najah213.com · نجاح 213

مـــذكـــرة رقـــم 01

الأستاذ :بـــخدة أمـــين

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

- الأستاذ : بخدة أمين
- المستوى : السنة ثالثة رياضيات
- المدة : 2 ساعة
- الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
- ميدان التعلم: التحليل
- موضوع الحصة : حساب مشتقة دالة

- المكتسبات القبليـة : حساب مشتقة دالة ، تعيين معادلة مماس عند نقطة
- الكفاءات المستهدفة : تذكير :حساب مشتقة دالة ، تعيين معادلة مماس عند نقطة
- المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**1 مناقشة نشاط 1 صفحة 40** **1** حساب الأعداد المشتقة : لدينا: $f'(-1)=0$ هو معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 نختار نقطتين من المماس مثلا: $A(-1;2)$ و $B(-2;2)$ ومنه $f'(-1)=\frac{2-2}{-1+2}=\frac{0}{1}=0$ • $g'(-1)=\frac{-1-0}{-1-2}=\frac{1}{3}$ • $f'(2)=\frac{0-2}{2-0}=-1$ • $g'(2)=\frac{2-1}{2-0}=\frac{1}{2}$ • $(f+g)'(-1)=f'(-1)+g'(-1)=\frac{1}{3}$ • $(fg)'(2)=f'(2)g(2)+g'(2)f(2)=-2$ • $\left(\frac{3}{f}\right)'(-1)=-\frac{3f'(-1)}{(f'(-1))^2}$ • $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)=\frac{f'(2)\times g(2)-g'(2)\times f(2)}{(g(2))^2}=-\frac{1}{2}$ **2** من أجل كل x من $[0;2]$ نضع : $h(x)=f(2x-1)$ -حساب $h'(0)$: لدينا: $h'(x)=2f'(2x-1)$ ومنه: $h'(0)=2f'(-1)=0$ و $h'\left(\frac{3}{2}\right)=2f'(2)=-2$	30د
مرحلة البناء	**2 العدد المشتق-الدالة المشتقة** **تعريف** f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$. x_0 و x_0+h عددان حقيقيان من I مع : $h\neq 0$. نقول أنّ f تقبل الإشتقاق عند x_0 إذا قبلت النسبة $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نهاية محدودة لما يؤول h إلى 0. تسمى هذه النهاية : العدد المشتق للدالة f عند x_0 و نرمز لها بـ $f'(x_0)$. نكتب إذن : $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ أو نكتب : $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (بوضع $x=x_0+h$) **ملاحظة:** إذا قبلت الدالة f الإشتقاق عند كل عدد حقيقي x من المجال I فهي تقبل الإشتقاق على I ونرمز لدالتها المشتقة بـ:f'	15د

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

رحلة بناء معرفة

مثـــال

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=x^2+x$

1 برهن أنّ f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

2 عيّن $f'(x)$

15د

✍ ليكن x_0 عدد حقيقي كيفي

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2+x-x_0^2-x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0+1)}{x-x_0}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x+x_0+1)=2x_0+1$

إذن $2x_0+1$ عدد حقيقي ومنه f دالة قابلة للإشتقاق عند x_0

لكن x_0 يمسح $\mathbb{R}$ ومنه f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

✍ لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f

لدينا : $f'(x)=2x+1$

3 التفسير البياني(مماس منحنى دالة)

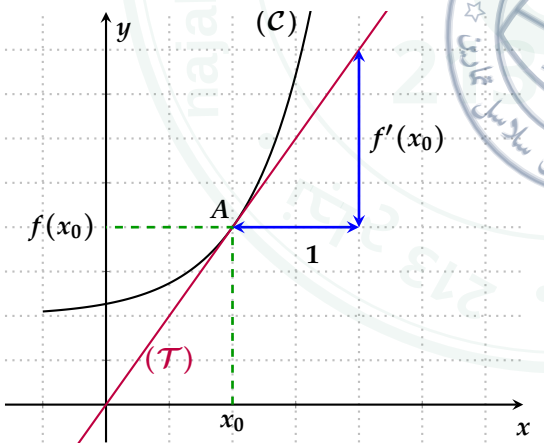
20د

تعريف

f دالة معرفة على مجال D من $\mathbb{R}$. و $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في مستوى منسوب الى معلم $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 من D وَ $f'(x_0)$ العدد المشتق للدالة f عند x_0 فإن المستقيم الذي يشمل النقطة $A\,(x_0,f\,(x_0))$ ومعامل توجيهه $f'(x_0)$ يسمى مماس المنحنى $(\mathcal{C})$ عند النقطة A

. معادلته هي: $y=f'\,(x_0)\,(x-x_0)+f\,(x_0)$.



البـرهـان

المماس $(\mathcal{T})$ هو عبارة عن مستقيم معامل توجيهه $f'(x_0)$.

إذن معادلة $(\mathcal{T})$ من الشكل $y=f'(x_0)\,x+b$ والنقطة $A(x_0;f(x_0))$ تنتمي إلى $(\mathcal{T})$ فإن

$f(x_0)=f'(x_0)\times x_0+b$ ومنه بالتعويض

$b=f(x_0)-f'(x_0)\,x_0$.

وبالتالي $y=f'(x_0)x-f'(x_0)x_0+f(x_0)$

ومنه :

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

5د

مثـــال

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3+2$

معادلة المماس لمنحنى f عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$ هي :

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي $y=5x-2$

التطبيق : حل تمريـ $\{8-7-4\}$ ـــن صفـ $\{58\}$ ـحة

40د

ملاحظات حول سير الدرس

✍ .....

.....

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

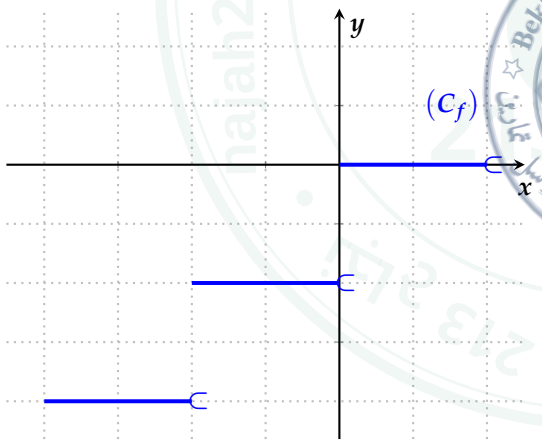
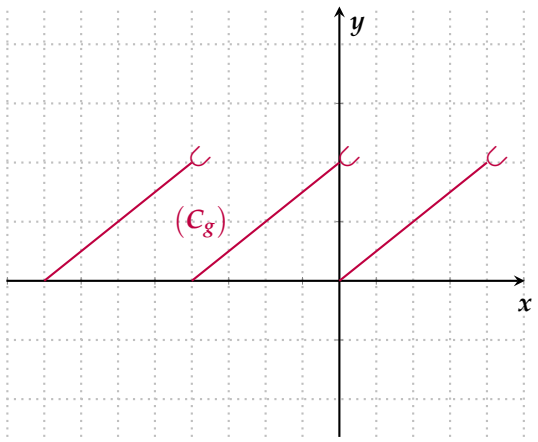
مـــذكـــرة رقـــم 02

الأستاذ :بـــخدة أمـــين

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

- الأستاذ : بخدة أمين
- المستوى : السنة ثالثة رياضيات
- المدة : 1 ساعة
- الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
- ميدان التعلم: التحليل
- موضوع الحصة : الإستمرارية

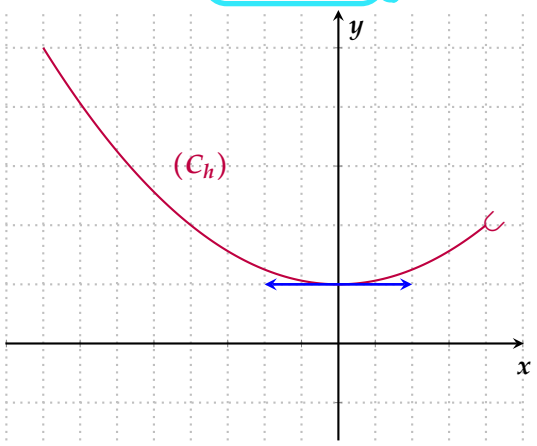
- المكتسبات القبليـة : مفاهيم أولية حول الدوال العددية
- الكفاءات المستهدفة : دراسة السلوك التقاربي للدالة
- المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**التهيئة النفسية** **1 مناقشة شفاهية 3 صفحة 7** **1** حساب $[-2.3]$ ، $E(-1)$ ، $[\sqrt{3}]$ و $E(11,01)$. لدينا: $-3 \leq -2,3 < -2$ ومنه $[-2,3] = -3$ ، $E(-1) = -1$ ، $1 \leq \sqrt{3} < 2$ ومنه $[\sqrt{3}] = 1$ ، $E(11,01) = 11$ **2** نعتبر الدوال f ، g و h المعرفة على المجال $[-2;1[$ كمايلي : $f(x) = [x]$ ، $g(x) = x - [x]$ ، $h(x) = x^2 + 1$ و لتكن (C_f) ، (C_g) و (C_h). تمثيلاتها البيانية على الترتيب  **رسم (C_f)** من أجل $x \in [-2;-1[$: $f(x) = -2$ من أجل $x \in [-1;0[$: $f(x) = -1$ من أجل $x \in [0;1[$: $f(x) = 0$ إذن $f(x) = \begin{cases} -2; x \in [-2;-1[\\ -1; x \in [-1;0[\\ 0; x \in [0;1[\end{cases}$  **رسم (C_g)** من أجل $x \in [-2;-1[$: $g(x) = x + 2$ من أجل $x \in [-1;0[$: $g(x) = x + 1$ من أجل $x \in [0;1[$: $g(x) = x$ إذن $f(x) = \begin{cases} x+2; x \in [-2;-1[\\ x+1; x \in [-1;0[\\ x; x \in [0;1[\end{cases}$	30د

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

رسم (C_h) ❶



✍ هل بإمكانك رسم المنحنيات (C_f) ، (C_g) و (C_h) دون رفع القلم (اليد)

- لايمكن رسم المنحنيين (C_f) و (C_g) دون رفع القلم (اليد)
- بينما يمكن رسم المنحنى (C_h) دون رفع القلم (اليد)

✍ هل تقبل الدوال f ، g و h نهاية عند -1 ؟ عند 0 ؟

- الدالتان f و g لا تقبلان نهاية عند -1 وكذا عند الصفر .
- الدالة h تقبل نهاية عند -1 و عند 0 لأنها معرفة عندهما : $h(-1)=2$ و $h(0)=1$

خلاصة

✍ يمكن رسم المنحنى (C_h) دون رفع القلم (اليد) ، فنقول أن الدالة h مستمرة على المجال $[-2;1]$.

✍ أما f ، g فهما غير مستمرتين على المجال $[-2;1]$

2 الإستمرارية

❶ إستمرارية دالة عند القيمة a

تعريف

f دالة مجموعة تعريفها I و a عدد حقيقي غير معزول من I

✍ القول أن الدالة f مستمرة عند a يعني أن نهاية الدالة f عند a هي $f(a)$

✍ f مستمرة عند a يعني أنّ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

5د

❷ الإستمرار من اليمين

تعريف

f دالة معرفة على المجال $[x_0;a[$ و $a<0$ ، القول أن الدالة f مستمرة عند a من اليمين يعني أنّ: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>} a} f(x)=f(a)$

5د

مثـــال

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-2;4]$ كمايلي : $f(x)=\begin{cases} x^2+x; x\in[-2;1[\\ x-1; x\in[1;4] \end{cases}$

✍ بيّن أنها مستمرة على يمين الـ 1

5د

لدينا : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} x-1=0$ و كذلك $f(1)=1-1=0$ ،إذن الدالة f مستمرة على يمين الـ 1

❸ الإستمرار من اليسار

تعريف

f دالة معرفة على المجال $[x_0;a[$ و $a>0$ ، القول أن الدالة f مستمرة عند a من اليسار يعني أنّ: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<} a} f(x)=f(a)$

5د

مرحلة متابعة

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

مرحبا بكم في مستعارف

مثـــال

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-2;4[$ كمايلي : $f(x)=\begin{cases}x^2+x;x\in[-2;1[\\x-1;x\in[1;4]\end{cases}$

✍ بيّن أنها مستمرة على يسار الـ 1

5د

لدينا : $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} x^2+x=2$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=$ كذلك $f(1)=1+1=2$ ،إذن الدالة f مستمرة على يمين الـ 1

❹ إستمرارية دالة على مجال من مجموعة التعريف

تعريف

✍ f دالة معرفة على مجال I

✍ القول أن f مستمرة على I يعني $f(x)$ مستمرة عند كل عدد a من المجال I

5د

❺ التفسير البياني

الدالة f مستمرة على المجال I من $\mathbb{R}$ يعني يمكن رسم منحناها البياني (C_f) دون رفع القلم (دون رفع اليد)

مـــثال

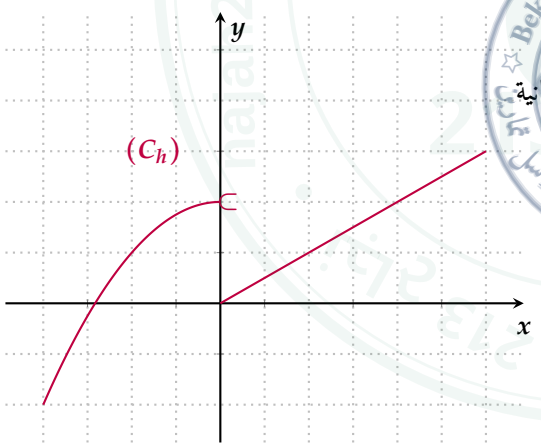
لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[-2;3]$ بـ: $f(x)=\begin{cases}-x^2+2;x\in[-2;0[\\x;x\in[0;3]\end{cases}$.

10د

1 مثل بيانيا الدالة f .هل تقبل الدالة f نهاية عند 0 ؟

2 هل الدالة f مستمرة على المجال : $[-2;3]$ ؟ أذكر مجالا تكون فيه الدالة مستمرة .

الحـل



1 أنظر لدينا من جهة : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=2$ و من جهة ثانية $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=0$ ، إذن الدالة f لاتقبل نهاية عند 0

2 الدالة f غير مستمرة عند 0 و بالتالي فهي غير مستمرة على المجال : $[-2;3]$.

الدالة f مستمرة مثلا على المجال $[0;3]$

ملاحظة :

إذا كانت الدالة f معرفة على المجال $[a;b]$ و مستمرة على $]a,b[$ و على a من اليمين و على b من اليسار نقول أنها مستمرة على $[a;b]$

10د

خواص(تقبل دون برهان):

✍ f مستمرة عند a يعني $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}a} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}a} f(x)=f(a)=\ell$

✍ الدوال المرجعية مستمرة على مجال تعريفها

✍ مجموع و جداء دوال مستمرة عند a هي دالة مستمرة عند a .

✍ الدوال كثيرات الحدود و الدوال $\cos$ ، $\sin$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

✍ الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

تطبيق : لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1;x\leq 2\\x^2+x-5;x>2\end{cases}$

10د

✍ أدرس إستمرارية الدالة f عند 2

✍ هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟ لماذا؟

الحل

1 ✍ لدينا : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}(x^2-2x+1)=1$ و $f(2)=1$ ، إذن الدالة مستمرة على يمين 2

✍ لدينا : $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2}f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2}(x^2+x-5)=1$ و $f(2)=1$ ، إذن الدالة مستمرة على يسار 2

ومنه الدالة f مستمرة عند الـ 2

2 ✍ لدينا : $x\mapsto x^2-2x+1$ دالة كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على المجال $]-\infty;2]$

✍ $x\mapsto x^2+x-5$ دالة كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على المجال $]2;+\infty[$

ولدينا حسب سؤال 1 f مستمرة عند 2 ومنه الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

تطبيق :

15د

1 بيّن أنّ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x^2-2x)\sin x$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

2 بيّن أنّ الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ: $g(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}$ مستمرة على $]1;+\infty[$

الحل

1 ✍ لدينا: $x\mapsto x^2-2x$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرة حدود

✍ لدينا: $x\mapsto \sin x$ مستمرة على $\mathbb{R}$

الدالة f جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ ،إذن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

2 الدالة g دالة ناطقة فهي مستمرة على مجموعة تعريفها ومنه g مستمرة على $]1;+\infty[$

تمرين منزلي : تمرين 49-45 صفحة 29

حل تمرين 45 صفحة 29

1 **دراسة إستمرارية الدالة f عندالعدد 1**

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$ ولدينا : $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

ومنه $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x^2+x+1)=3$ ،إذن $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$ ومنه الدالة f مستمرة عند العدد 1

2 لدينا: $x\mapsto\dfrac{x^3-1}{x-1}$ دالة ناطقة فهي معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ ومنه f مستمرة على $\mathbb{R}-\{1\}$

و مما سبق f مستمرة عند العدد 1 إذن فهي مستمرة على $\mathbb{R}$

ملاحظات حول سير الدرس

✍ .....

.....

.....

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

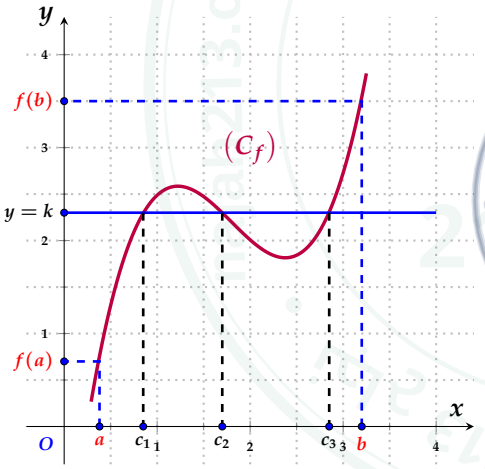
مـــذكـــرة رقـــم 03

الأستاذ :بـــخدة أمـــين

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

- الأستاذ : بخدة أمين
- المستوى : السنة ثالثة رياضيات
- المدة : 2 ساعة
- الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
- ميدان التعلم: التحليل
- موضوع الحصة : مبرهنة القيم المتوسطة

- المكتسبات القبليـة : إستمرارية دالة على مجال ،رتابة دالة
- الكفاءات المستهدفة : تبيان وجود حل للمعادلة $f(x)=k$
- المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**التهيئة النفسية**	
مرحلة بناء المعارف	**❶ مبرهنة القيم المتوسطة (تقبل دون برهان)** **مبرهنـة** (أضف إلى معلوماتك) ✍ إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ وكان العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلاّ على الأقل في المجال $]a;b[$	5د
	❷ التفسير البياني ✍ المستقيم ذو المعادلة $y=k$ يقطع على الأقل مرة واحدة منحنى الدالة f في نقطة فاصلتها محصورة بين a و b ✍ بالنسبة للشكل المقابل المستقيم ذو المعادلة $y=k$ يقطع منحنى الدالة f في ثلاث نقط فواصلها c_1 ، c_2 و c_3. **حالة خاصة** : إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ و كان $f(a)\times f(b)<0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=0$  	10د
	❸ المعادلة $f(x)=k$ ✍ إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا c محصور بين a و b	5د
	ملاحظة : مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x)=k$ أما تعيّين الحلول او قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة . **مـــثال** برهن بإستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أنّ المعادلة $x^5+3x^4-6x^2=1$ تقبل على الأقل حلاّ في المجال $[1;2]$ **طريقة** • نكتب المعادلة على الشكل $f(x)=k$ • نتحقق من إستمرارية الدالة f على المجال $[a;b]$ • نتحقق من أن العدد k محصور بيّن $f(a)$ و $f(b)$	15د

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الحـل : لتكن f الدالة المعرفة على $[1;2]$ بـ: $f(x)=x^5+3x^2-6x^2$

• f دالة كثيرة حدود فهي مستمرة على المجال $[1;2]$ و لدينا : $f(1)=-2$ و $f(2)=56$

ولدينا : $-2<1<56$ أي $f(1)<1<f(2)$ ،إذن المعادلة $f(x)=1$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[1;2]$

طريقة 2

المعادلة السابقة تكافئ : $x^5+3x^2-6x^2-1=0$ ، نضع $f(x)=x^5+3x^2-6x^2-1$

f مستمرة على المجال $[1;2]$ و $f(1)=-2$ ، $f(2)=56$ ومنه $f(1)\times f(2)<0$

ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاّ في المجال $[1;2]$

تطبيق

15د

لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث : $f(x)=3x^3-2x-\frac{1}{4}$

1 أحسب : $f(-1)$ ، $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، $f(0)$ ، $f(1)$

2 إستنتج أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاث حلول في المجال $]-1,1[$

الحـل

1 حساب الصور : $f(-1)=-\frac{5}{4}$ ، $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$ ، $f(0)=-\frac{1}{4}$ ، $f(1)=\frac{1}{4}$

2 إستنتاج أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاث حلول في المجال $]-1,1[$

لدينا: f دالة كثيرة حدود ، فهي معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ ، و بالتالي فهي مستمرة على المجال $[-1;1]$

✍ لدينا f مستمرة على المجال $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ و أنّ: $f(-1)\times f\left(-\frac{1}{2}\right)<0$ أي 0 محصور

بين $f(-1)$ و $f\left(-\frac{1}{2}\right)$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاّ في المجال (1) $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$

✍ لدينا f مستمرة على المجال $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ و أنّ: $f\left(-\frac{1}{2}\right)\times f(0)<0$ أي 0 محصور بين $f(0)$ و $f\left(-\frac{1}{2}\right)$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاّ في المجال (2) $\left]-\frac{1}{2};0\right[$

✍ لدينا f مستمرة على المجال $[0;0]$ و أنّ: $f(1)\times f(0)<0$ أي 0 محصور بين $f(0)$ و $f(1)$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاّ في المجال (3) $]0;1[$

النتيجة: من (1) و (2) و (3) فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاث حلول في المجال $]-1;1[$

❹ الدوال المستمرة و الرتيبة تماما على المجال $[a;b]$

مبرهنـة

✍ إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a,b]$ وكان العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلاّ وحيدا في المجال $]a;b[$

أضف إلى معلـوماتك

5د

البـرهـان

نفرض أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a;b]$

و ليكن k عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.

لنفرض أنه يوجد عدد حقيقي أخر c' مختلف عن c محصور بين a و b و يحقق $f(c')=k$

يكون حينئذ $c\neq c'$ و $f(c)=f(c')$ و هذا يناقض الرتابة التامة للدالة f على $[a,b]$.

و بالتالي يوجد عدد حقيقي وحيد c من $[a;b]$ بحيث $f(c)=k$ ■

رحلة بين ضفاف

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

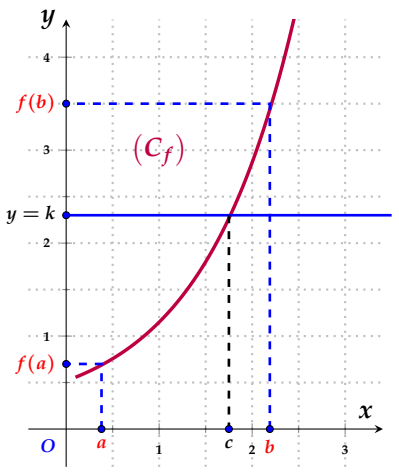
najah213.com · نجاح 213

مرحلة بناء مستعارف

التفسير البياني

✍ المستقيم ذو المعادلة $y = k$ يقطع مرة واحدة منحنى الدالة f في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b .

✍ إذا كان $k = 0$ منحنى الدالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها حل للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $]a;b[$.



5د

تطبيق ❶

لتكن f دالة عدد ية معرفة على $\mathbb{R}$ حيث جدول تغيراتها كمايلي :

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	5	↘	-3	↗	8

15د

✍ عيّن عدد حلول المعادلات التالية محددا المجال الذي ينتمي إليه كل حل $f(x) = 0$ ، $f(x) = -2$ ، $f(x) = 9$

تطبيق ❷

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x^3 - 2x + 5$

1 أحسب $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2 برهن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاّ وحيدا α في المجال $[1;2]$

3 إستنتج إشارة $f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x.

15د

❺ إيجاد حصر لحل معادلة بالتنصيف

◄ للحصول على حصر أدق للعدد α نتبع طريقة التصنيف التالية :

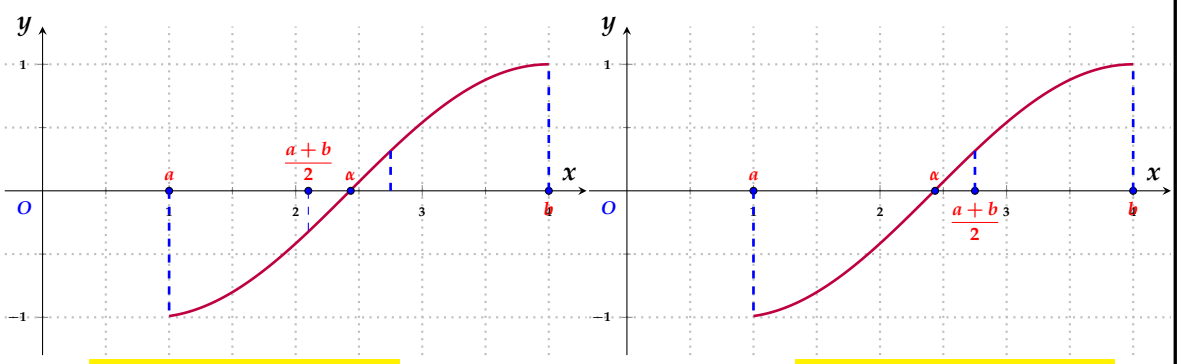
- نحسب كل من $m = \dfrac{a+b}{2}$ (مركز المجال $[a;b]$) و $f(m)$
- نقارن بين $f(a)$ و $f(m)$ و نميز حالتين :

◄ إذا كان $f(a) \times f(m) < 0$ فإن الحل α موجود في المجال $]a;m[$

◄ إذا كان $f(a) \times f(m) > 0$ فإن الحل α موجود في المجال $]m;b[$

- نواصل بنفس الطريقة من خلال تعويض : a أو b بـ m و ذلك إلى غاية الحصول على الحصر المرغوب فيه .

10د



الحالة الأولى $\alpha \in \left]a; \dfrac{a+b}{2}\right[$

الحالة الثانية $\alpha \in \left]\dfrac{a+b}{2}; b\right[$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

تطبيق ❸

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1 أدرس إتجاه تغير الدالة f .

2 برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α في المجال $]1,1;2,3[$.

3 بإستعمال طريقة التنصيف عيّن حصرا للعدد α سعته (طوله) $0,15$

4 أثبت أن: $\alpha^3-2\alpha^2+\alpha-1=0$

x	$f(x)$
$1,1$	$8,95$
$1,7$	$0,12$
$1,85$	$-0,18$
2	$-0,41$
$-0,75$	$-0,75$

20د

الحل

1 دراسة إتجاه تغير الدالة f

الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $]1;+\infty[$ حيث : $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

بماأن $-\dfrac{1}{(x-1)^2}<0$ و $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}<0$ فإن $f'(x)<0$ و بالتالي f دالة متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

2 لنبرهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α في المجال $[1,1;2,3]$

✍ f دالة مستمرة على المجال $]1;+\infty[$ فهي مستمرة على المجال $[1,1;2,3]$.

✍ $f(1,1)\approx 8,95$ و $f(2,3)\approx -0,75$ ومنه $f(1,1)\times f(2,3)<0$.

✍ f دالة متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ فهي متناقصة تماما على المجال $[1,1;2,3]$.

إذن حسبة مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α حيث : $\alpha\in]1,1;2,3[$.

3 تعيين حصرا للعدد α سعته $0,15$

✍ مركز المجال $]1,1;2,3[$ هو $m=\dfrac{1,1+2,3}{2}=1,7$ و $f(1,7)\approx 0,12$ ومنه $f(1,7)\times f(2,3)<0$

إذن : $\alpha\in]1,7;2,3[$

✍ مركز المجال $]1,7;2,3[$ هو $m=\dfrac{1,7,1+2,3}{2}=2$ و $f(2)\approx -0,41$ ومنه $f(1,7)\times f(2)<0$

إذن : $\alpha\in]1,7;2[$

✍ مركز المجال $]1,7;2[$ هو $m=\dfrac{1,7,1+2}{2}=1,85$ و $f(1,85)\approx -0,18$ ومنه $f(1,7)\times f(1,85)<0$

إذن : $\alpha\in]1,7;1,85[$

لاحظ أنّ طول المجال الأخير هو $1,85-1,7=0,15$ إذن نتوقف عن تنصيف المجال .

4 إثبات أنّ $\alpha^3-2\alpha^2+\alpha-1=0$

لدينا α حل للمعادلة $f(x)=0$ معناه $f(\alpha)=0$ تكافئ: $\dfrac{1}{\alpha-1}-\sqrt{\alpha}=0$ تكافئ: $\dfrac{1}{\alpha-1}=\sqrt{\alpha}$

بالتربيع الطرفين نجد: $\dfrac{1}{(\alpha-1)^2}=\sqrt{\alpha^2}$ تكافئ: $\alpha(\alpha-1)^2=1$ تكافئ : $\alpha(\alpha^2-2\alpha+1)=1$ تكافئ:

$\alpha^3-2\alpha^2+\alpha=1$

إذن : $\alpha^3-2\alpha^2+\alpha-1=0$

ملاحظات حول سير الدرس

✍ .....

.....

.....

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

مـــذكـــرة رقـــم 04

الأستاذ :بـــخدة أمـــين

ثانوية ساجي مختار السمار–غليزان

- الأستاذ : بخدة أمين
- المستوى : السنة ثالثة رياضيات
- المدة : 2 ساعة
- الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
- ميدان التعلم: التحليل
- موضوع الحصة : قابلية الإشتقاق دالة عند عدد

- المكتسبات القبلية : حساب مشتقة دالة ، تعيين معادلة مماس عند نقطة
- الكفاءات المستهدفة : قابلية إشتقاق دالة عندد عدد من اليمين و من اليسار و تفسير الهندسي
- المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**I قابلية إشتقاق الدالة عند عدد**	20د

❶ قابلية الإشتقاق على اليمين

تعريف

f دالة معرفة على الأقل ، على مجال من الشكل ، $[x_0;x_0+\alpha[$ حيث : x_0 و α عددان حقيقيان مع $\alpha>0$

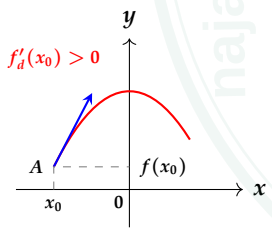
✍ نقول عن الدالة f أنها تقبل الإشتقاق عند x_0 من اليمين إذا و فقط إذا كانت $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell_1$

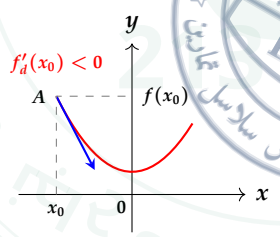
حيث ℓ_1 عدد حقيقي و يسمى العدد المشتق للدالة f عند x_0 من اليمين

❖ **التفسير البياني**

✍ إذا قبلت الدالة الإشتقاق في x_0 من اليمين فإن تمثيلها البياني يقبل نصف المماس من اليمين و هو معرف كمايلي:

من أجل $x \geq x_0$: $y=\ell_1(x-x_0)+f(x_0)$





مـــــثال

الدالة المعرفة بـ $f(x)=x\sqrt{x}$ قابلة للإشتقاق في 0 من اليمين لأنها معرفة على $[0;+\infty[$

ولدينا $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{x}=0$ $=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{x\sqrt{x}}{x}$ $=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{x\sqrt{x}-0\sqrt{0}}{x-0}$

❷ قابلية الإشتقاق على اليسار

مرحلة الإستكشاف — 20د

تعريف

f دالة معرفة على الأقل ، على مجال من الشكل ، $[x_0-\alpha;x_0[$ حيث : x_0 و α عددان حقيقيان مع $\alpha>0$

✍ نقول عن الدالة f أنها تقبل الإشتقاق عند x_0 من اليسار إذا و فقط إذا كانت $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell_2$

حيث ℓ_2 عدد حقيقي و يسمى العدد المشتق للدالة f عند x_0 من اليسار

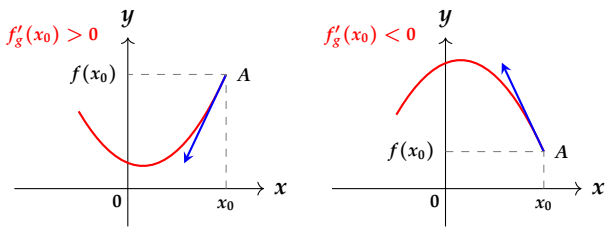
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

❖ **التفسير البياني**

✍ إذا قبلت الدالة الإشتقاق في x_0 من اليسار فإن تمثيلها البياني يقبل نصف المماس من اليمين و هو معرف كمايلي:

من أجل $x \leq x_0$: $y = \ell_2(x - x_0) + f(x_0)$



مـــــثال

✍ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = |x^2 - 9|$

- ندرس قابلية الإشتقاق للدالة f من اليسار العدد 3

لدينا: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & ;x \in]-\infty;-3] \cup [3;+\infty[\\ -(x^2 - 9) & ;x \in [-3:3] \end{cases}$

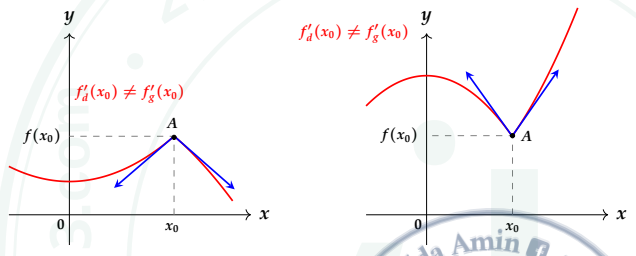
$$\lim_{x \leftarrow 3} \frac{-(x^2-9)}{x-3} = \lim_{x \leftarrow 3} -(x+3) = -6$$

إذن الدالة تقبل الإشتقاق على يسار 3 و هي تقبل نصف مماس على اليسار معادلته $y_g = -6(x-3) + f(3)$

20د

❸ **نقطة زاوية**

إذا كان $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن النقطة ذات الفاصلة x_0 تدعى نقطة زاوية



مـــــثال

✍ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = |x^2 - 9|$

- ندرس قابلية الإشتقاق للدالة f عند العدد 3

لدينا: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & ;x \in]-\infty;-3] \cup [3;+\infty[\\ -(x^2 - 9) & ;x \in [-3:3] \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \leftarrow 3} \frac{-(x^2-9)}{x-3} = \lim\limits_{x \leftarrow 3} -(x+3) = -6$

إذن الدالة f تقبل الإشتقاق على يسار 3 و عددها المشتق هو -6

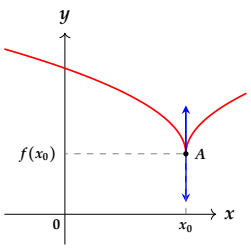
- $\lim\limits_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2-9)}{x-3} = \lim\limits_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$

إذن الدالة f تقبل الإشتقاق على يمين 3 و عددها المشتق هو 6

بما أن العدد المشتق على اليمين يختلف عن اليسار فالدالة لا تقبل الإشتقاق عند 2 و تقبل نقطة زاوية

❹ **مماس موازي لمحور التراتيب**

إذا كانت : $\lim\limits_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = +\infty$ فإن التمثيل البياني (C_f) للدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة x_0 مماسا يوازي حامل محور التراتيب .



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

مرحلة التقويم

20د

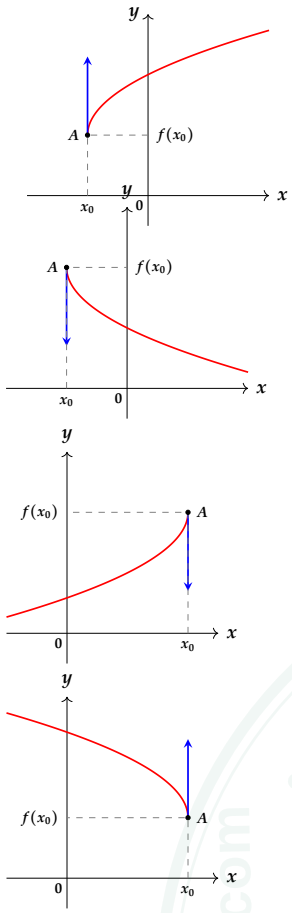
حالات خاصة

✍ إذا كان $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ فإن f غير قابلة للإشتقاق عند يمين x_0 ونقول أن (C_f) يقبل عند يمين النقطة $A\,(x_0; f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x = x_0$.

✍ إذا كان $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ فإن f غير قابلة للإشتقاق عند يمين x_0 ونقول أن (C_f) يقبل عند يمين النقطة $A\,(x_0; f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x = x_0$.

✍ إذا كان $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ فإن f غير قابلة للإشتقاق عند يسار x_0 ونقول أن (C_f) يقبل عند يسار النقطة $A\,(x_0; f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x = x_0$.

✍ إذا كان $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ فإن f غير قابلة للإشتقاق عند يسار x_0 ونقول أن (C_f) يقبل عند يسار النقطة $A\,(x_0; f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x = x_0$.



مـــثال

التقويم

الدالة المعرفة بـ: $f(x) = \sqrt{x}$ غير قابلة للإشتقاق في 0 من اليمين لأن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

إذن الدالة f غير قابلة لإشتقاق عند 0 و (C_f) يقبل نصف مماس عمودي على حامل محور التراتيب معادلته نحوا الأعلى $x = 0$

2 الإشتقاقية و الإستمرارية

20د

مبرهنة: إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند عدد x_0 فإنها مستمرة عند x_0

ملاحظة: عكس هذه المبرهنة ليس دوما صحيح

مـــثال

الدالة $f : x \mapsto |x|$ مستمرة عند 0 و لكن غير قابلة للإشتقاق عند 0

لأن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{x-0}{x} = 1$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{-x-0}{x} = -1$

ومنه المشتق من اليمين لا يساوي المشتق من اليسار $(f'_d \neq f'g)$

إذن f لا تقبل الإشتقاق عند 0

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

20د

تطبيق : أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند x_0 في كل حالة ثم فسر النتيجة بيانيا .

❶ $f(x)=-x^2+2\ ;\ x_0=1$ ❷ $f(x)=\sqrt{x-4}\ ;\ x_0=4$ ❸ $f(x)=x|x-3|\ ;\ x_0=3$

❹ $f(x)=\dfrac{|x|x^2}{x+2}\ ;\ x_0=0$

حل التطبيق:

❶ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x^2+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x-1)(x-1)}{x-1}$

ومنه $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}-(x+1)=-2$

نتيجة

: الدالة f تقبل الإشتقاق عند $x_0=1$ و $f'(1)=-2$

❷ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}4}\left(\dfrac{\sqrt{x-4}}{x-4}\right)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}4}\dfrac{\sqrt{x-4}\times\sqrt{x-4}}{(x-4)\sqrt{x-4}}$

ومنه $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}4}\dfrac{(x-4)}{(x-4)\sqrt{x-4}}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}4}\dfrac{1}{\sqrt{x-4}}=+\infty$

نتيجة

: الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند $x_0=4$

❸ كتابة $f(x)$ دون رمز قيمة المطلقة : $f(x)=\begin{cases}-x(x-3) & ;x<3\\ x(x-3) & ;x>3\end{cases}$

دراسة قابلية إشتقاق الدالة f عند $x_0=3$:

✍ أولا دراسة قابلية إشتقاق الدالة f على يمين x_0 .

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}\dfrac{x(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}x=3$

✍ ثانيا دراسة قابلية إشتقاق الدالة f على يسار x_0 .

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}\dfrac{-x(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}-x=-3$

نتيجة

إذن النسبة $\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$ ليس لها نهاية عندما x يؤول إلى 3 ومنه f غير قابلة للإشتقاق عند العدد 3

❹ كتابة $f(x)$ دون رمز قيمة المطلقة : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x+2} & ;\ x\in x\in[0;+\infty[\\ \dfrac{-x^3}{x+2} & ;\ x\in x\in]-\infty;-2[\cup]-2;0[\end{cases}$

دراسة قابلية إشتقاق الدالة f عند $x_0=0$:

✍ أولا دراسة قابلية إشتقاق الدالة f على يمين x_0 .

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{\frac{x^3}{x+2}-0}{x}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{x^2}{x+2}=\dfrac{0}{2}=0$

بما أن النهاية عدد ثابت فإن f قابلة للأشتقاق على يمين $x_0=0$.

✍ ثانيا دراسة قابلية إشتقاق الدالة f على يسار x_0 .

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{\frac{-x^3}{x+2}-0}{x}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{-x^2}{x+2}=\dfrac{0}{2}=0$

بما أن النهاية عدد ثابت فإن f قابلة للأشتقاق على يسار $x_0=0$.

نتيجة

: بما أن f قابلة للأشتقاق على يمين و يسار $x_0=0$ ولهما نفس النهاية فإن f دالة قابلة للإشتقاق عند $x_0=0$

ملاحظات حول سير الدرس

✍ .....

.....

.....

مرحلة التقويم

التقويم

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

مـــذكـــرة رقـــم 05

الأستاذ :بـــخدة أمـــين

ثانوية ساجي مختار السمار–غليزان

- الأستاذ : بخدة أمين
- المستوى : السنة ثالثة رياضيات
- المدة : 1 ساعة
- الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
- ميدان التعلم: التحليل
- موضوع الحصة : حساب مشتقة دالة

- المكتسبات القبليـة : حساب مشتقة دالة ، تعيين معادلة مماس عند نقطة
- الكفاءات المستهدفة : حساب مشتقات الدوال المألوفة
- المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	التهيئة النفسية	
مرحلة بناء المعارف	**المشتقات و العمليات** ❶ مشتقات دوال مألوفة (تقديم أمثلة)	10د
	❷ المشتقات و العمليات على الدوال النتائج ملخصة في الجدول التالي :	10د

الدالة f	مجالات قابلية الإشتقاق	الدالة المشتقة f'
$x \longmapsto a$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 0$
$x \longmapsto ax+b$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto a$
$x \longmapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 2x$
$x \longmapsto x^n\ (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto nx^{n-1}$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$	$x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \longmapsto \frac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N})$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$	$x \longmapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \longmapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto \cos x$
$x \longmapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto -\sin x$

الدالة f	مجالات قابلية الإشتقاق	الدالة المشتقة f'
$u+v$	u و v قابلتان الإشتقاق على I	$u'+v'$
$u.v$	u و v قابلتان الإشتقاق على I	$u'.v+u.v'$
$\lambda u\ (\lambda \in \mathbb{R})$	u قابلة للإشتقاق على I	$\lambda u'$
$\frac{1}{u}$	u قابلة للإشتقاق على I ومن أجل كل x من I : $u(x) \neq 0$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	u و v قابلتان الإشتقاق على I و من أجل كل x من I : $v(x) \neq 0$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

مرحلة ثانوية

نتائج :

✍ الدوال كثيرات الحدود قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$
✍ الدوال الناطقة قابلة للإشتقاق على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها

5د

أمثلة

✍ لنعين مشتقة الدوال التالية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

❶ $f(x)=x^4-2x^3+4x^2-8$ ❷ $f(x)=(x-2)\sqrt{x}$ ❸ $f(x)=\dfrac{x^2+3}{2x}$

5د

الحل

❶ $f'(x)=4x^3-6x^2+8x$ ❷ $f'(x)=\dfrac{2x-2}{\sqrt{x}}$ ❸ $f'(x)=\dfrac{2x^2-6}{4x^2}$

مبرهنة

✍ a و b عددان حقيقيان مع $a\neq 0$ ، u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$
ليكن J المجال المكون من الأعداد الحقيقية x حيث : $ax+b$ ينتمي إلى I .
✍ الدالة $f:x\mapsto u(ax+b)$ قابلة للإشتقاق على J ولدينا : $f'(x)=au'(ax+b)$

5د

أمثلة

✍ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\sin(ax+b)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=a\cos(ax+b)$
✍ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\cos(ax+b)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=-a\sin(ax+b)$
✍ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $(ax+b)^n$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=na(ax+b)^{n-1}$

5د

تطبيق : لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+1}$

1 عين مشتقة الدالة f

2 لتكن g و h الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=f(-x)$ و $h(x)=g(3x-1)$
✍ عين $g'(x)$ و $h'(x)$ دون تعين $g(x)$ و $h(x)$

10د

الحل

1 الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث

$$f'(x)=\frac{(2x-1)'(x^2+1)-(x^2+1)'(2x-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2+2-4x^2+2}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$$

2 ✍ الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g' حيث : $g'(x)=-f'(-x)=\dfrac{2x^2+2x-2}{(x^2+1)^2}$

✍ الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة h' حيث :

$$h'(x)=3g'(3x-1)=\frac{2(3x-1)^2+2(3x-1)-2}{((3x-1)^2+1)^2}=\frac{18x^2+4x-2}{(9x^2-6x+2)^2}$$

تطبيق منزلي : حل تمرين $\{13-17-24\}$ من صفحة $\{59-60\}$

التقويم

ملاحظات حول سير الدرس

✍ .....
.....
.....

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

مـــذكـــرة رقـــم 06

الأستاذ :بـــخدة أمـــين

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

- الأستاذ : بخدة أمين
- المستوى : السنة ثالثة رياضيات
- المدة : 1 ساعة و نصف
- الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
- ميدان التعلم: التحليل
- موضوع الحصة : حساب مشتق الدالة مركب

- المكتسبات القبليـة : حساب مشتقة دوال المألوفة
- الكفاءات المستهدفة : حساب مشتق :الدالة مركب ، $\sqrt{u(x)}$ ، $\frac{1}{u(x)^n}$ ، $u(x)^n$
- المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

التهيئة النفسية

التذكير بتفكيك دالة و تركيب دالة و مشتقات الدوال $x \mapsto f(ax+b)$

1 نشاط ممثل

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=x+3$.

1 عيّن عبارة الدالة $(f\circ g)(x)$.

2 أحسب $f'(x)$ ، $g'(x)$ و $(f\circ g)'(x)$.

3 قارن بين $(f\circ g)'(x)$ و $g'(x)f'(g(x))$

مناقشة النشاط

✍ لدينا : $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+3)$.
إذن $(f\circ g)(x)=(x+3)^2-1=x^2-6x+8$.

✍ لدينا: $f'(x)=2x$ و $g'(x)=1$ و $(f\circ g)'(x)=2x+6$.

✍ **المقارنة بين** $(f\circ g)'(x)$ و $g'(x)f'(g(x))$

لدينا: $g'(x)f'(g(x))=1f'(x+3)=1[2(x+3)]=2x+6$
ومنه : $(f\circ g)'(x)=g'(x)f'(g(x))$

مشتق الدالة مركب

مبرهنـة

✍ إذا قبلت الدالة u الإشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ ، و إذا قبلت الدالة v الإشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v\circ u$ قابلة للإشتقاق على I ، و لدينا من أجل كل x من I $[v\,(u(x))]'=u'(x)v'\,(u(x))$

أضف إلى معلـوماتك

مـــــثال

لتكن الدالة العددية f المعرفةعلى $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

✍ نضع : $u(x)=x^2+1$ و $v(x)=\sqrt{x}$.

ومنه : $f(x)=(v\circ u)(x)$ و $[v\,(u(x))]'=u'(x)v'\,(u(x))$. لدينا: $u'(x)=2x$ و $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

. إذن $f'(x)=2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$

مرحلة الإستثمار

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

2 المشتقات المتتابعة

تعريف

f دالة قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ ، f' دالتها المشتقة على هذا المجال.

✍ إذا كانت f' قابلة للإشتقاق على مجال I فإن دالتها المشتقة $(f')'$ تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f و يرمز لها بالرمز f'' أو $f^{(2)}$.

وهكذا إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق n مرة فإن دالتها المشتقة النونية يرمز لها بالرمز $f^{(n)}$.

مثـــال

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^4-2x^3+x-1$

لدينا: $f'(x)=4x^3-6x+1$ ، $f''(x)=12x^2-6$ ، $f^{(3)}(x)=24x$ و $f^{(4)}(x)=24$

ملاحظة: f دالة ، n عدد طبيعي غير معدوم .

✍ f^n هي الدالة f قوى العدد n

✍ $f^{(n)}$ هي مشتقة ذات الرتبة n (المشتقة النونية)

تطبيق : لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=\cos x$

1. عيّن الدوال المشتقة المتتابعة f' ، f'' ، f''' ، $f^{(4)}$ و $f^{(5)}$.
2. نمن حسب قيم العدد الطبيعي n عبارة $f^{(n)}(x)$ المشتقة ذات المرتبة n.

الحل

❶ **تعيين الدوال المشتقة المتتابعة**

من أجل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x)=-\sin(x)$ ، $f''(x)=-\cos(x)$ ، $f'''(x)=sin(x)$ ، $f^{(4)}=\cos(x)$

$f^{(5)}=-\sin(x)$

❷ **تخمين حسب قيم العدد الطبيعي n عبارة $f^{(n)}(x)$**

✍ من أجل $n=2k+1$ نجد : $f^{(2k+1)}(x)=(-1)^{k+1}\sin(x)$ حيث $k\in\mathbb{N}$

✍ من أجل $n=2k$ نجد : $f^{(2k+2)}(x)=(-1)^{k+1}\cos(x)$ حيث $k\in\mathbb{N}$

3 المتصـــلات

مشتقة الدالة $x\mapsto\sqrt{u(x)}$

مبرهنـــة

✍ إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ و كانت u موجبة تماما على I فإن الدالة $\sqrt{u}$ قابلة للإشتقاق على I ، ولدينا من أجل كل x من I $\left(\sqrt{u(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

أضف إلى معلـوماتك

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

البـرهـان

نضع $f(x)=\sqrt{u(x)}$ و $v(x)=\sqrt{x}$ ومنه $f(x)=v\circ u$

لدينا u قابلة للإشتقاق على I من $\mathbb{R}$ وموجبة أي $u(x)>0$ أي $u(x)\in]0;+\infty[$

إذن f قابلة للإشتقاق على I و دالتها المشتقة f' حيث : $f'(x)=u'(x)\times v'(u(x))$ لكن $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ومنه $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

■

مـــثال

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$

✍ لدينا: $f'(x)=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+5}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

مشتقة الدالة $x\mapsto (u(x))^n$

مبرهنـة

أضف إلى معلـوماتك

✍ n عدد طبيعي غير معدوم و يختلف عن 1 ، إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على I من $\mathbb{R}$ فإن الدالة u^n قابلة للإشتقاق على I ولدينا : من أجل كل x من I $(u(x)^n)'=nu'(x)\,(u(x))^{n-1}$

البـرهـان

نضع $f(x)=(u(x))^n$ و $v(x)=x^n$ ومنه $f(x)=v\circ u$

الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$

الدالة v قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ $(u(x)\in\mathbb{R}$ محققة دوما$)$

إذن f قابلة للإشتقاق على I

من أجل كل x من I $f'(x)=((v\circ u)(x))'=u'(x)v'(u(x))$ لكن $v'(x)=nx^{n-1}$

ومنه $v'(u(x))=n(u(x))^{n-1}$ ومنه $f'(x)=nu'(x)u(x)^{n-1}$

■

مـــثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x^4+2x)^6$.

لدينا : $f'(x)=6(4x^3+2)(x^4+2x)^5$ أي : $f'(x)=(24x^2+12)(x^4+2x)^5$

مشتقة الدالة $x\mapsto \dfrac{1}{(u(x))^n}$

مبرهنـة

أضف إلى معلـوماتك

✍ n عدد طبيعي غير معدوم ، إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ و كانت u لا تتعدم على I فإن الدالة $\dfrac{1}{u^n}$ قابلة للإشتقاق على I ولدينا: من أجل كل x من I $\left(\dfrac{1}{u(x)^n}\right)'=-\dfrac{nu'(x)}{(u(x))^{n+1}}$

مرحبا بك إلى موقعنا نجاح 213

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

مرحلة بناء المتعلمات

البـرهـان

نضع : $f(x)=\dfrac{1}{(u(x))^n}$

لدينا : $f=v\circ u$ حيث : $v(x)=\dfrac{1}{x}$

الدالة u قابلة للإشتقاق على I ومنه $x\mapsto (u(x))^n$ قابلة للإشتقاق على I ولا تنعدم على I ومنه حسب مبرهنة مشتقة مقلوب قابلة للإشتقاق

$\dfrac{1}{(u(x))^n}$ قابلة للإشتقاق على I أي f قابلة للإشتقاق على I و دالتها المشتقة f' حيث

$$\begin{aligned}f'(x)&=u'(x)v'(u(x))\\&=-\frac{(u(x)^n)'}{(u(x)^n)^2}\\&=-\frac{nu'(x)u(x)^{n-1}}{(u(x))^{2n}}\\&=-\frac{nu'(x)}{u(x)^{2n}u(x)^{-n+1}}\\&=-\frac{nu'(x)}{u(x)^{2n-n+1}}\\&=-\frac{nu'(x)}{(u(x))^{n+1}}\end{aligned}$$

ومنه $f'(x)=-\dfrac{nu'(x)}{(u(x))^{n+1}}$ ■

مـــثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+3)^3}$

لدينا : $f'(x)=-\dfrac{6x}{(x^2+3)^4}$

تطبيق

✍ حل التمرين 78 صفحة 66

✍ حل التمرين 40 صفحة 61

التقويم

ملاحظات حول سير الدرس

✍ .....

.....

.....

najah213.com · نجاح 213 · najah213.com · نجاح 213 · najah213.com · نجاح 213 ·

najah213.com · نجاح 213

مـــذكـــرة رقـــم 07

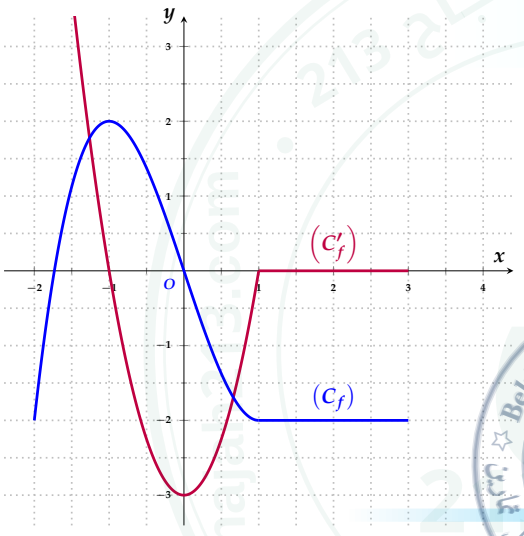
الأستاذ :بـــخدة أمـــين

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

- الأستاذ : بخدة أمين
- المستوى : السنة ثالثة رياضيات
- المدة : 1 ساعة
- الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
- ميدان التعلم: التحليل
- موضوع الحصة : تطبيقات الإشتقاقية

- المكتسبات القبليـة : حساب مشتقة دوال المألوفة
- الكفاءات المستهدفة : إتجاه تغير دالة بإستعمال الدالة المشتقة
- المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	التهيئة النفسية	
مرحلة بناء المعارف	**1 نشاط مقترح** في الشكل المقابل (C_f) و (C'_f) منحنى الدالة f ودالتها المشتقة f' **1** أتمم الجدول التالي :	20د
	2 ذكر بالخاصية التي تربط إشارة $f'(x)$ بتغيرات الدالة f	
	2 إتجاه تغير دالة	
	❶ المشتقة و إتجاه التغير	5د
	مبرهنة أضف إلى معلـوماتك ✍ f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ ✍ إذا كان من أجل كل x من D_f ، $f'(x) > 0$ موجبة تماما على المجال D_f فإن الدالة f متزايدة تماما على D_f . ✍ إذا كان من أجل كل x من D_f ، $f'(x) < 0$ موجبة تماما على المجال D_f فإن الدالة f متناقصة تماما على D_f . ✍ إذا كان من أجل كل x من D_f ، $f'(x) = 0$ موجبة تماما على المجال D_f فإن الدالة f ثابتة على D_f .	
	مثال تطبيقي : الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)(x^2-4)^2$ ✍ أدرس إتجاه تغير الدالة f	10د
	الحل f دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث $f'(x) = 2(2x)(x^2-4)$	



المجال	إشارة $f'(x)$	تغيرات الدالة f
$I = [-2;-1]$		
$J = [-1;1]$		
$k = [-1;3]$		

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$4x$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

رحلة بناء معارف

التقويم

الدالة f متزايدة تماما على المجالين $[0;2]$ و $]2;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;-2[$ و $[0;2]$

ملاحظة:

✍ نقول أنّ الدالة f رتيبة تماما على المجال D_f ، إذا كانت متزايدة تماما أو متناقصة تماما على المجال D_f

✍ تبقى هذه المبرهنة صحيحة إذا إنعدمت المشتقة من أجل قيم معزولة في المجال المذكور

مـــثال

5د

الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة $3x^2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	

ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، لأن مجموعة حلول المعادلة $f'(x)=0$ مجموعة منتهية و هي $\{0\}$

20د

تطبيق لتكن f الدالة المعرفة $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-3x^2+4$

1 أدرس إتجاه تغير الدالة f ، أحسب $f(-1)$.

2 شكل جدول تغيرات الدالة f ثم إستنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

3 بإستعمال سؤال **1** أدرس إتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ $g(x)=\frac{1}{2}-3x-\frac{4}{x}$

الحل

1 **دراسة إتجاه تغير الدالة f**

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

جدول إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;0[$ و $]2;+\infty[$

و متناقصة على المجال $[0;2]$

حساب $f(-1)$

$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+4=1-3+4=0$$

نهايات الدالة f

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$$

2 **جدول تغيرات الدالة f**

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

• من جدول التغيرات f نستنتج أنّ $f(2)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f و $f(0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f

إشارة $f(x)$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

3 دراسة إتجاه تغير الدالة g

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و دالتها المشتقة g' حيث : $g'(x)=x-3+\frac{4}{x^2}$ ومنه

$$g'(x)=\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}=\frac{f(x)}{x^2}$$

إشارة $g'(x)$

إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $f(x)$

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;0[$ و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$

ملاحظات حول سير الدرس

.....

.....

.....

najah213.com
Bekhadda Amin صفحة الأستاذ بخدة أمين
رياضيات التعليم الثانوي
LaTeX
مذكرات دروس سلاسل تمارين

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

مـــذكـــرة رقـــم 08

الأستاذ :بـــخدة أمـــين

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

- الأستاذ : بخدة أمين
- المستوى : السنة ثالثة رياضيات
- المدة : 1 ساعة
- الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
- ميدان التعلم: التحليل
- موضوع الحصة : تطبيقات الإشتقاقية(تابع)

- المكتسبات القبليـة : حساب مشتقة دوال المألوفة
- الكفاءات المستهدفة : قيم الحدية المحلية لدالة، نقطة إنعطاف
- المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

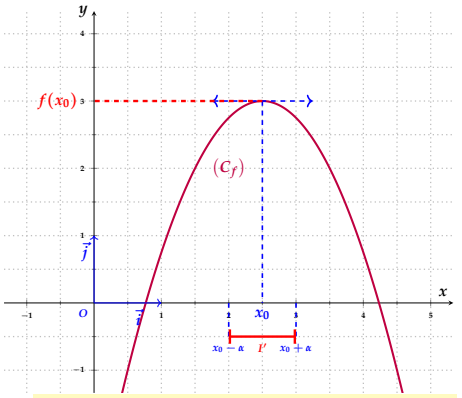
المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق		
مرحلة بناء المعارف	**1 القيم الحدية المحلية**	10د
	تعريف	
	f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I .	
	✍ $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح I' محتوي في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من I' : $f(x) \leq f(x_0)$	
	✍ $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح I' محتوي في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من I' : $f(x_0) \leq f(x)$	
	✍ $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة يعني أن: $f(x_0)$ قيمة حدية عظمى أو صغرى	
	مـــثال	10د
	لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[-4;4]$ بـ: $f(x) = \frac{1}{5}(x^3 + 3x^2 - 9x)$ تمثيلها (C_f) موضح في الشكل المقابل نلاحظ أنّ : $\frac{27}{5}$ هي قيمة حدية محلية عظمى للدالة عند $x_0 = -3$ و -1 قيمة حدية محلية صغرى للدالة عند $x_1 = 1$	
	مبرهنـــة — أضف إلى معلـوماتك ✍ لتكن الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة . إذا إنعدمت الدالة المشتقة f' عند قيمة x_0 من I مغيرة إشارتها فإنه يوجد مجال مفتوح I' محتوى في I يشمل x_0. تقبل فيه f قيمة حدية $f(x_0)$ ، تسمى $f(x_0)$ قيمة حدية محلية .	5د

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

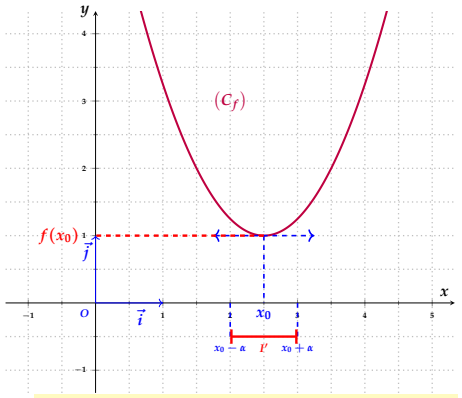
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

مرحلة بناء معارف



من أجل كل x من I' : $f(x) \leq f(x_0)$



من أجل كل x من I' : $f(x_0) \leq f(x)$

5د

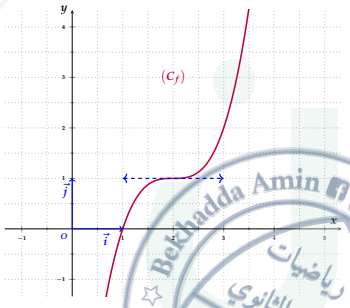
ملاحظات :

❶ النقطة $(x_0; f(x_0))$ تسمى نقطة حدية (الذروة) و المماس عند هذه النقطة موازيا لحامل محور الفواصل معادلته هي $y = f(x_0)$.

❷ إذا قبلت f قيمة حدية محلية عند x_0 فإن: $f'(x_0) = 0$

5د

2 نقطة إنعطاف



تعريف

نقطة الإنعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحنى البياني

5د

مبرهنـــة

إذا إنعدمت الدالة المشتقة الثانية f'' عند x_0 مع تغير الإشارة فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف فاصلتها x_0.

إذا إنعدمت الدالة المشتقة الأولى f' عند x_0 دون تغير الإشارة فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف فاصلتها x_0.

أضف إلى معلـوماتك

5د

مـــثال

✍ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3$ مشتقتها الأولى تنعدم عند $x_0 = 0$ ولا تغير إشارتها
إذن النقطة $A\,(0; f(0))$ نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f)

✍ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ مشتقتها الثانية تنعدم عند $x_0 = 1$ وتغير إشارتها.
إذن النقطة $A\,(0; g(0))$ نقطة إنعطاف للمنحنى (C_g)

التقويم

حل تمرين 67 صفحة 64 و تمرين 70 صفحة 65

15د

ملاحظات حول سير الدرس

✍ .....

.....

.....

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

مـــذكـــرة رقـــم 9

الأستاذ :بـــخدة أمـــين

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

- الأستاذ : بخدة أمين
- المستوى : السنة ثالثة رياضيات
- المدة : 1 ساعة
- الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
- ميدان التعلم: التحليل
- موضوع الحصة : التقريب التألفي

- المكتسبات القبليـة : حساب مشتقة دوال المألوفة
- الكفاءات المستهدفة : توظيف المشتقات لحل مشكلات
- المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**التهيئة النفسية** التذكير بأحسن تقريب تألفي لدالة بجوار عدد الحقيقي x_0 .	
مرحلة بناء المعارف	**1 التقريب التألفي** **خـاصية** (أضف إلى معلوماتك) ✍ f دالة معرفة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$. إذا قبلت f الاشتقاق عند x من I فإنه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h حيث $x+h$ ينتمي إلى I لدينا: $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h\varepsilon(h)$ مع $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$. من أجل h قريب من 0 نكتب عندئذ: $f(x+h)\approx f(x)+hf'(x)$ يسمى $f(x)+hf'(x)$ التقريب التآلفي لِـ $f(x+h)$ من أجل h قريب من 0، المرفق بالدالة f .	10د
	البـرهـان ليكن x_0 من I و لدينا f قابلة للإشتقاق عند x_0 ومنه $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$ بوضع : $\varepsilon(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)$ يكون لدينا: $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=f'(x_0)-f'(x_0)=0$ إذن: $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\varepsilon(h)+f'(x_0)$ ومنه $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h\varepsilon(h)$ ■	
	مـــثال لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+1}$. ✍ بإستعمال التقريب التألفي للدالة f لنحسب القيمة المقربة إلى 10^{-2} للعدد $f(1,0001)$. لدينا: $f'(x)=\dfrac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$ ، $f(1)=-\dfrac{1}{2}$ و $f'(1)=1$. ومنه $f(1,0001)=f(1+0,0001)\approx f(1)+0,0001f'(1)$ ومنه $f(1,0001)\approx -0,50$	10د
	ملاحظة: نضع $h=x_0+h$ أحسن تقريب تألفي للدالة f يصبح كالتالي: $f(x)\approx f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.	
	مـــثال أحسن تقريب تألفي للدالة $x\mapsto\sqrt{x+1}$ بجوار 0 هي دالة تألفية $x\mapsto\frac{1}{2}x+1$ ونكتب : $\sqrt{x+1}\approx\frac{1}{2}x+1$ بجوار 0	5د

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

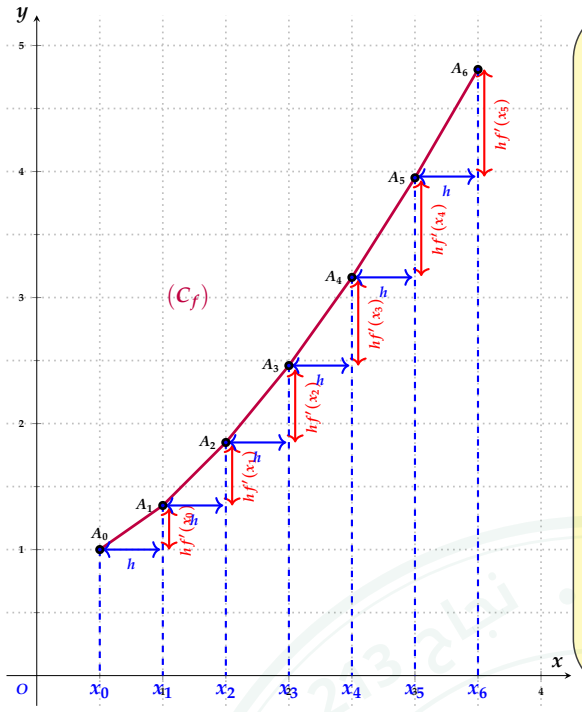
najah213.com · نجاح 213

مرحلة بناء معارف

التقويم

طريقة اولر

تسمح طريقة أولر بانشاء تمثيلات بيانية تقريبية لدالة f بمعرفة f' و $y_0 = f(x_0)$، ترتكز هذه الطريقة على التقريب التآلفي للدالة f بحيث من أجل h قريب من 0 لدينا : $f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$
انطلاقا من $A_0(x_0; f(x_0))$ نشيء النقطة $A_1(x_1; f(x_1))$ حيث : $x_1 = x_0 + h$
و $y_1 = f(x_0) + hf'(x_0)$ وبما أن $f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$ من أجل h قريب من 0 فإن $A_1(x_1; f(x_1))$ قريبة من C_f منحنى الدالة f
بنفس الطريقة يمكن إنشاء انطلاقا من A_1 النقطة $A_2(x_1+h, f(x_1)+hf'(x_1))$، وهكذا يمكن إنشاء النقط $A_n(x_n, y_n)$ حيث $x_n = x_{n-1} + h$ و $y_n = f(x_{n-1}) + hf'(x_{n-1})$ مع $n \succeq 1$، بربط النقط A_0 ، A_1 ، A_2،.... نحصل على تمثيل بياني تقريبي للدالة f مرتبط بإختيار h الذي يسمى الخطوة وكلما كانت الخطوة أقرب إلى الصفر نحصل على تمثيل أكثر دقة



