najah213.com · نجاح 213

➢ التمرين الأول :

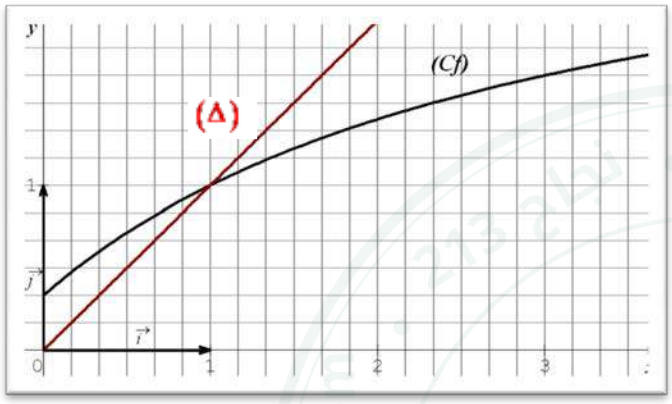
نعتبر الدالة f المعرفة و المتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ و المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$.

α عدد حقيقي موجب ، (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول u_0 حيث :

$u_0=\alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=f(u_n)$

I) عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة

II) نضع في كل ما يلي $\alpha=0$



1) أ. انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حساب الحدود)

ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

2) أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<1$

ب. بين أن المتتالية متزايدة تماما ، ثم برر تقاربها

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على بـ : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$.

أ. برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

ب. عبر بدلالة n عن v_n و u_n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=1+\dfrac{v_{2021}}{v_{2020}}+\ldots+\dfrac{v_{n+2019}}{v_{2020}}$. ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

5) احسب بدلالة n المجموع T حيث : $T=\ln(|v_n|)+\ln(|v_{n+1}|)+\ldots+\ln(|v_{n+2019}|)$

➢ التمرين الثاني :

(u_n) متتالية عددية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 بحيث :

$u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=1-\dfrac{4}{u_n+3}$

1) برهن بالتراجع ،انه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1<u_n\leq 0$

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أن (u_n) متقاربة

3) (v_n) متتالية معرفة في المجموعة $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\dfrac{1}{u_n+1}$

أ. بين أن (v_n) متتالية حسابية ،عين أساسها و حدها الأول

ب. عين v_n ثم u_n بدلالة n ، استنتج ثانية أن (u_n) متقاربة

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n$ و $T_n=e^{\frac{u_1}{u_1+1}}\times e^{\frac{u_2}{u_2+1}}\times\ldots\times e^{\frac{u_n}{u_n+1}}$

عين S_n و T_n بدلالة n ، هل المتتالية (T_n) متقاربة؟ برر إجابتك

➢ لتمرين الثالث :

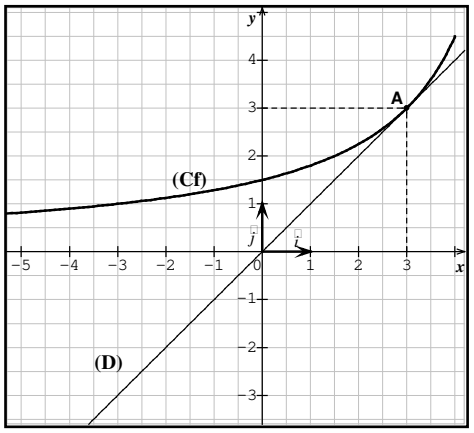
في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس مثلنا (C_f) التمثيل البياني للدالة f المعرفة

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

على المجال $]-\infty;4[$ بـ : $f(x)=\dfrac{9}{6-x}$ و (D) الذي معادلته $y=x$ المستقيم



1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ :

$u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ. انقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية :

u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

ب. أحسب إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم (D).

جـ. أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

2) أ.باستعمال الاستدلال بالتراجع ، اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<3$

ب.عين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

جـ. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$

أ.بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول.

ب. اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

جـ. استنتج ثانية أن المتتالية (u_n) متقاربة.

➢ التمرين الرابع :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2}{4}$

والمتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=(\alpha+3)u_n+\alpha$. بحيث α عدد حقيقي

(I) عين قيمة α التي من أجلها تكون المتتالية (v_n) متتالية ثابتة

(II) نفرض أن $\alpha\neq-3$

1) عين α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

2) نضع $\alpha=-2$

أ. عين عبارة u_n بدلالة n ؛هل (u_n) متقاربة؟ برر إجابتك

ب. من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$

بين أن : $S_n=3\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+2n-2$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n}$

➢ التمرين الخامس :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_ne^{-u_n}$

1) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>0$

2) بين أن المتتالية (u_n) متتالية متناقصة تماما، استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة

3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln(u_n)$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا: $u_n = v_n - v_{n+1}$

ب. نضع : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$ ، بين أن $S_n = -v_n$

جـ . استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

➢ التمرين السادس :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـــ:

$u_0 = \frac{2}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2\sqrt{2}}n + \frac{1}{\sqrt{2}}$

1) أحسب كل من: u_1 ، u_2 و u_3

2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــ: $v_n = \sqrt{2}\,u_n - n$

أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

ب. عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n ،هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

3) نعتبر المجموعين S_n و T_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n+1}$ و $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n+1}$

بين أن : $S_n = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ و $T_n = \frac{1}{3}\left(4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}(n+1)(n+2)$

➢ التمرين السابع :

(I) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0 = 12$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = \frac{12}{13}u_n + \frac{14}{13}$

1) أحسب u_1 ، u_2 و u_3 (تعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n < 14$

3) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة

(II) (v_n) هي المتتالية العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = u_n - 14$

1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0

2) عين عبارة u_n بدلالة n ، ثم أحسب نهاية (u_n)

3) أ. عين بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

ب. عين بدلالة n المجموع T_n حيث : $T_n = \sqrt[3]{v_0^{\,2}} + \sqrt[3]{v_1^{\,2}} + ... + \sqrt[3]{v_n^{\,2}}$ ،ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

➢ التمرين الثامن :

1) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n}$

أ. أحسب u_1 و u_2

ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

جـ. برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة

2) (v_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

أ. بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0

ب. عين عبارة u_n بدلالة n ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n)

3) (w_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = \dfrac{3}{u_n}$

أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 1 - v_n$

ب. نعتبر المجموع S_n التالي : $S_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = n + 1 + \dfrac{8}{3}\left(1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

➢ التمرين التاسع :

1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ : $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$

أ. بين أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[0;1]$

ب. عين صورة المجال $[0;1]$ بالدالة f

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

أ .بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 1$

ب.بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

جـ. استنتج أن المتتالية (u_n) متتالية متقاربة ، ثم أحسب نهايتها

➢ التمرين العاشر :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0 = \dfrac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$

2) أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1}$

ب. أدرس اتجاه تغير المتتالية العددية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \ln(u_n - 1)$

أ.بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب. عين بدلالة n عبارة الحد العام u_n ، ثم استنتج ثانية أن (u_n) متقاربة

4) أحسب بدلالة n ، المقدار $P(n) = (u_1 - 1) \times (u_2 - 1) \times ..... \times (u_n - 1)$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

حلول التمارين المقترحة

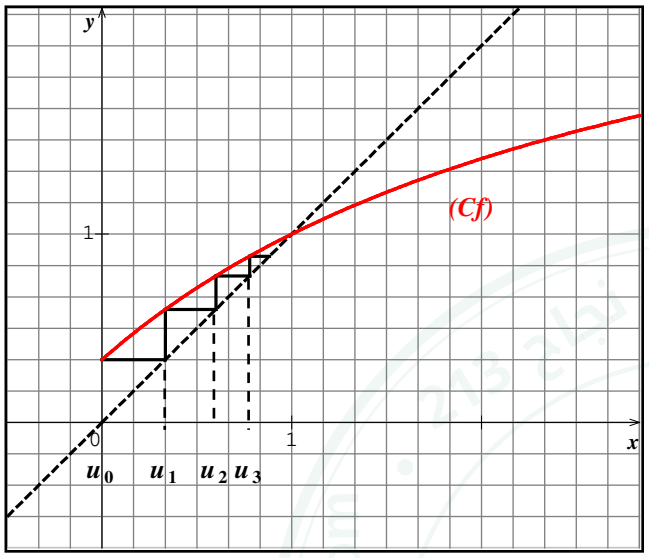
✓ التمرين الأول :

I) تعيين α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة :

نعلم أنه تكون (u_n) متتالية ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n$

وعليه من أجل $n=0$ نجد : $u_1=u_0=\alpha$ أي أن $f(\alpha)=\alpha$ ومنه $\frac{3\alpha+1}{\alpha+3}=\alpha$ إذن $\alpha^2=1$ و بما أن $\alpha\geq 0$ فإن $\alpha=1$

II) نعتبر $\alpha=0$



1) أ . نقل الشكل و تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 :

ب التخمين: من خلال تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و متقاربة

2) أ. البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq u_n<1$

(نوظف الاستدلال بالتراجع)

- من أجل $n=0$: $0\leq u_0<1$ محققة لأن $u_0=0$
- لنفرض أن $0\leq u_n<1$ و لنبرهن أن $0\leq u_{n+1}<1$

بما أن فرضا $0\leq u_n<1$ و الدالة f متزايدة تماما

على $[0;+\infty[$ فإن $f(0)\leq f(u_n)<f(1)$

ومنه $\frac{1}{3}\leq f(u_n)<1$ أي أن $0\leq u_{n+1}<1$

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq u_n<1$

ب. لنبين أن (u_n) متزايدة تماما : ليكن n عدد طبيعي ، لدينا $u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+1}{u_n+3}-u_n$

أي أن $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^{\,2}+1}{u_n+3}=\frac{-(u_n-1)(u_n+1)}{u_n+3}$ و بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $0\leq u_n<1$ فإن $u_n-1<0$

و $u_n+1>0$ فإن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}-u_n>0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما

- بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بالعدد 1 فإنها متقاربة

3) أ. نبين أن (v_n) متتالية هندسية :

(v_n) متتالية هندسية أساسها q إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=v_n\times q$

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{3u_n+1}{u_n+3}-1}{\frac{3u_n+1}{u_n+3}+1}$

ومنه $v_{n+1}=\frac{2u_n-2}{4u_n+4}=\frac{1}{2}\times\frac{u_n-1}{u_n+1}$

أي أن $v_{n+1}=\frac{1}{2}\times v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+1}=-1$

ب. تعيين عبارة v_n بدلالة n : بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=-1$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

فإن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

- تعيين عبارة u_n بدلالة n : لدينا $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$ ومنه $v_n\left(u_n+1\right)=u_n-1$ إذن $u_n\left(v_n-1\right)=-1-v_n$

و عليه $u_n=\frac{-1-v_n}{-1+v_n}$ ينتج أن $u_n=\frac{-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{-1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

4) أ. حساب S_n بدلالة n :

لدينا : $S_n=1+\frac{v_{2021}}{v_{2020}}+\ldots+\frac{v_{n+2019}}{v_{2020}}$ أي أن $S_n=\frac{1}{v_{2020}}\left(v_{2020}+v_{2021}+\ldots+v_{n+2019}\right)$

و عليه $S_n=\frac{1}{v_{2020}}\times\left[v_{2020}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right]$ و بالتالي $S_n=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$: بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=2$

ب. حساب المجموع T حيث : $T=\ln\left(\left|v_n\right|\right)+\ln\left(\left|v_{n+1}\right|\right)+\ldots+\ln\left(\left|v_{n+2019}\right|\right)$.

بما أن $v_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ فإن $\ln\left(\left|v_n\right|\right)=\ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ ومنه $\ln\left(\left|v_n\right|\right)=-n\ln 2$ وهو حد عام لمتتالية حسابية

أساسها $(-\ln 2)$ وعليه $T=\frac{2020}{2}\left[\ln\left(\left|v_n\right|\right)+\ln\left(\left|v_{n+2019}\right|\right)\right]$

وبالتالي $T=1010\left[-n\ln 2-(n+2019)\ln 2\right]$ ومنه $T=-(2039190)\times\ln 2$

✓ **التمرين الثاني :**

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $-1<u_n\leq 0$:

أ. من أجل $n=0$: $-1<u_0\leq 0$ محققة لأن $u_0=0$

ب. ليكن n عدد طبيعي كيفي، لنفرض أن $-1<u_n\leq 0$ و لنبرهن $-1<u_{n+1}\leq 0$

بما أن فرضا $-1<u_n\leq 0$ فإن $2<u_n+3\leq 3$ ومنه $\frac{1}{3}<\frac{1}{u_n+3}\leq\frac{1}{2}$ إذن $\frac{4}{3}<\frac{4}{u_n+3}\leq 2$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

ينتج $-\frac{4}{3} \leq -\frac{4}{u_n+3} < -2$ وعليه $-1 < 1-\frac{4}{u_n+3} \leq -\frac{1}{3}$ و بما أن $u_{n+1} = 1-\frac{4}{u_n+3}$

فإن $-1 < u_{n+1} \leq -\frac{1}{3}$ أي أن $-1 < u_{n+1} \leq 0$

من أ. و ب. ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $-1 < u_n \leq 0$

2) دراسة اتجاه تغير المتتالية العددية (u_n) :

ليكن n عدد طبيعي، لدينا: $u_{n+1}-u_n = 1-\frac{4}{u_n+3}-u_n$ ومنه $u_{n+1}-u_n = \frac{-u_n^{\,2}-2u_n-1}{u_n+3}$

إذن $u_{n+1}-u_n = \frac{-(u_n+1)^2}{u_n+3}$.وبما أن $-1 < u_n \leq 0$ فإن $u_n+3>0$ و $-(u_n+1)^2 < 0$

وعليه $u_{n+1}-u_n < 0$ ينتج أن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

- استنتاج أن (u_n) متقاربة: بما أن (u_n) متناقصة تماما و محدودة من أسفل بالعدد -1 فإنها متقاربة

3) أ. نبين أن (v_n) متتالية حسابية:

ليكن n عدد طبيعي، لدينا: $v_{n+1}-v_n = \frac{1}{u_{n+1}+1}-\frac{1}{u_n+1}$ و بما أن $\frac{1}{u_{n+1}+1} = \frac{1}{1-\frac{4}{u_n+3}+1} = \frac{u_n+3}{2(u_n+1)}$

فإن $v_{n+1}-v_n = \frac{u_n+3}{2(u_n+1)}-\frac{1}{u_n+1}$ ومنه $v_{n+1}-v_n = \frac{u_n+1}{2(u_n+1)}$ ينتج أن $v_{n+1}-v_n = \frac{1}{2}$

وعليه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{u_0+1} = 1$

ب. تعيين v_n ثم u_n بدلالة n :

- بما أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = 1$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n = 1+\frac{1}{2}n$
- بما أن $v_n = \frac{1}{u_n+1}$ فإن $u_n+1 = \frac{1}{v_n}$ ومنه $u_n = \frac{1}{v_n}-1$ إذن $u_n = \frac{2}{n+2}-1$ أي أن $u_n = \frac{-n}{n+2}$
- استنتاج ثانية أن (u_n) متقاربة :

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-n}{n} = -1$ فإن المتتالية (u_n) متقاربة

4) أ. حساب S_n بدلالة n : لدينا $S_n = u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n$.

لنضع $u_nv_n = w_n$ ، نجد $S_n = w_0+w_1+\ldots+w_n$

بما أن $u_n = \frac{1}{v_n}-1$ فإن $w_n = 1-v_n$ ومنه $S_n = (1-v_0)+(1-v_0)+\ldots+(1-v_n)$

إذن $S_n = (1+1+\ldots+1)-(v_0+v_1+\ldots+v_n)$ ومنه $S_n = (n+1)-S_n^{'}$ مع $S_n^{'} = v_0+v_1+\ldots+v_n$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

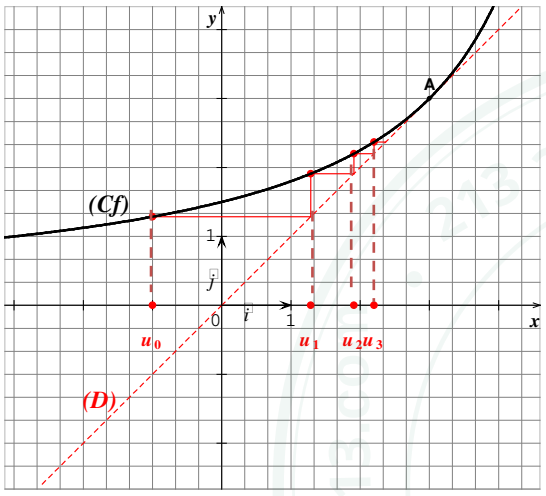
إن $S_n^{'}$ هو مجموع $n+1$ حد من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ وعليه $S_n^{'}=\frac{n+1}{2}\left(v_0+v_n\right)=\frac{n+1}{2}\left(2+\frac{1}{2}n\right)$

ينتج أن $S_n=(n+1)-\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ أي أن $S_n=\frac{-(n+1)(n+2)}{2}$

ب. حساب T_n بدلالة n : لدينا $\frac{u_n}{u_n+1}=\frac{u_n+1-1}{u_n+1}=1-\frac{1}{u_n+1}$ وبما أن $u_n+1=\frac{1}{v_n}$ فإن $\frac{1}{u_n+1}=v_n$

ومنه $\frac{u_n}{u_n+1}=1-v_n=w_n$ و عليه $T_n=e^{w_0}\times e^{w_1}\times\ldots\times e^{w_n}$ أي أن $T_n=e^{S_n}=e^{\frac{-(n+1)(n+2)}{2}}$

✓ التمرين الثالث:



1) أ. نقل الشكل ثم تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل:

ب. تعيين إحداثيات النقطة A :

نعتبر $(x;y)$ إحداثيات النقطة A

لدينا $A\in(\Delta)\cap(C_f)$ معناه $x\in]-\infty;4[$ و $f(x)=x$.

