيّن مجموعة تعريف لكل دالة من الدوال $f$، $g$ ، $h$ و $k$ .

ب. عبّر عن كل من $f'(x)$ ، $g'(x)$، $h'(x)$ و $k'(x)$ بدلالة $u'(x)$ و $u(x)$.

ج. استنتج جدول تغيرات لكل دالة من الدوال $f$ ، $g$ ، $h$ و $k$ .

**الأستاذ : بلجودي حمـــو**

najah213.com · نجاح 213

# واجـــــــب

## التمرين -1-

$f$ الدالة المعرفة على المجموعة $\Re-\{-1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$ . $(C_f)$ التمثيل البياني للدالة $f$ في معلم .

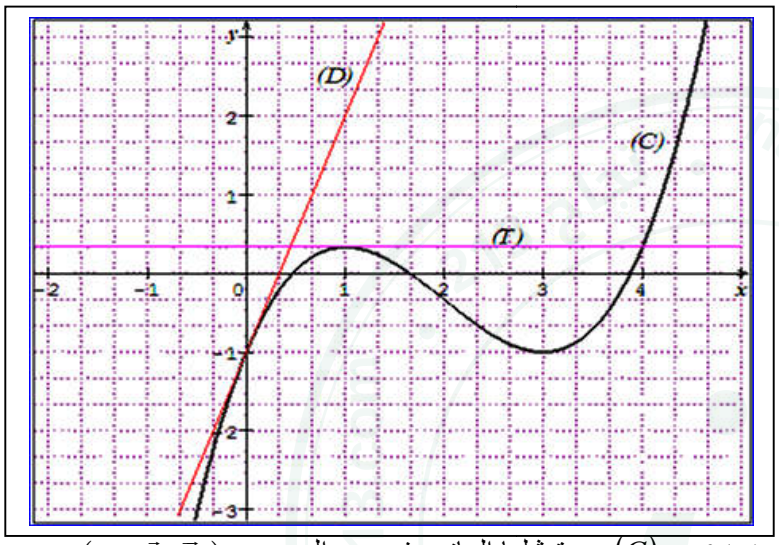
**1.** عين الثوابت الحقيقية $a$ ، $b$ ، $c$ و $d$ بحيث يكون ؛ من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\Re-\{-1\}$ : $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{(x+1)^2}$.

**2.** استنتج أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(D)$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له .

**3.** ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(D)$

**4.** احسب الدالة المشتقة للدالة $f$ على $\Re-\{-1\}$.

بين أن العادلة $f(x)=0$ تقبل حلولا في المجال $]-1;0[$ .




## التمرين -2-

$f$ دالة معرفة بتمثيلها البياني $(C)$ كما هو موضح :

المستقيمان $(D)$ ، $(T)$ هما ؛ على الترتيب ؛ المماسان للمنحنى $(C)$ عند النقطتين اللتين فاصلتاهما 0 ، 1.

**1.** حدد القيم التالية: $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f'(0)$ و $f'(1)$ .

2.اكتب معادلة لكل من $(D)$ ، $(T)$ .

## التمرين -3-

$f$ الدالة العددية المعرفة على $\Re-\{1\}$ بـ : $f(x)=|x-2|+\dfrac{1}{x-1}$ . $(C)$ هو تمثيلها البياني في م م م إلى م م م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

2.احسب نهاية الدالة $f$ عند الأطراف المفتوحة لمجموعة التعريف.

3 .ادرس استمرارية الدالة $f$ عند العدد 2 .

4. احسب كلا من : $\lim\limits_{\substack{<\\ h\to 0}}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ و $\lim\limits_{\substack{>\\ h\to 0}}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$. - ماذا تستنتج ؟ - فسر النتيجة هندسيا .

5. اكتب معادلة لكل من $(\Delta_1)$ ، $(\Delta_2)$ المماسين للمنحنى $(C)$ عند النقطة ذات الفاصلة 2.