15د

الكتابة التفاضلية

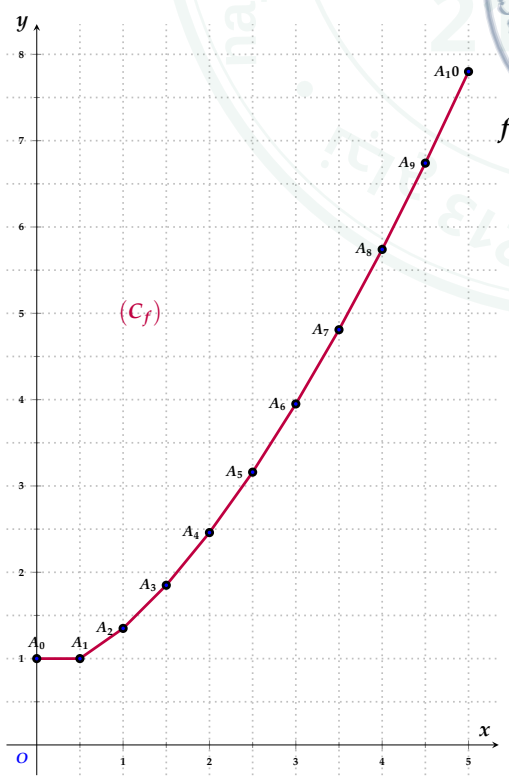
بوضع $\Delta x = (x+h) - x$ و $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ تكتب المساواة : $f(x+h) - f(x) = hf'(x) + hg(h)$
كما يلي : $\Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta x g(\Delta x)$ ومنه التقريب التآلفي : $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ عندما يكون Δx قريبا من 0
نصطلح الصياغة التفاضلية التالية : $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ أو $dy = f'(x)dy$

يستعمل هذا الترميز في العلوم الفيزيائية وبصفة عامة نكتب $\frac{df}{dx}$ بدلا من f' و $\frac{d^2f}{dx^2}$ بدلا من f'' وهكذا $\frac{d^nf}{dx^n}$ بدلا من $f^{(n)}$

20د

تطبيق

أنشئ منحنى تقريبي بطريقة أولر للدالة f على المجال $[0;5]$ حيث $f(1) = 1$ و $f'(x) = \sqrt{x}$
نختار مثلا الخطوة $h = 0,5$ و نقوم بمسح المجال $[0;5]$



لتكن $A_0(0;1)$ ولتكن A_1 النقطة ذات الإحداثيات $(0+0,5; f(0+0,5))$ أي $(0,5; f(0,5))$
لدينا: $f(0,5) \approx f(0+0,5) + 0,5f'(0) \approx 1 + 0,5(0) \approx 1$
ومنه $A_1(0,5;1)$
لتكن $A_2(0,5+0,5; f(0,5+0,5))$
$f(0,5+0,5) \approx f(0,5) + (0,5)f'(0,5) \approx 1,35$
ومنه : $A_2(1;1,35)$
لتكن $A_3(1,5; f(1,5))$
$f(1,5) = f(1+0,5) \approx f(1) + (0,5)f'(1) \approx 1,85$
ومنه : $A_3(1,5;1,85)$
لتكن $A_4(2; f(2))$
$f(2) = f(1,5+0,5) \approx f(1,5) + (0,5)f'(1,5) \approx 1,85$
ومنه : $A_4(2;2,46)$
لتكن $A_5(2,5; f(2,5))$
$f(2,5) = f(2+0,5) \approx f(2) + (0,5)f'(2) \approx 3,16$
ومنه : $A_5(2,5;3,16)$
لتكن $A_6(3; f(3))$
$f(3) = f(2,5+0,5) \approx f(2,5) + (0,5)f'(2,5) \approx 3,95$
ومنه : $A_6(3;3,95)$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

لتكن $A_7(3,5;f(3,5))$ ، $A_7(3,5;4,81) \approx f(3)+(0,5)f'(3) \approx f(3+0,5)=f(3,5)$ ومنه :
لتكن $A_8(4;f(4))$ ، $A_8(4;5,74) \approx f(3,5)+(0,5)f'(3,5) \approx f(3,5+0,5)=f(4)$ ومنه :
لتكن $A_9(4,5;f(4,5))$ ، $A_9(4,5;6,74) \approx f(4)+(0,5)f'(4) \approx f(4+0,5)=f(4,5)$ ومنه :
لتكن $A_{10}(5;f(5))$ ، $A_{10}(5;7,81) \approx f(4,5)+(0,5)f'(4,5) \approx f(4,5+0,5)=f(5)$ ومنه :

ملاحظات حول سير الدرس

.....

.....

.....

.....

najah213.com • نجاح 213 • najah213.com • نجاح 213 • najah213.com • نجاح 213 •

najah213.com · نجاح 213

مـــذكـــرة رقـــم 10

الأستاذ :بـــخدة أمـــين

ثانوية ساجي مختار السمار–غليزان

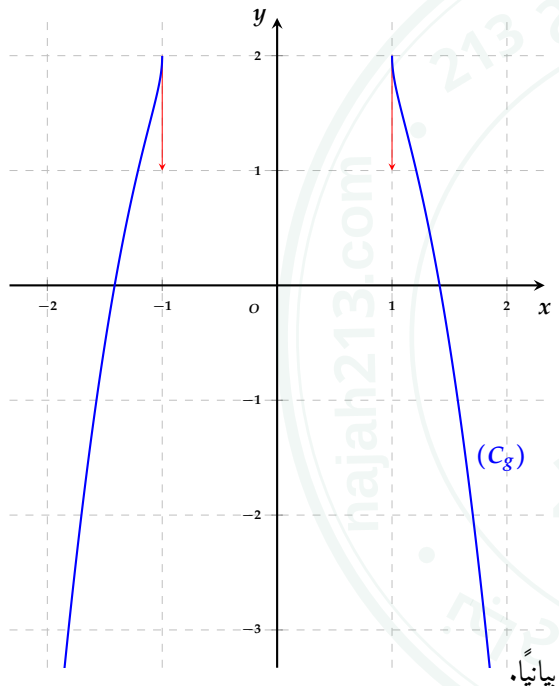
- الأستاذ : بخدة أمين
- المستوى : السنة ثالثة رياضيات
- المدة : 2 ساعة
- الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
- ميدان التعلم: التحليل
- موضوع الحصة : دراسة دالة

- المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية
- الكفاءات المستهدفة : دراسة إتجاه تغير دوال كثير الحدود، ناطقة ،الصماء
- المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

دراسة دالة صماء (60 دق)

I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ بـ : $g(x)=2-x^2\sqrt{x^2-1}$.

(C_g) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المقابل .



1 أُحسب : $g\left(\sqrt{2}\right)$ و $g\left(-\sqrt{2}\right)$.

2 بقراءة بيانية :

(ا) عيّن : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

(ب) هل الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

(ج) هل الدالة g قابلة للإشتقاق عند 1 من اليمين ؟ برّر .

(د) عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x}-x+1$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1

(ا) أُدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 1 من اليمين وعند القيمة -1 من اليسار . فسّر النتائج بيانيًا.

(ب) أُحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 بيّن أنه من أجل كل $x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

3 أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

4 بيّن أن النقطة $I(0,1)$ هي مركز تناظر لـ (C_f) .

5 أنشئ (C_f) .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

10 دراسة دالة كثيرة الحدود +ناطقة 60دق

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$$

1 أُدرس تغيرات الدالة g .

2 بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا α في المجال $[-1;0]$.

3 عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

4 بيّن أن : $\alpha^2 = -3 - \frac{4}{\alpha - 1}$.

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1}$.

(C_f) المنحى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة 2cm)

1 بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$$

◁ أُدرس تغيرات الدالة f .

2 بيّن أن : $f(\alpha) = \alpha - \frac{2}{\alpha^2 + 1}$.

◁ استنتج حصرًا للعدد $f(\alpha)$ باستعمال العدد α .

3 عيّن الأعداد a ، b ، c و d بحيث من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$.

أ) بيّن أنّ للمنحنى (C_f) مستقيمًا مقاربًا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ب) أُدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4 تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f''(x) = \frac{4(-3x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

◁ بيّن أن للمنحنى (C_f) نقطتي انعطاف يُطلب تعيين إحداثياتيهما.

5 أُكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0 .

◁ ماذا تستنتج بالنسبة للمماس (T) والمستقيم (Δ) ؟

6 أنشئ (C_f) ، (T) ، (Δ) و المستقيمات المقاربة.

7 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة :

$m(x^2 + 1) + 2 = 0$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

مـــذكـــرة رقـــم 11

الأستاذ :بـــخدة أمـــين

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

- الأستاذ : بخدة أمين
- المستوى : السنة ثالثة رياضيات
- المدة : 2 ساعة
- الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
- ميدان التعلم: التحليل
- موضوع الحصة : دراسة الدوال المثلثية

- المكتسبات القبليـة : حساب مشتقة دوال المألوفة
- الكفاءات المستهدفة : توظيف المشتقات لدراسة الدوال المثلثية: $x \mapsto \sin(x)$ ، $x \mapsto \cos(x)$ ، $x \mapsto a\sin(bx+c)$
- المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**التهيئة النفسية** التذكير بدوال cos ، sin ، tan و دساتير الجمع ❖ دراسة الدالة sin و الدالة cos	10د
مرحلة البناء و التعلم	**1 نشاط مقترح** نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان لـ f و g على الترتيب في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ✍ نقتصر دراسة الدالتين على المجال $[-\pi;\pi]$ **1** إعتماداعلى الدائرة المثلثية حدد إشارة $f(x)$ و $g(x)$ على المجال $[0;\pi]$. **2** (بإستعمال دساتير الجمع) • أدرس شفاعة الدالتين (فسرالنتيجة هندسيا) • أثبت أن f و g دوريتين و دورهما هو 2π **3** أحسب $f'(x)$ و $g'(x)$. **4** إستنتج إتجاه تغير f و g على مجال $[0;\pi]$ ، ثم شكل جدول تغيرات f و g **5** أنشئ (C_f) و (C_g) على مجال $[0;\pi]$ ثم إستنتج الإنشاء على المجال $[-\pi;0]$ **6** إشرح كيف يتم إنشاء (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$ مناقشة النشاط **1** إشار $f(x)$ و $g(x)$ على المجال $[0;\pi]$ $f(x)$: x: 0 … π ؛ $f(x)$: $+$ $g(x)$: x: 0 … $\frac{\pi}{2}$ … π ؛ $g(x)$: $+$ 0 $-$ **2** دراسة شفاعة الدالتين • لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإن $(-x)\in\mathbb{R}$ $\cos(-x)=\cos(0-x)=\cos(0)\cos(x)+\sin(0)\sin(x)=1\times\cos(x)+0\times\sin(x)=\cos(x)$ ومنه $\cos(-x)=\cos(x)$ إذن الدالة cos دالة زوجية و منحناها البياني متناضر بالنسبة لحامل محور التراتيب • لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإن $(-x)\in\mathbb{R}$ $\sin(-x)=\sin(0-x)=\sin(0)\cos(x)-\sin(x)\cos(0)=0\times\cos(x)-\sin(x)\times1=-\sin(x)$ ومنه $\sin(-x)=-\sin(x)$ إذن الدالة sin دالة فردية و منحناها البياني متناضر بالنسبة لمبدأ المعلم	40د 30د

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

• **إثبات أن الدالتين f و g دالتين دوريتين**

• لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن: $x + 2\pi \in \mathbb{R}$

$\cos(x+2\pi) = \cos(x)\cos(2\pi) - \sin(x)\sin(2\pi) = \cos(x) \times 1 - \sin(x) \times 0$

ومنه $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ إذن الدالة cos دورية و دورها 2π

• لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن: $x + 2\pi \in \mathbb{R}$

$\sin(x+2\pi) = \sin(x)\cos(2\pi) + \cos(x)\sin(2\pi) = \sin(x) \times 1 + \cos(x) \times 0$

ومنه $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ إذن الدالة sin دورية و دورها 2π

3 • الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث : $f'(x) = \cos(x)$

• الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g' حيث : $g'(x) = -\sin(x)$

4 **إستنتاج أتجاه تغير f و g**

• لدينا : $f'(x) > 0$ من أجل $x \in [0;\frac{\pi}{2}[$ و $f'(x) < 0$ من أجل $x \in [\frac{\pi}{2};\pi]$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;\frac{\pi}{2}]$ و متناقصة تماما على المجال $[\frac{\pi}{2};\pi]$

• لدينا : $g'(x) < 0$ من أجل $x \in [0;\pi]$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $[0;\pi]$

جدول التغيرات

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

x	0		π
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	1	↘	-1

5 **التمثيل البياني**

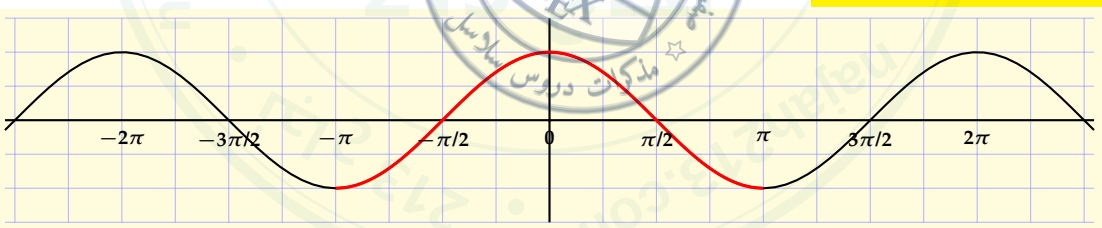
❖ **الدالة cos**

✍ ننشيء التمثيل البياني للدالة "cos" على المجال $[0;\pi]$ انطلاقا من جدول تغيراتها.

نتم هذا الرسم على المجال $[-\pi;0]$ بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب لأن الدالة "cos" زوجية (الجزء الأحمر)

ومنه نستنتج بيان الدالة cos على $\mathbb{R}$ وذلك بإنجاز "دوريات" مثيلات له لأن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$



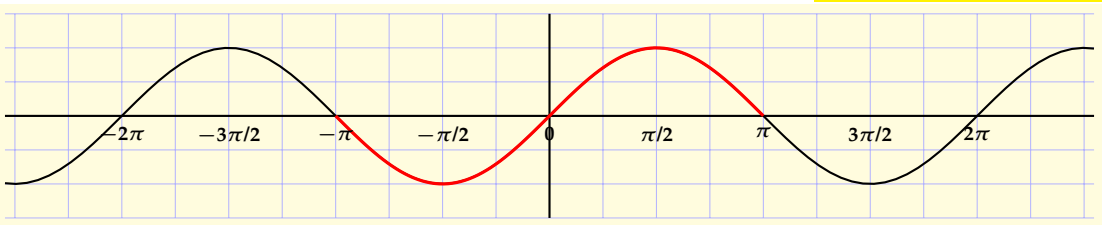
❖ **الدالة sin**

✍ ننشيء التمثيل البياني للدالة "sin" على المجال $[0;\pi]$ انطلاقا من جدول تغيراتها.

نتم هذا الرسم على المجال $[-\pi;0]$ بالتناظر بالنسبة للمبدأ لأن الدالة "sin" فردية (الجزء الأحمر)

ومنه نستنتج بيان الدالة "sin" على $\mathbb{R}$ وذلك بإنجاز "دوريات" مثيلات له لأن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$



مرحلة ثانوية

najah213.com · نجاح 213

❖ دراسة الدالة tan

تعريف

الدالة ظل و التي نرمز إليها بالرمز "tan" معرفة بـ: $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ من أجل كل عدد حقيقي x بحيث x يختلف عن $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ حيث k عدد صحيح

30د

مرحلة بناء المعلومة

خواص

❶ دراسة شفعية الدالة

من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ حيث k عدد صحيح

لدينا: $\tan(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=-\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}=-\tan(x)$

ومنه الدالة ظل دالة فردية .

❷ لنبين أنّ الدلة دورية و دورها π

$$\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin(x)}{-\cos(x)}=\tan(x)$$

إذن tan دالة دورية و دورها π

❸ دراسة الدالة الظل

الدالة الظل دورية و دورها π يكفي دراستها على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\cap D_f$ أي يكفي دراستها على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

✍ الدالة الظل دالة فردية يكفي دراستها على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

- **دراسة الدالة على المجال $[0;\frac{\pi}{2}[$**

$$\tan(0)=\frac{sin(0)}{\cos(0)}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sin(x)}{\cos(x)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

المستقيم ذو المعادلة $x=\dfrac{\pi}{2}$ مقارب للمنحى دالة الظل

- **مشتقة الدالة الظل**

الدالة الظل قابلة للإشتقاق على $[0;\frac{\pi}{2}[$ ودالتها المشتقة $\tan'$ حيث :

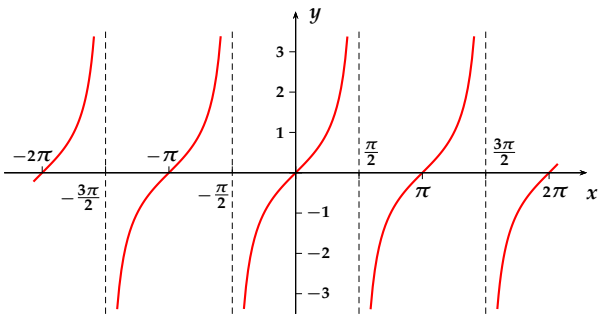
$$\tan'(x)=\frac{\cos(x)\cos(x)-(-\sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

ومنه $\tan'(x)>0$ أي الدالة ظل متزايدة تماما على $[0;\frac{\pi}{2}[$

- **جدول تغيرات الدالة الظل**

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$	$+$		
$\tan(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- **التمثيل البياني للدالة الظل**



التقويم

تطبيق : حل تمرين 95 صفحة 70

20د

ملاحظات حول سير الدرس

.....

.....

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

مـــذكـــرة رقـــم 12

الأستاذ :بـــخدة أمـــين

ثانوية ساجي مختار السمار–غليزان

- الأستاذ : بخدة أمين
- المستوى : السنة ثالثة رياضيات
- المدة : 1 ساعة
- الوحدة التعلمية: الإشتقاقية و الإستمرارية
- ميدان التعلم: التحليل
- موضوع الحصة : دراسة الدوال المثلثية(تابع)

- المكتسبات القبلية : حساب مشتقة دوال المألوفة
- الكفاءات المستهدفة : توظيف المشتقات لدراسة الدوال المثلثية: $x \mapsto \sin(x)$ ، $x \mapsto \cos(x)$ ، $x \mapsto a\sin(bx+c)$
- المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
التمرين	**حل تمرين 95 صفحة 70**	40د

1 أ) إثبات أنّ الدالة f ورية دورها $2pi$.

من أجل كل x و $x+2\pi$ من $\mathbb{R}$ يكون :

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \frac{1}{2}\cos 2(x+2\pi) - \cos(x+2\pi) \\ &= \frac{1}{2}(2x+4\pi) - \cos(x+2\pi) \\ &= \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

إذن: f دورية ، دورها $T = 2\pi$

ب) **إثبات أنّ محور التراتيب هو محور تناظر:**

من أجل x و $-x$ من $\mathbb{R}$ يكون :

$$f(-x) = \frac{1}{2}\cos(-2x) - \cos(-x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos x = f(x)$$

إذن: الدالة f زوجية و بالتالي (C) يقبل محور تناظر معادلته : $x = 0$

2 أ) **تعين** $f'(x)$

f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و يكون $f'(x) = -\sin(2x) + \sin(x)$

ب) لدينا: $f'(x) = -\sin(2x) + \sin(x) = -2\sin(x)\cos(x) + \sin(x) = \sin(x)(1 - 2\cos(x))$

ج) **دراسة إشارة** $f'(x)$ **على** $[0;\pi]$

$f'(x) = 0$ تكافئ : $(\sin x = 0$ أو $\cos x = \frac{1}{2})$ تكافئ $x = k\pi$ أو $x = \cos(\frac{\pi}{3})$ ومنه

$x \in \left\{0; \frac{\pi}{3}; \pi\right\}$ و يكون

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$1-2\cos x$		$-$	0	$+$	
$\sin x$	0	$+$		$+$	0
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0

- **جدول النغيرات**

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{3}{4}$	↗	$\frac{3}{2}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

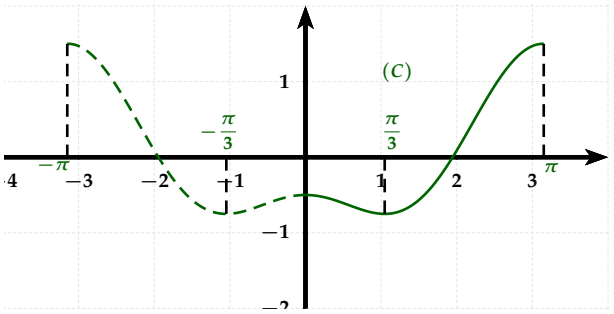
najah213.com · نجاح 213

تقويم

4 • رسم المنحنى على $[-\pi;\pi]$

نرسم (C) على المجال $[0;\pi]$ ثم نأحذ نظيره بالنسبة لمحور التراتيب على المجال $[-\pi;0]$

20د



يمكن رسم (C) على R و ذلك بإستعمال الإنسحاب الذي شعاعه $k\pi\,\vec{i}$.

حل تمرين رقم 63

إثبات أنّ التسارع متناسب مع فاصلة المتحرك عند اللحظة t .

لدينا: $x(t)=3\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$ حيث $t\in[0;+\infty[$

فتكون السرعة اللحظية عند t هي : $x'(t)=3\left[-2\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right]=-6\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$

و التسارع هو : $x''(t)=-6\left[2\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right]=-12\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$

النتيجة : $x''(t)=-4\left[3\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right]=-4x(t)$ أي أن تسارع المترحك يكون متناسبا مع فاصلة المتحرك .

ملاحظات حول سير الدرس

.....

.....

.....

.....

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com