$f(x)=x$ تكافئ $\frac{9}{6-x}=x$ ومنه $f(x)=x$ تكافئ $x^2-6x+9=0$

$f(x)=x$ تكافئ $(x-3)^2=0$ أي أن $f(x)=x$ تكافئ $x=3$ ومنه $A(3;3)$

جـ. التخمين: المتتالية العددية (u_n) متزايدة تماما و متقاربة

2) أ. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<3$

- من أجل $n=0$: $u_0<3$ محققة أن $u_0=-1$
- ليكن n عدد طبيعي ، لنفرض أن $u_n<3$ و لنبرهن أن $u_{n+1}<3$

الطريقة الأولى: لدينا فرضا $u_n<3$ إذن $-u_n>-3$ ومنه $6-u_n>3$ و عليه $\frac{1}{6-u_n}<\frac{1}{3}$ و بالتالي $\frac{9}{6-u_n}<3$

إذن $u_{n+1}<3$ لأن $u_{n+1}=f(u_n)$. ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<3$.

الطريقة الثانية: لندرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;4[$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;4[$ ومن أجل كل x من $]-\infty;4[$: $f'(x)=\frac{9}{(6-x)^2}$

نلاحظ أنه من أجل كل x من $]-\infty;4[$: $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;4[$

بما أن فرضا $u_n<3$ أي أن $u_n\in]-\infty;3[$ و f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;3[$ (لأن $]-\infty;3[\subset]-\infty;4[$)

فإن $f(u_n)<f(3)$ ومنه $u_{n+1}<3$ لأن $u_{n+1}=f(u_n)$ و $f(3)=3$

ب. ليكن n عدد طبيعي ، لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{9}{6-u_n}-u_n$ ومنه $u_{n+1}-u_n=\frac{{u_n}^2-6u_n+9}{6-u_n}$ أي أن $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-3)^2}{6-u_n}$

بما أنه من أجل عدد طبيعي n ، $6-u_n>3$ أي أن $6-u_n>0$ و كذلك $(u_n-3)^2>0$ فإن $u_{n+1}-u_n>0$

و بالتالي (u_n) متتالية متزايدة تماما

جـ. بما أن (u_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 فإن (u_n) متتالية متقاربة

3) أ. لنبين أن (v_n) متتالية حسابية: ليكن n عدد طبيعي ، لدينا : $v_n=\frac{1}{u_n-3}$ ومنه $v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-3}$ إذن $v_{n+1}=\frac{1}{\frac{9}{6-u_n}-3}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ينتج $v_{n+1}=\frac{6-u_n}{3u_n-9}$ و بالتالي $v_{n+1}-v_n=\frac{6-u_n}{3u_n-9}-\frac{1}{u_n-3}$ أي أن $v_{n+1}-v_n=\frac{6-u_n}{3(u_n-3)}-\frac{3}{3(u_n-3)}$

و عليه $v_{n+1}-v_n=\frac{-(u_n-3)}{3(u_n-3)}$ نجد أن $v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{3}$ ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{-1}{3}$ و حدها الأول $v_0=\frac{-1}{4}$

ب. بما أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{-1}{3}$ و حدها الأول $v_0=\frac{-1}{4}$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{-1}{3}n-\frac{1}{4}$

من جهة أخرى $v_n=\frac{1}{u_n-3}$ ومنه $u_n-3=\frac{1}{v_n}$ إذن $u_n=\frac{1}{v_n}+3=\frac{3v_n+1}{v_n}$ و بالتالي :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{3\left(\frac{-1}{3}n-\frac{1}{4}\right)+1}{\frac{-1}{3}n-\frac{1}{4}}$ بعد الحساب نجد ،من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{12n-3}{4n+3}$

جـ. بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{12n}{4n}=3$ فإن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 3

✓ التمرين الرابع:

(I) تعين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية ثابتة :

(v_n) متتالية ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_{n+1}=v_n$

و بما أن فرضا المتتالية (v_n) متتالية ثابتة فإنه بأخذ $n=0$ نجد $v_1=v_0$ و بما أن $u_0=1$ و $v_0=(\alpha+3)u_0+\alpha$

فإن $v_0=2\alpha+3$ ، كذلك $u_1=\frac{3u_0+2}{4}=\frac{5}{4}$ و $v_1=(\alpha+3)u_1+\alpha=$ فإن $v_1=\frac{9}{4}\alpha+\frac{15}{4}$

ومنه $v_1=v_0$ تكافئ $\frac{9}{4}\alpha+\frac{15}{4}=2\alpha+3$ ،و بالتالي $v_1=v_0$ تكافئ $\frac{1}{4}\alpha=\frac{-3}{4}$ ومنه $v_1=v_0$ تكافئ $\alpha=-3$

نستنتج أنه من أجل $\alpha=-3$ تكون المتتالية (v_n) متتالية ثابتة

(II) نفرض $\alpha\neq-3$

1) تعيين α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية :

(v_n) متتالية هندسية معناه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ يوجد عدد حقيقي n حيث : $v_{n+1}=v_n\times q$

بأخذ $n=0$: نجد $v_1=v_0\times q$ و بما أن $v_n=(\alpha+3)u_n+\alpha$ ، فإن $v_{n+}=(\alpha+3)u_{n+1}+\alpha$

ومنه $v_{n+}=(\alpha+3)\frac{3u_n+2}{4}+\alpha$ وعليه $v_{n+1}=\frac{3(\alpha+3)u_n+2(\alpha+3)+4\alpha}{4}$

و بالتالي: من أجل كل عدد طبيعي n ؛ يوجد عدد حقيقي n حيث : $\frac{3(\alpha+3)u_n+2(\alpha+3)+4\alpha}{4}=\left[(\alpha+3)u_n+\alpha\right]\times q$

وعليه : من أجل كل عدد طبيعي n ؛ يوجد عدد حقيقي n حيث : $(\alpha+3)(3-4q)u_n+2\alpha(3-2q)6=0$

ينتج : $(\alpha+3)(3-4q)=0$ و $2\alpha(3-2q)+6=0$ ، بما أن $\alpha\neq-3$ فإن $3-4q=0$ أي أن $q=\frac{3}{4}$ و $\alpha=-2$

ومنه من أجل $\alpha=-2$ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{4}$ و حدها الأول $v_0=2(-2)+3$ أي أن $v_0=-1$

2) أ. من أجل $\alpha=-2$ ، المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{3}{4}$ و حدها الأول $v_0=-1$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=v_0\times q^n$ أي أن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=-\left(\frac{3}{4}\right)^n$

من جهة أخرى $v_n=u_n-2$ إذن $u_n=v_n+2$ و عليه $u_n=-\left(\frac{3}{4}\right)^n+2$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

- بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$ ومنه المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 2

ب. بما أن من أجل كل عد طبيعي n ؛ $u_n=v_n+2$ فإن $S_n=(v_0+2)+(v_1+2)+...+(v_n+2)$

أي أن $S_n=(v_0+v_1+...+v_n)+(2+2+...+2)=2(n+1)$ إن $2+2+...+2$

و $S_n'=v_0+v_1+...+v_n$ هو مجموع $(n+1)$ حد متتابع من المتتالية الهندسية (v_n)

إذن $S_n'=v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=-\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}$ أي أن $S_n'=4\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right)$ وعليه $S_n=4\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right)+2(n+1)$

ومنه $S_n=4\times\frac{3}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n-4+2n+2$ و بالتالي $S_n=3\left(\frac{3}{4}\right)^n+2n-2$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=3\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n}+\frac{2n-2}{n}=2$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n-2}{n}=2$

✓ التمرين الخامس:

1) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n>0$:

أ. من أجل $n=0$: $u_0>0$ محققة لأن $u_0=1$

ب. ليكن n عدد طبيعي كيفي : لنفرض أن $u_n>0$ ، و لنبرهن أن $u_{n+1}>0$

لدينا فرضا $u_n>0$ و من جهة أخرى $e^{-u_n}>0$ ، إذن $u_ne^{-u_n}>0$ و بما أن $u_{n+1}=u_ne^{-u_n}$ فإن $u_{n+1}>0$.

من أ. و ب . ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n>0$

2) لنبين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما :

الطريقة الأولى : من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}-u_n=u_ne^{-u_n}-u_n=u_n\left(e^{-u_n}-1\right)$

بما أن $u_n>0$ فإن $-u_n<0$ ومنه $e^{-u_n}<1$ و عليه $e^{-u_n}-1<0$

ينتج أن $u_n\left(e^{-u_n}-1\right)<0$ أي أن $u_{n+1}-u_n<0$ و بالتالي (u_n) متتالية متناقصة تماما

الطريقة الثانية : بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ فإننا نقارن بين كل من $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و العدد 1

لدينا $\frac{u_{n+1}}{u_n}=e^{-u_n}$ وبما أن $u_n>0$ فإن $-u_n<0$ ومنه $e^{-u_n}<1$ و عليه $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$

ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}<u_n$ و بالتالي (u_n) متتالية متناقصة تماما

- استنتاج أن (u_n) متتالية متقاربة :

بما أن (u_n) متتالية متناقصة تماما و محدودة من الأسفل لأن (من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n>0$) فإنها متقاربة

3) أ. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n=v_n-v_{n+1}$:

من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n-v_{n+1}=\ln(u_n)-\ln(u_{n+1})$ ومنه $v_n-v_{n+1}=\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

و بما أن $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{1}{e^{-u_n}}=e^{u_n}$ فإن $v_n-v_{n+1}=\ln\left(e^{u_n}\right)$ و عليه $v_n-v_{n+1}=u_n$

ب. نبين أن: $S_n=-v_n$:

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n=v_n-v_{n+1}$ فإن :

$S_n=\left(v_0-v_1\right)+\left(v_1-v_2\right)+...\left(v_{n-1}-v_{n-2}\right)+\left(v_{n-1}-v_n\right)$ ومنه $S_n=-v_n$

جـ. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$:

لنحسب أولا $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: نعلم أنه إذا كانت $\left(u_n\right)$ متتالية متقاربة نحو عدد حقيقي L فإن L يحقق $L=Le^{-L}$

أي أن $L\left(1-e^{-L}\right)=0$ ومنه $L=0$ أو $e^{-L}=1$ إذن $L=0$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-v_n\right)$ أي أن $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\ln\left(u_n\right)\right)$ ومنه

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(-\ln\left(x\right)\right)=+\infty$$

✓ التمرين السادس :

1) حساب u_1 ، u_2 و u_3 :

- $u_1=\frac{1}{2}u_0+\frac{1}{\sqrt{2}}$ و بما أن $u_0=\frac{2}{3}$ فإن $u_1=\frac{2+3\sqrt{2}}{6}$
- $u_2=\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ و بما أن $u_1=\frac{2+3\sqrt{2}}{6}$ فإن $u_2=\frac{1+6\sqrt{2}}{6}$
- $u_3=\frac{1}{2}u_2+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ و بما أن $u_2=\frac{1+6\sqrt{2}}{6}$ فإن $u_3=\frac{1+18\sqrt{2}}{12}$

2) أ. نبين أن $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية :

ليكن n عدد طبيعي ، لدينا $v_n=\sqrt{2}\,u_n-n$ ومنه $v_{n+1}=\sqrt{2}\,u_{n+1}-\left(n+1\right)$

و بما أن $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2\sqrt{2}}n+\frac{1}{\sqrt{2}}$ فإن $v_{n+1}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2\sqrt{2}}n+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(n+1\right)$

أي أن $v_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}u_n+\frac{1}{2}n+1-n-1$ ينتج أن $v_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}u_n-\frac{1}{2}n$ ومنه $v_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\,u_n-n\right)$

و بالتالي $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$. إذن $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

ب. تعيين عبارة v_n بدلالة n :

بما أن $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ فإن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n=v_0\times q^n$

- حساب v_0 : لدينا $v_0=\sqrt{2}\,u_0$ و بما أن $u_0=\frac{2}{3}$ فإن $v_0=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

- استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

ليكن n عدد طبيعي ؛ لدينا $v_n=\sqrt{2}\;u_n-n$ ومنه $u_n=\frac{1}{\sqrt{2}}v_n+\frac{n}{\sqrt{2}}$ و عليه $u_n=\frac{1}{\sqrt{2}}v_n+\frac{n}{\sqrt{2}}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

و بما أن $v_n=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ فإن $u_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)+\frac{n}{\sqrt{2}}$ أي أن $u_n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n}{\sqrt{2}}$

- بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{2}}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ و عليه (u_n) متتالية متباعدة

3) نبين أن $S_n=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(4-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$:

إن S_n هو مجموع $n+2$ حد متتابع من متتالية هندسية ، إذن $S_n=v_0\times\frac{1-q^{n+2}}{1-q}$ أي أن $S_n=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}{1-\frac{1}{2}}$

ومنه $S_n=\frac{4\sqrt{2}}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right)$ أي أن $S_n=\frac{\sqrt{2}}{3}\times\left(4-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{1}{4}\right)$ ينتج أن $S_n=\frac{\sqrt{2}}{3}\times\left(4-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

- نبين أن $T_n=\frac{1}{3}\left(4-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}(n+1)(n+2)$:

بما أن $u_n=\frac{1}{\sqrt{2}}v_n+\frac{n}{\sqrt{2}}$ فإن $T_n=\frac{1}{\sqrt{2}}v_0+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}v_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}v_2+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}v_n+\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right)$

ومنه $T_n=\frac{1}{\sqrt{2}}S_n+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+2+\ldots+(n+1)\right)$ أي أن $T_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(v_0+v_1+\ldots+v_n\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+2+\ldots+(n+1)\right)$

إن $1+2+\ldots+(n+1)$ هو مجموع $n+1$ د متتابع من متتالية حسابية أساسها $r=1$ وعليه

$$1+2+\ldots+(n+1)=\frac{n+1}{2}(1+n+1)$$

أي أن $1+2+\ldots+(n+1)=\frac{n+1}{2}(n+2)$ من جهة أخرى $S_n=\frac{\sqrt{2}}{3}\times\left(4-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

و عليه $T_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{3}\times\left(4-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}(n+1)(n+2)$ ومنه $T_n=\frac{1}{3}\times\left(4-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}(n+1)(n+2)$

✓ التمرين السابع :

(I)

1) حساب u_1 ، u_2 و u_3 :

- $u_1=\frac{12}{13}u_0+\frac{14}{13}$ و بما أن $u_0=12$ فإن $u_1=\frac{158}{13}$
- $u_2=\frac{12}{13}u_1+\frac{14}{13}$ و بما أن $u_1=\frac{158}{13}$ فإن $u_2=\frac{2078}{169}$
- $u_3=\frac{12}{13}u_2+\frac{14}{13}$ و بما أن $u_2=\frac{2078}{169}$ فإن $u_3=\frac{27302}{2197}$

2) نبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n<14$:

أ. من أجل $n=0$: $u_0<14$ لأن $u_0=12$

ب. ليكن n عدد طبيعي كيفي ؛ لنفرض أن $u_n<14$ و لنبرهن أن $u_{n+1}<14$

لدينا فرضا $u_n<14$ إذن $\frac{12}{13}u_n<\frac{168}{13}$ ومنه $\frac{12}{13}u_n+\frac{14}{13}<\frac{182}{13}$ وعليه $u_{n+1}<14$

من أ و ب ينتج ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n<14$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

3) نبرهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما :

من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}-u_n=\frac{12}{13}u_n+\frac{14}{13}-u_n$ أي أن $u_{n+1}-u_n=\left(\frac{12}{13}-1\right)u_n+\frac{14}{13}$

ومنه $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{13}u_n+\frac{14}{13}=\frac{1}{13}(14-u_n)$. بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n<14$ فإن $14-u_n>0$

و عليه $u_{n+1}-u_n>0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما

- استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى (لأن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n<14$)

فإن المتتالية (u_n) متقاربة

(II)

1) نبين أن المتتالية (v_n) هندسية :

من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n=u_n-14$ ومنه $v_{n+1}=u_{n+1}-14$ و بما أن $u_{n+1}=\frac{12}{13}u_n+\frac{14}{13}$

فإن $v_{n+1}=\frac{12}{13}u_n+\frac{14}{13}-14$ أي أن $v_{n+1}=\frac{12}{13}u_n-\frac{14\times12}{13}$ ومنه $v_{n+1}=\frac{12}{13}(u_n-14)$ ينتج $v_{n+1}=\frac{12}{13}v_n$

و بالتالي (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{12}{13}$ و حدها الأول v_0 حيث $v_0=u_0-14=-2$

2) تعيين عبارة u_n بدلالة n :

نعين أولا عبارة v_n بدلالة n : بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{12}{13}$ و حدها الأول $v_0=-2$

فإن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n=-2\left(\frac{12}{13}\right)^n$

من جهة أخرى $v_n=u_n-14$ أي أن $u_n=v_n+14$ ينتج من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n=-2\left(\frac{12}{13}\right)^n+14$

- استنتاج نهاية (u_n) : بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{12}{13}\right)^n=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=14$

3) أ. تعيين المجموع S_n بدلالة n :

بما أن $u_n=v_n+14$ فإن $S_n=(v_0+14)+(v_1+14)+...+(v_n+4)$

ومنه $S_n=(v_0+v_1+...+v_n)+(14+14+....+14)$. إن $14+14+....+14=14(n+1)$

من جهة أخرى $S_n'=v_0+v_1+...+v_n$ هو مجموع $n+1$ حد متتابع من متتالية هندسية أساسها $q=\frac{12}{13}$

إذن $S_n'=v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ومنه $S_n'=-2\frac{1-\left(\frac{12}{13}\right)^{n+1}}{1-\frac{12}{13}}$ أي أن $S_n'=26\left(\left(\frac{12}{13}\right)^{n+1}-1\right)$

و عليه $S_n=26\left(\left(\frac{12}{13}\right)^{n+1}-1\right)+14(n+1)$

ب. تعيين المجموع T_n بدلالة n :

لنضع $w_n=\sqrt[3]{{v_n}^2}$ ينتج أن $T_n=w_0+w_1+...+w_n$

لنبين أن هو (w_n) متتالية هندسية :

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_{n+1}=v_n\times q$ إذن $(v_{n+1})^2=(v_n\times q)^2=(v_n)^2\times q^2$

ومنه $\sqrt[3]{(v_{n+1})^2}=\sqrt[3]{(v_n)^2\times q^2}$ أي أن $\sqrt[3]{(v_{n+1})^2}=\sqrt[3]{(v_n)^2}\times\sqrt[3]{q^2}$

ينتج أن $w_{n+1}=w_n\times\sqrt[3]{\frac{144}{169}}$ وعليه (w_n) متتالية هندسية أساسها $q'=\sqrt[3]{\frac{144}{169}}$ و حدها الأول $w_0=\sqrt[3]{4}$

و عليه T_n هو مجموع $n+1$ حد متتابع من متتالية هندسية أساسها q' ومنه $T_n=w_0\times\frac{1-(q')^{n+1}}{1-q'}$

أي أن $T_n=\sqrt[3]{4}\times\frac{1-\left(\sqrt[3]{\frac{144}{169}}\right)^{n+1}}{1-\sqrt[3]{\frac{144}{169}}}$ و بالتالي $T_n=\frac{\sqrt[3]{676}}{\sqrt[3]{169}-\sqrt[3]{144}}\times\left(1-\left(\sqrt[3]{\frac{144}{169}}\right)^{n+1}\right)$

- بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{144}{169}}\right)^{n+1}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\frac{\sqrt[3]{676}}{\sqrt[3]{169}-\sqrt[3]{144}}$

✓ التمرين الثامن :

1) أ. حساب u_1 و u_2 :

- $u_1=\frac{4u_0}{1+u_0}$ و بما أن $u_0=1$ فإن $u_1=2$
- $u_2=\frac{4u_1}{1+u_1}$ و بما أن $u_1=2$ فإن $u_2=\frac{8}{3}$

ب. نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $0<u_n<3$

(1) من أجل $n=0$: $0<u_0<3$ محققة لأن $u_0=1$

(2) ليكن n عدد طبيعي كيفي ؛ لنفرض أن $0<u_n<3$ و لنبرهن أن $0<u_{n+1}<3$

الطريقة الأولى : نوظف اتجاه تغير الدالة المرفقة

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{4x}{1+x}$ لاحظ أن $u_{n+1}=f(u_n)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ؛ $f'(x)=\frac{4}{(1+x)^2}$

نلاحظ أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ؛ $f'(x)>0$ إذن f دالة متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

و بما أن فرضا $0<u_n<3$ و الدالة f متزايدة تماما على $[0;3]$ فإن $f(0)<f(u_n)<f(3)$

ومنه $0<u_{n+1}<3$ لأن $f(0)=0$ و $f(3)=3$

الطريقة الثانية: نلاحظ أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=4-\frac{4}{1+u_n}$

لدينا فرضا $0<u_n<3$ ومنه $1<1+u_n<4$ إذن $\frac{1}{4}<\frac{1}{1+u_n}<1$ وعليه $1<\frac{4}{1+u_n}<4$

ومنه $-1<-\frac{4}{1+u_n}<-4$ و بالتالي $0<4-\frac{4}{1+u_n}<3$ أي أن $0<u_{n+1}<3$

من (1) و (2) ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $0<u_n<3$

جـ. نبرهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما :

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

الطريقة الأولى: من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n}{1+u_n}-u_n=\frac{-(u_n)^2+3u_n}{1+u_n}$ أي أن $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(-u_n+3)}{1+u_n}$

بما أن $0<u_n<3$ فإن $0<3-u_n<3$ ومنه $-3<-u_n<0$ أي أن $-u_n+3>0$ و $1+u_n>0$

وعليه $u_{n+1}-u_n>0$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

الطريقة الثانية: بما أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n>0$ فإننا نقارن $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد 1

لدينا $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{4}{1+u_n}$ و بما أن $1<1+u_n<4$ فإن $\frac{1}{4}<\frac{1}{1+u_n}<1$ ومنه $1<\frac{4}{1+u_n}<4$ أي أن $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$

وعليه $u_{n+1}>u_n$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

- بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بالعدد 3 (لأن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $0<u_n<3$) فإن المتتالية (u_n) متقاربة

2) أ. نبين أن المتتالية (v_n) هندسية :

من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n=\frac{u_n-3}{u_n}$ ومنه $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}}$ و بما أن $u_{n+1}=\frac{4u_n}{1+u_n}$

فإن $v_{n+1}=\frac{\frac{4u_n}{1+u_n}-3}{\frac{4u_n}{1+u_n}}$ ومنه $v_{n+1}=\frac{u_n-3}{4u_n}$ أي أن $v_{n+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{u_n-3}{u_n}\right)$ ومنه $v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n$

وعليه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-3}{u_0}=-2$

ب. تعيين عبارة u_n بدلالة n :

لنعين أولا عبارة v_n بدلالة n : بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-3}{u_0}=-2$

فإن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n=-2\left(\frac{1}{4}\right)^n$

و بما أن $v_n=\frac{u_n-3}{u_n}$ فإن $v_n=1-\frac{3}{u_n}$ ومنه $\frac{1}{u_n}=\frac{1-v_n}{3}$ و بالتالي $u_n=\frac{3}{1-v_n}$ و عليه $u_n=\frac{3}{1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

- حساب نهاية المتتالية (u_n) : بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$

3) أ. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $w_n=1-v_v$:

من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $w_n=\frac{3}{u_n}$ و بما أن $u_n=\frac{3}{1-v_n}$ فإن $w_n=\frac{3}{\frac{3}{1-v_n}}$ أي أن $w_n=1-v_v$

ب. من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $S_n=w_0+w_1+...+w_n$:

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $w_n=1-v_v$ فإن $S_n=(1-v_0)+(1-v_1)+...+(1-v_n)$

ومنه $S_n=(1+1+...+1)-(v_0+v_1+...+v_n)$

إن $S_n'=(v_0+v_1+...+v_n)$ هو مجموع $n+1$ حد متتابع من المتتالية الهندسية (v_n)

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

إذن $S_n' = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ومنه $S_n' = (-2) \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}$ أي أن $S_n' = \frac{-8}{3} \times \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

وعليه $S_n = n+1+\frac{8}{3} \times \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$: بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

✓ التمرين التاسع :

1)

أ. * الدالة f مستمرة على المجال $[0;1]$ لأنها دالة صماء

* الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;1[$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;1[$:

$f'(x) = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$. و بما أن $0 < x \leq 1$ فإن $0 \leq 1-x < 1$

ومنه ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;1[$: $f'(x) \geq 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

ب. بما أن الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ فإن صورة المجال $[0;1]$ هي المجال $[f(0);f(1)[$

أي هي المجال $[0;1]$

2) أ. نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $0 \leq u_n \leq 1$

(1) من أجل $n=0$: $0 \leq u_0 \leq 1$ محققة لأن $u_0 = \frac{1}{2}$

(2) ليكن n عدد طبيعي كيفي ؛ لنفرض أن $0 \leq u_n \leq 1$ لنبرهن أن $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

لدينا فرضا $0 \leq u_n \leq 1$ أي أن $u_n \in [0;1]$ و حسب السؤال السابق فإن $f(u_n) \in [0;1]$

أي أن $u_{n+1} \in [0;1]$ و عليه $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

من (1) و (2) ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $0 \leq u_n \leq 1$

ب. نبين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما :

من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n - u_n^2} - u_n$

ومنه $u_{n+1} - u_n = \frac{\left(\sqrt{2u_n - u_n^2} - u_n\right)\left(\sqrt{2u_n - u_n^2} + u_n\right)}{\sqrt{2u_n - u_n^2} + u_n}$

أي أن $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n - 2u_n^2}{\sqrt{2u_n - u_n^2} + u_n}$ ومنه $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{\sqrt{2u_n - u_n^2} + u_n}$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $0 \leq u_n \leq 1$ فإن $2u_n \geq 0$ و $1-u_n \geq 0$ و $\sqrt{2u_n - u_n^2} + u_n > 0$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} - u_n \geq 0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما

جـ. بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بالعدد 1 (لأن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $0 \leq u_n \leq 1$)

فإن المتتالية (u_n) متقاربة نحو عدد حقيقي L

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ فإن L هو حل للمعادلة $f(x) = x$ في المجال $[0;1]$

لدينا : $f(x) = x$ تكافئ $\sqrt{2x-x^2} = x$ ومنه $f(x) = x$ تكافئ $2x - x^2 = x^2$ و $0 \leq x \leq 1$

إذن $f(x) = x$ تكافئ $2x(x-1) = 0$ و $0 \leq x \leq 1$ وعليه $f(x) = x$ تكافئ ($x = 0$ أو $x = 0$) و $0 \leq x \leq 1$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

و بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما فإن $L=1$

✓ **التمرين العاشر :**

1) نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $1<u_n<2$

(أ) من أجل $n=0$ ؛ $1<u_0<2$ محققة لأن $u_0=\frac{3}{2}$

(ب) ليكن n عدد طبيعي كيفي، لنفرض أن $1<u_n<2$ و لنبرهن أن $1<u_{n+1}<2$

لدينا فرضا $1<u_n<2$ إذن $0<u_n-1<1$ ومنه $0<\sqrt{u_n-1}<1$ و عليه $1<1+\sqrt{u_n-1}<2$ أي أن $1<u_{n+1}<2$

من (أ) و(ب) ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $1<u_n<2$

2) أ. من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}-u_n=1+\sqrt{u_n-1}-u_n$ ومنه $u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n-1}-(u_n-1)$

إذن $u_{n+1}-u_n=\frac{\left[\sqrt{u_n-1}-(u_n-1)\right]\left[\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)\right]}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}$ ومنه $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n-1-(u_n-1)^2}{\sqrt{u_n-1}+u_n-1}$

و بالتالي $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n-1-u_n^2+2u_n-1}{\sqrt{u_n-1}+u_n-1}$ أي أن $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+3u_n-2}{\sqrt{u_n-1}+u_n-1}$

ب. من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+3u_n-2}{\sqrt{u_n-1}+u_n-1}$. بما أن $1<u_n<2$ فإن $u_n-1>0$ ومنه $\sqrt{u_n-1}+u_n-1>0$

و عليه إشارة $u_{n+1}-u_n$ من إشارة $-u_n^2+3u_n-2$. إن $-u_n^2+3u_n-2=0$ تكافئ $u_n=1$ أو $u_n=2$.

تعطى إشارة $u_{n+1}-u_n$ على النحو التالي :

u_n	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$u_{n+1}-u_n$		$-$	0	$+$	0	$-$	

و بما أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $1<u_n<2$ فإن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $1<u_n<2$ ؛ $u_{n+1}-u_n>0$

ينتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

- بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى (لأن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $1<u_n<2$)

فإن المتتالية (u_n) متقاربة

3) أ. نبين أن المتتالية (v_n) هندسية :

من أجل كل من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_{n+1}=\ln(u_{n+1}-1)$ و بما أن $u_{n+1}-u_n=1+\sqrt{u_n-1}$

فإن $v_{n+1}=\ln\left(\sqrt{u_n-1}\right)$ ومنه $v_{n+1}=\frac{1}{2}\ln(u_n-1)$ أي أن $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$

و بالتالي المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=\ln(u_0-1)$ أي أن $v_0=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

ب. تعين عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

فإن من أجل كل من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

من جهة أخرى $v_n=\ln(u_n-1)$ إذن $u_n-1=e^{v_n}$ ومنه $u_n=e^{v_n}+1$ وعليه $u_n=e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n\ln\left(\frac{1}{2}\right)}+1$ أي أن $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}}+1$

- استنتاج ثانية أن المتتالية (u_n) متقاربة : بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}}+1\right]=2$ أي أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ومنه المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 2

4) حساب بدلالة n المقدار $P(n)$: بما أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n - 1 = e^{v_n}$

فإن $P(n) = e^{v_1} \times e^{v_2} \times e^{v_3} \times ... \times e^{v_4}$ ومنه $P(n) = e^{v_1+v_2+v_3+...+v_n}$

إن $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n$ هو مجموع n حد متتابع من متتالية هندسية فإن $S_n = v_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$ أي أن

$S_n = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} \right) \times \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ و عليه $S_n = \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \times \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ومنه $P(n) = e^{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \times \ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ أو $P(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$

تجدون ملخصات دروس و تطبيقات متنوعة في مجموعة : الأستاذ محمد علالو

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com