## التمرين -4-

أدرس اتجاه تغير $f$ في الحالات التالية :

| | | |
|---|---|---|
| $D=\Re,\quad f(x)=\frac{2}{3}x^3-3x^2+2$ • 1 | $D=\Re,\ f(x)=(x^2+2x-1)(2x-2)$ • 2 | $D=\left]1;+\infty\right[,\ f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$ • 3 |
| $D=\left]3;+\infty\right[,\ f(x)=\sqrt{3x-9}$ • 4 | $D=\Re,\ f(x)=(x^2-4)^3$ • 5 | $D=\Re-\{1\},\quad f(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$ • 6 |

**الأستاذ : بلجودي حمـــــو**

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# حل بعض الأسئلة من تمارين السلسلة :

## التمرين -1-

أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ المعرفة على المجموعة $D=R^*$ عند 1 مفسرا النتيجة بيانيا: $D=R^*, f(x)=|1-x|+\frac{2}{x}$

$$f(x)=|1-x|+\frac{1}{x}=\begin{cases}1-x+\frac{1}{x}; x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;1\right] \\ x-1+\frac{1}{x}; x\in\left[1;+\infty\right[\end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-(1+h)+\frac{1}{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1-h+\frac{1}{1+h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2-2h-1+1}{h(h+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h-2}{h+1}=\cdots$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+1-1+\frac{1}{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-1+\frac{1}{1+h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-1+1}{h(h+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h+1}=\cdots$$

الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند1 من اليمين و من اليسار و عددها المشتق عند 1 من اليمين هو 2- و عددها المشتق عند 1 من اليسار هو 0 و بما أنهما مختلفان فهي غير قابلة للاشتقاق عند 1.

هندسيا : المنحنى الممثل للدالة $f$ يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 نصفي مماسين معاملا توجيههما 2- و 0 .

## التمرين -6-

عين الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية على $D$ :

| | | |
|---|---|---|
| $D=\Re, \quad f(x)=\frac{2}{3}x^3-3x^2+2 \bullet 1$ | $D=\Re, f(x)=(x^2+2x-1)(x-2) \bullet 2$ | $D=]1;+\infty[, f(x)=\frac{x^2-x+2}{x-1} \bullet 3$ |

### الحل

1. $f$ قابلة للاشتقاق على $\Re$ و لدينا $f'(x)=\frac{2}{3}\times 3x^2-3\times 2x+0=2x^2-6x$

$D=\Re, f(x)=(x^2+2x-1)(x-2) \bullet 2$ $f$ قابلة للاشتقاق على $\Re$ و لدينا

$$f'(x)=(x^2+2x-1)'(x-2)+(x-2)'(x^2+2x-1)=(2x+2)(x-2)+1(x^2+2x-1)$$
$$=2x^2-4x+2x-4+x^2+2x-1=3x^2-5$$

$D=]1;+\infty[, f(x)=\frac{x^2-x+2}{x-1} \bullet 3$ $f$ قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا:

$$f'(x)=\frac{(x^2-x+2)'\times(x-1)-(x-1)'\times(x^2-x+2)}{(x-1)^2}=\frac{(2x-1)\times(x-1)-1\times(x^2-x+2)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

## حل التمرين -7-

### 1. حساب الدالة المشتقة للدالة f بدلالة a و b :

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\Re$ و لدينا : $f'(x)=3ax^2+b$

### 2. تبيين أن :a=1 ، b=-3 ، c=-1 :

المنحني $(C_f)$ يشمل النقطة $A(0;-1)$ معناه $f(0)=-1$

و يقبل في النقطة $B(1;-3)$ مماسا أفقيا معناه $f(1)=-3$ و $f'(1)=0$

و منه : $\begin{cases}f(0)=-1\\f(1)=-3\\f'(1)=0\end{cases}$ و منه : $\begin{cases}c=-1\\a+b+c=-1\\3a+b=0\end{cases}$ و منه : $\begin{cases}c=-1\\a+b=-2.....(2)\\3a+b=0...(3)\end{cases}$ نضرب طرفي المعادلة (1) في 1- ثم

نجمع (1) و (2) ينتج : $2a=2$ و منه $a=1$. نعوض قيمة $a$ في المعادلة (1) نجد $b=-3$ ،إذن: $\begin{cases}a=1\\b=-3\\c=-1\end{cases}$

**الأستاذ : بلجودي حمـــــو**

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com




www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً