najah213.com · نجاح 213

الأستاذ : مرنيز وليد

الموسم الدراسي : 2020/2019

الإشتقاقية، النهايات، دراسة دوال

- سلسلة تمارين -

التمرين رقم 1:

في كل حالة من الحالات التالية عين D_f مجموعة تعريف الدالة f ، ثم احسب النهايات عند اطراف D_f

- $f(x) = 3x^2 + x - 2$
- $f(x) = -2x^3 - x^2 + 4x + 3$
- $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$
- $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4}{x + 3}$
- $f(x) = \dfrac{1 - x}{x^2 + 2x + 1}$
- $f(x) = \dfrac{3x}{(x + 1)^2}$
- $f(x) = \dfrac{2}{x - 1} - \dfrac{1}{x^2 - 4}$

التمرين رقم 2:

احسب النهايات في كل حالة من الحالات التالية:

1) حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty - \infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 - 5x + 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{x}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 + 1} - x$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

2) حالة عدم التعيين من الشكل $0 \times \infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}(1 + \sqrt{x})$

3) حالة عدم التعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$
- $\lim\limits_{x\, 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$

4) حالة عدم التعيين من الشكل $\dfrac{\infty}{\infty}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + x - 3}{5x + 4}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + 4}$

التمرين رقم 3:

f الدالة المعرفة على $]-\infty; -1[$ بـ : $f(x) = \dfrac{-2x^2 - x}{x + 1}$

1) عين الاعداد a ، b و c بحيث : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x + 1}$

2) احسب $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x)$. ماذا تستنتج؟

3) بين ان المنحنى الممثل للدالة f يقبل المستقيم (D) الذي معادلته $y = 1 - 2x$ كمستقيم مقارب.

4) أدرس وضعية المنحنى بالنسبة الى (D)

التمرين رقم 4:

لتكن الدالة f المعرفة بجدول تغيراتها التالي، f' دالتها المشتقة

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	‖	↘	2	↗	$\cdots$

نقبل ان f معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x + 1}$ حيث : a ، b و c اعداد حقيقية.

1) احسب $f'(x)$ بدلالة a و c

2) بالاستعانة بجدول التغيرات بين ان : $c = 4$ ، $b = -1$ و $a = 1$

3) اتمم جدول التغيرات بتعيين النهايات المنقوصة

4) بين ان (C) المنحنى الممثل للدالة f يقبل المستقيم $(D) : y = x - 1$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ، ثم ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (D)

السنة الثانية ثانوي

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين رقم 5:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+3}{x-1}$

1) بين انه من اجل كل x من D_f يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=2x-1+\dfrac{2}{x-1}$

2) اثبت ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=2x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ و $+\infty$

3) ادرس تغيرات f ، ثم ارسم المستقيمات المقاربة و (C_f)

4) استنتج رسم (C_h) المنحنى الممثل للدالة h و المعرفة بـ : $h(x)=|f(x)|$

التمرين رقم 6:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $f(x)=ax^3+bx-1$

1) عين العددين الحقيقين a و b بحيث (C_f) يشمل النقطة $A(-1;1)$ ويقبل مماس يوازي محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 1

2) نضع : $f(x)=x^3-3x-1$

ا) ادرس تغيرات الدالة f

ب) اكتب معادلة المماس (Δ) في النقطة B ذات الفاصلة 0 وعين وضعية المنحنى بالنسبة اليه. ماذا تمثل النقطة B

ج) بين ان المعادلة : $f(x)=0$ تقبل ثلاث حلول α ، β ، γ حيث : $\alpha\in[-2;-1]$ و $\beta\in\left[-\frac{1}{2};0\right]$ و $\gamma\in\left[\frac{3}{2};2\right]$

د) ارسم المماس (Δ) و المنحنى (C_f)

التمرين رقم 7:

g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{3x^2-5x}{x-3}$.
(C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب نهايات الدالة g عند اطراف مجموعة التعريف

2) ادرس تغيرات الدالة g

3) عين الاعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من اجل كل x من $\mathbb{R}-\{3\}$ فان : $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-3}$

4) بين ان المستقيم (D) الذي معادلته $y=3x+4$ مقارب مائل للمنحنى (C_g) بجوار $+\infty$

5) بين ان النقطة $\omega(3;13)$ مركز تناظر للمنحنى (C_g)

6) عين نقط تقاطع (C_g) مع المحورين ثم انشئ (C_g)

7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $g(x)=m$

8) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{3;-3\}$ بـ : $h(x)=\dfrac{3x^2-5|x|}{|x|-3}$

ا) بين ان h زوجية. اعط تفسيرا هندسيا لذلك

ب) اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ثم استنتج كيفية رسم منحنى الدالة h

التمرين رقم 8:

1) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x+1}$

ا) تحقق انه : $f(x)=x+3+\dfrac{1}{x+1}$

ب) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة التعريف

ج) بين انه : $f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

د) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في مستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

ا) بين ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين احدهما مائل و ليكن (D)

ب) ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة الى المستقيم ذي المعادلة : $y=x+3$

ج) انشئ المستقيم (D) و المنحنى (C_f)

3) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $f(x)=m$

4) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{|x+1|}$.
(C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق

ا) اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

ب) اشرح كيفية انشاء المنحنى (C_g) اعتمادا على المنحنى (C_f) ، ثم انشئه في نفس المعلم السابق.

السنة الثانية ثانوي

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين رقم 9:

1) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 8x^3 - 9x^2 + 4$

ا) ادرس تغيرات الدالة g ، وشكل جدول تغيراتها

ب) بين ان: $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0.55 < \alpha < -0.54$

ج) استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$

2) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{-4x+3}{x^3-1}$.
(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

ا) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة التعريف و فسر النتائج بيانيا.

ب) اثبت ان : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x^3-1)^2}$

ج) ادرس اتجاه تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

د) بين ان : $f(\alpha) = \dfrac{-4}{3\alpha^2}$ ، ثم اعط حصرا للعدد $f(\alpha)$

التمرين رقم 10:

1) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$

ا) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$

ب) بين ان : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.5 < \alpha < 0.9$

ج) حدد حسب قيم x اشارة $g(x)$

2) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+1}{3x}$.
(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

ا) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها

ب) احسب $f'(x)$ و بين انه من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم x فان اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

د) بين ان : $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{6} + \dfrac{1}{2\alpha}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

هـ) ارسم المنحنى (C) . (ناخذ : $\alpha \approx \dfrac{2}{3}$)

التمرين رقم 11:

1) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{x+1}$

ا) تحقق انه : $f(x) = x + 3 + \dfrac{1}{x+1}$

ب) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة التعريف

ج) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$:

$$f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

د) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في مستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس

ا) بين ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين احدهما مائل وليكن (D)

ب) ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة الى المستقيم ذي المعادلة : $y = x + 3$

ج) انشئ المستقيم (D) و المنحنى (C_f)

3) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $f(x) = m - 1$

4) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{|x+1|}$.
(C_g) تمثيلها البياني

ا) اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

ب) اشرح كيفية انشاء (C_g) اعتمادا على المنحنى (C_f)

ج) انشئ في نفس المعلم السابق المنحنى (C_g)

التمرين رقم 12:

1) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^2+3x+6}{x+2}$

ا) عين الاعداد a ، b و c بحيث :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$$

ب) احسب النهايات عند اطراف مجموعة تعريف الدالة f

ج) بين انه : $f'(x) = \dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$

د) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في مستوي المنسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

ا) بين ان (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين احدهما المستقيم (Δ) معادلته $y = x + 1$

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى (Δ)

ج) تحقق ان النقطة $A(-2;-1)$ نقطة تقاطع المقاربين هي مركز تناظر لـ (C_f)

د) اكتب معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة -1 لـ (C_f)

هـ) ارسم (Δ) ، و المماس و (C_f) بدقة.

3) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ : $g(x) = \dfrac{x^2+3x+6}{|x+2|}$

ا) بين انه يمكن رسم التمثيل البياني للدالة انطلاقا من رسم تمثيل البياني للدالة f

ب) ارسم (C_g) في نفس المعلم السابق.

السنة الثانية ثانوي

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين رقم 13:

1) g دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{2-3x}{(x-1)^2}$.
ادرس نهاية g عند $+\infty$ ، $-\infty$ ، 1

2) f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=-x+3+g(x)$.
في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$
نعتبر (C_f) المنحنى الممثل لـ f ، و المستقيم $(\Delta): y=-x+3$

ا) باستعمال نتائج السؤال الاول، ماذا نستطيع القول عن (C_f) و المستقيم (Δ)

ب) ادرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم انشئ جدول تغيراتها

3) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ) ، ثم انشئ المنحنى (C_f)

التمرين رقم 14:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{3x-7}{2-x}$

1) ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) عين معادلتي المستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f)

3) عين نقط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات، ثم ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C_f)

4) بين ان نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين مركز تناظر للمنحنى

5) بين انه توجد نقطتان من (C_f) يكون المماس عند كل منهما موازيا للمستقيم ذو المعادلة : $y=-x+4$

6) نعتبر الدالة h المعرفة بـ : $h(x)=f(|x|)$

ا) عين D_h ، ثم بين ان h دالة زوجية

ب) ارسم (C_h) بالاعتماد على (C_f) في نفس المعلم

التمرين رقم 15:

1) f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$

ا) عين العددين الحقيقين b ، c بحيث يكون من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{1\}$:

$$f(x)=x+b+\frac{c}{x-1}$$

ب) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها

ج) ادرس اتجاه تغير f وشكل جدول تغيراتها

2) (C_f) التمثيل البياني لـ f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

ا) بين ان المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل له بجوار $-\infty$ و $+\infty$

ب) اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

ج) اثبت ان النقطة $w(1;2)$ هي مركز تناظر (C_f)

د) انشئ المنحنى (C_f) و المماس (T)

3) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=x+m$

4) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-1$ كمايلي : $h(x)=|\dfrac{x^2+3}{x-1}|$.
اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ثم استنتج كيفية رسم منحنى الدالة h

التمرين رقم 16:

1) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ :

$$g(x)=2x^3-3x^2-1$$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم

ا) بين ان $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين 1.6 و 1.7

ب) استنتج حسب قيم x ، اشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$

2) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$.
(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس (الوحدة $4cm$)

ا) بين ان $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=+\infty$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$. اعط تفسيرا بيانيا للنتيجتين بين انه من كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

ج) تحقق انه من اجل كل x من $]-1;+\infty[$:

$$f(x)-(-x+1)=\frac{(x-1)x^3}{x^3+1}$$

د) بعد دراسة اشارة $f(x)-(-x+1)$ ، استنتج وضعية (C_f) بالنسبة للماس (Δ). ماذا تلاحظ ؟

ه) ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f)

السنة الثانية ثانوي

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين رقم 17:

f الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $f(x) = -x + 3 + \dfrac{2}{x-1}$
(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) ا) عين نهاية الدالة f عند 1 ، فسر النتيجة بيانيا
ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) ا) استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل المستقيم :
$(D) : y = -x+3$ كمستقيم مقارب مائل عند $+\infty$
ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (D)
ج) ارسم المنحنى (C_f) و المستقيم (D)

3) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = m - x$

التمرين رقم 18:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x-1}$. (C_f)
تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب النهايتين $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$

2) احسب $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ ، فسر النتيجة بيانيا

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

4) بين ان النقطة $I(1;-1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

5) ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته : $y = x - 2$

ا) بين ان (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)
ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم Δ
ج) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة : $f(x) = x + m$

التمرين رقم 19:

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بجدول تغيراتها المعطى بـ :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗	‖	↗		↘	
			2				-2		
					‖				$-\infty$

تكتب عبارة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ حيث a ، b و c اعداد حقيقية :

1) احسب $f'(x)$

2) اعتمادا على جدول التغيرات الدالة f :

ا) عين الاعداد الحقيقية a ، b و c
ب) بين ان منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب عمودي
ج) قارن بين صورتي العددين 0 و $\dfrac{1}{2}$ معللا اجابتك

3) ناخذ فيمايلي : $a = -1$ ، $b = 2$ ، $c = -1$ وليكن (C_f) المنحنى البياني للدالة f في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس

ا) بين ان (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تحديد معادلة له
ب) ادرس الوضع النسبي لـ (Δ) و (C_f). انشئ المنحنى (C_f)
ج) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد حلول:

$$f(x) = m$$

التمرين رقم 20:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كمايلي : $f(x) = \dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها، ثم استنتج مستقيما مقارب للمنحنى (C_f)

2) ا) تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1
$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{x-1}$$
ب) احسب $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}[f(x)-x+1]$ و $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}[f(x)-x+1]$ ثم فسر النتائج هندسيا
ج) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4) اكتب معادلة للماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

5) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 : $f(2-x)+f(x)=0$ ، ماذا تستنتج؟

6) انشئ (Δ) ، (T) و (C_f)

7) m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا و حسب قيم m عدد و اشارة حلول المعادلة $f(x) = m$

السنة الثانية ثانوي

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين رقم 21:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$$

1) ا) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) ا) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.7 < \alpha < 0.8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x اشارة $g(x)$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معل متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ا) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

ب) استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ).

3) ا) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

حيث f' مشتقة الدالة f.

ب) استنتج اشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكل جدول تغيرات الدالة f . (نأخذ $f(\alpha) \approx -0.1$)

4) احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.

5) انشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).

6) لتكن h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

ا) تحقق انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) - 2$

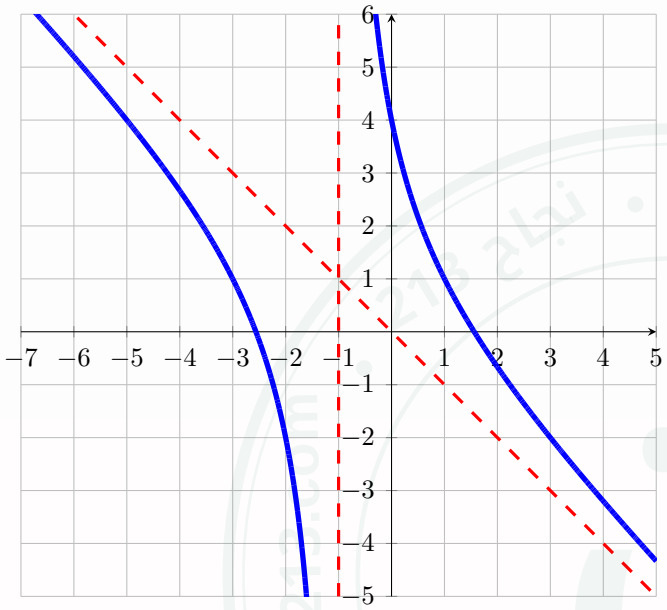
ب) استنتج ان (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم انشئ (C_h) .

التمرين رقم 22:

f دالة معرفة على المجال $I =]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ:

$$f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ كما هو مبين في الشكل.



1) ا) احسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

ب) بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات f شكل جدول تغيراتها.

2) g دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$ و (C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس.

ا) احسب نهاية g عند $+\infty$

ب) تحقق ان (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس تغيرات g

3) k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

1) ا) احسب $\lim\limits_{h\to0^>} \frac{k(h)-k(0)}{h}$ ، $\lim\limits_{h\to0^<} \frac{k(h)-k(0)}{h}$ ماذا تستنتج؟

ب) اعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

2) اكتب معادلتي نصف المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$

3) ارسم (Δ_1) و (Δ_2) و (C_k)

السنة الثانية ثانوي

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

سنة 2 ثانوي ع ت

حل سلسلة دراسة دوال (نهايات + اشتقاقية)

التمرين 1

حساب نهايات الدوال

1) $f(x)=3x^2+x-2$; $D_f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 3x^2=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 3x^2=+\infty$

2) $f(x)=-2x^3-x^2+4x+3$; $D_f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} -2x^3=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} -2x^3=-\infty$

3) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$; $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

إشارة المقام: $x+1$: $-\ \|\ -\ 0\ +$

$\lim_{x\to-1} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-1} f(x)=-\infty$

4) $f(x)=\dfrac{-x^2+4}{x+3}$; $D_f=\mathbb{R}-\{-3\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} -x=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} -x=-\infty$

إشارة المقام: $x+3$: $-\ \|\ -\ 0\ +$

$\lim_{x\to-3} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to-3} f(x)=+\infty$

5) $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+2x+1}$; $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x}=0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{x}=0$

إشارة المقام: x^2+2x+1 : $+\ \|\ -\ 0\ +$

$\lim_{x\to-1} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-1} f(x)=+\infty$

6) $f(x)=\dfrac{3x}{(x+1)^2}$; $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x^2}=0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{x^2}=0$

إشارة المقام: $+\ \|\ -\ 0\ +$

$\lim_{x\to1} f(x)=+\infty$

7) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-4}$; $D_f=\mathbb{R}-\{1;-2;2\}$

$D_f=]-\infty,-2[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$

$f(x)=\dfrac{2x^2-x-7}{(x-1)(x^2-4)}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x^3}=\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x}=0$

إشارة المقام:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
المقام		$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+1}-x=+\infty$$

4) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$ (نضرب في المرافق)

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

ج ع ت من الشكل $0\times\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(1+\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

ج ع ت من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$$ (نقوم بتحليل البسط)

x^2+x-6	$x-2$
x^2+2x	$x+3$
$0+3x-6$	
$-3x+6$	
0	

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)}=\lim_{x\to2}x+3=5$$

$\lim_{x\to-2}f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to-2}f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to1}f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to1}f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to2}f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to2}f(x)=-\infty$

القرين 2

ج ع ت من الشكل $+\infty-\infty$

1) $\lim_{x\to+\infty}2x^3-5x+1$

نطبق الخاصية A

$$\lim_{x\to+\infty}2x^3-5x+1=\lim_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$$

2) $\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}$ (نضرب في المرافق)

$$\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{x-\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x-\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

3) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+1}-x$ (نستخرج x كعامل مشترك)

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

(نضرب في المرافق)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\sqrt{x}+1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

4) ح.ع. من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-3}{5x+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{5x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{5}x$$

$$=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2(1+1/x^2)}}{x+4}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+x\sqrt{1+1/x^2}}{x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+\sqrt{1+1/x^2})}{x(1+4/x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+4}=2$$ ومنه

التمرين 3

$f(x)=\frac{-2x^2-x}{x+1}$; $D_f=]-\infty,-1[$

1) تعيين الأعداد a، b و c

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

$$=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}$$

$$=\frac{ax^2+ax+bx+b+c}{x+1}$$

$$=\frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$$

بالمطابقة نجد

$$a=-2 \quad \text{و} \quad \frac{a+b}{2}=-1 \quad \text{و} \quad \frac{b+c}{3}=0$$

بتعويض a في 2 نجد

$b=-1-a$

$b=-1+2$

$\boxed{b=1}$

من (3) نجد $-b=c$

$\boxed{c=-1}$ ومنه

ب) الكتابة الأقليدية لـ f

$$\begin{array}{r|l} -2x^2-x & x+1 \\ +2x^2+2x & -2x+1 \\ \hline 0 \quad x & \\ -x-1 & \\ \hline -1 & \end{array}$$

$$\frac{2x^2-x}{x+1}=\frac{(x+1)(-2x+1)-1}{(x+1)}$$ ومنه

$$f(x)=\frac{(x+1)(-2x+1)}{(x+1)}-\frac{1}{(x+1)}$$ ومنه

$$f(x)=-2x+1-\frac{1}{x+1}$$

$c=-1$ و $b=1$ ، $a=-2$

2) حساب $\lim_{x\to-1}f(x)$

إشارة المقام $x+1$: $-$ | $+$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{-2x^2-x}{x+1}=-\infty$$

وعليه نتيجة أن المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة f

3) إثبات أن $y=1-2x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f

أي نثبت أن

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to-\infty}\left[(2x+1)-\frac{1}{x+1}-(1-2x)\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{x+1}=0$$

و

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-y=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x+1}=0$$

وعليه المستقيم ذو المعادلة $y=1-2x$ مقارب بالخص الدالة f

4) $x>-1$ اسفل الوضع النسبي لـ (C_f) و (D)

دراسة اشارة الفرق

$$[f(x)-y]=-\frac{1}{x+1}$$

حيث

$x+1$	$-\infty$	-1	$+\infty$
	$-$	$\|$	$+$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
-1	$-$		$-$
$x+1$	$-$	$\|$	$+$
اشارة الفرق	$+$	$\|$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (D)		(C_f) تحت (D)

التمرين 4

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}\quad;\ D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$$

1) حساب $f'(x)$ على $\mathbb{R}-\{-1\}$ حيث

$$f'(x)=a-\frac{c}{(x+1)^2}$$

2) إثبات أن $a=1$ و $b=-1$ ، $c=4$ أي

من جدول التغيرات نلاحظ أن

$f(1)=2$ ✓

$f'(1)=0$ ✓

$f'(-3)=0$ ✓

$f(-3)=-6$ ✓

بما أن لدينا 3 عبارات كان لدينا 3 مجاهيل

لدينا $f(1)=2$

حيث $f(1)=a+b+\frac{c}{2}$

ومنه نستنتج أن

(1) $\quad a+b+\frac{c}{2}=2$

لدينا $f'(1)=0$

حيث $f'(1)=a-\frac{c}{4}$

ومنه نستنتج أن

(2) $\quad a-\frac{c}{4}=0$

ولدينا كذلك

$f'(-3)=6$

حيث $f'(3)=3a+b+\frac{c}{-2}$

ومنه نستنتج أن

(3) $\quad 6a+b-\frac{c}{2}=6$

من (2) نجد $a=\frac{c}{4}$

بتعويض a في (1) و (3) نجد

$$\begin{cases}\frac{c}{4}+b+\frac{c}{2}=2\\ -\frac{3c}{4}+b-\frac{c}{2}=6\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{3c}{4}+b=2 \quad (*)\\ -\frac{5c}{4}+b=6 \quad (**)\end{cases}$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

بطرح ** من ** نجد

$\frac{3c+5c}{4} = 8$

$\frac{8c}{4} = 8$

$c = 4$

ومنه

بتعويض قيمة c في (2) نجد

$a = \frac{4}{4}$

$a = 1$

من المعادلة (1) نجد

$b = 2 - a - \frac{c}{2}$

$b = 2 - 1 - 2$

$b = -1$

3) إتمام جدول التغيرات

إشارة المقام

$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} x - 1 + \frac{4}{x+1} = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

4) إثبات أن $y = x - 1$ معادلة لـ (C_g) بجوار $-\infty$ و $+\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{x+1} - (x-1)\right]$

$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x+1} = 0$

بذفس الطريقة نجد

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = 0$

ومنه $y = x - 1$ مقارب لـ (C_g) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

5) الوضع النسبي (نفس الطريقة المعتمدة في التمرين السابق)

التمرين 5

$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 3}{x - 1}$; $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

1) إثبات أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$

$f(x) = 2x - 1 + \frac{2}{x-1}$

$2x^2 - 3x + 3$	$x - 1$
$-2x^2 + 2x$	$2x - 1$
$-x + 3$	
$+x - 1$	
2	

$\frac{2x^2 - 3x + 3}{x-1} = \frac{(x-1)(2x-1)}{x-1} + \frac{2}{x-1}$

أي $f(x) = 2x - 1 + \frac{2}{x-1}$

2) إثبات أن $y = 2x - 1$ مقارب لمنحنى الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x-1} = 0$

3) دراسة تغيرات الدالة f

1) حساب النهايات

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$

إشارة المقام

$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$

najah213.com · نجاح 213

ج) حساب $f'(x)$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$

$$f'(x)=\frac{(4x-3)(x-1)-(1)(2x^2-3x+3)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{4x^2-4x-3x+3-2x^2+3x-3}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-4x}{(x-1)^2}$$

دراسة إشارة المشتقة

الحاصل موجب قطعا وهو إشارة المشتقة من إشارة البسط حسب

$2x^2-4x=0$ تكافئ

$2x(x-2)=0$ أي $2x=0$ أو $x-2=0$

$x=0$ أو $x=2$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-3	↘	‖	↘	5	↗	
	$-\infty$				$-\infty$				$+\infty$

الإنشاء

تعيين $(C_f)\cap(yy')$

$f(0)=-3$

$(C_f)\cap(yy')=\{(0,-3)\}$

وهو

تعيين $(C_f)\cap(xx')$

$f(x)=0$ تكافئ $2x^2-3x+3=0$ و $x-1\neq 0$

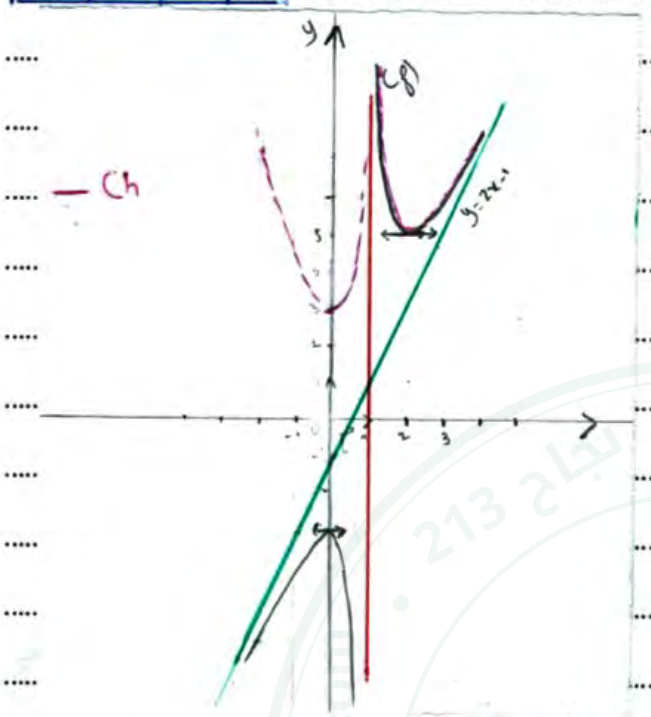
حساب Δ

$\Delta=9-4\times2\times3$

$\Delta<0$ ومنه (C_f) لا يقطع (xx')

د) انشاء

x	D		
	0	1	-1
y	-3	1	-1



(C_h) استنتاج رسم

$h(x)=|f(x)|$

وهو

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & ; f(x)\geq 0\\ -f(x) & ; f(x)<0\end{cases}$$

وهو

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & ; x\in]+1,+\infty[\\ -f(x) & ; x\in]-\infty,1[\end{cases}$$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) في $x\in]1,+\infty[$

(C_h) نأخذ جزء (C_f) الواقع فوق محور الفواصل بالنسبة لمحور الفواصل في $x\in]-\infty,1[$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين 6

$f(x) = ax^3 + bx - 1$; $D_f = \mathbb{R}$

1) تعيين العددان a و b

نعلم أن $A \in (C_f)$ معناه $f(-1) = 1$

$f(-1) = -a - b - 1$ حيث

$-a - b - 1 = 1$ ... (1) وعليه

(C_f) يقبل عند $A(-1;1)$ مماس موازي لحوار لمحور الفواصل معناه

$f'(1) = 0$

حيث

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$f'(1) = 3a + b$ ومنه

$3a + b = 0$ ... (2) وعليه

بجمع (1) و (2) طرف لطرف نجد

$2a - 1 - 1$

$2a = 2$

$a = 1$ ومنه

بتعويض قيمة a في (2) نجد

$b = -a - 1 - 1$

$b = -3$

ومنه

$f(x) = x^3 - 3x - 1$

2) أ- دراسة تغيرات الدالة f

حساب النهايات

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

حساب $f'(x)$

f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث

$f'(x) = 3x^2 - 3$

دراسة إشارة $f'(x)$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0$

ومنه $x = 1$ أو $x = -1$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

ب/ معادلة المماس عند 0

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$f(0) = -1$ و $f'(0) = -3$ حيث

ومنه $(T): y = -3x - 1$

دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (T)

$f(x) - y = x^3 - 3x - 1 - (-3x - 1)$

$= x^3 - 3x - 1 + 3x + 1$

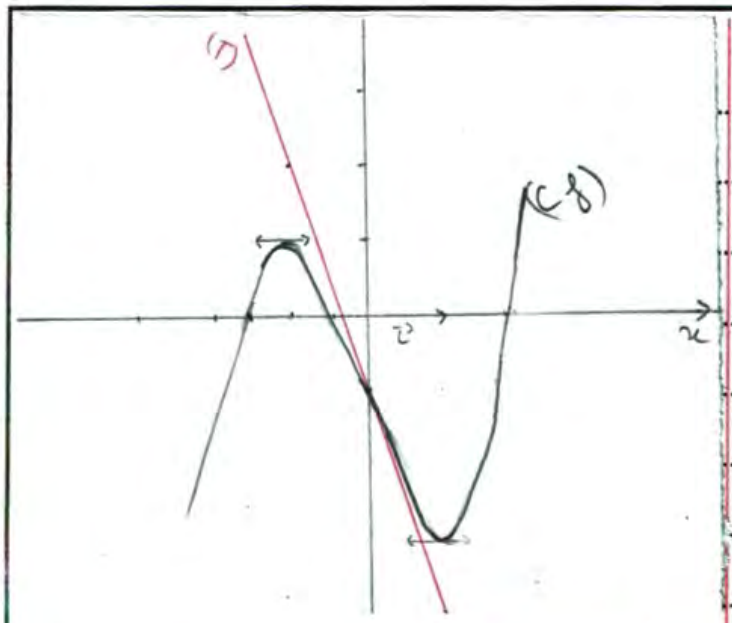
$f(x) - y = x^3$

x^3 : $-$ 0 $+$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	(C_f) تحت (T)		$A(0;-1)$		(C_f) فوق (T)

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213



بما أن مبدأ المعلم هو نقطة تقاطع المماس عند النقطة B فالنقطة B تمثل نقطة انعطاف

ج/ إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلول α و β و γ

1) $\alpha \in [-2,-1]$

من جدول التغيرات نجد أن الدالة f رتيبة على المجال $[-2,-1]$

حيث $f(-2)<0$ و $f(-1)>0$

أي $f(-2)\times f(-1)<0$

ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha \in [-2,-1]$

2) $\beta \in [-\frac{1}{2},0]$

الدالة f رتيبة على المجال $[-\frac{1}{2},0]$

حيث $f(-\frac{1}{2})>0$ و $f(0)<0$

أي $f(-\frac{1}{2})\times f(0)<0$

ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد β حيث $\beta \in [-\frac{1}{2},0]$

3) $\gamma \in [\frac{3}{2},2]$

الدالة f رتيبة على المجال $[\frac{3}{2},2]$

حيث $f(\frac{3}{2})<0$ و $f(2)>0$

أي $f(\frac{3}{2})\times f(2)<0$

ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد γ حيث $\gamma \in [\frac{3}{2},2]$

ا) إنشاء

	(T): $-3x-1$		
x	0	1	-1
y	-1	-4	2

تمرين 7

$g(x)=\dfrac{3x^2-5x}{x-3}$ ، $D_g=\mathbb{R}-\{3\}$

1) حساب النهايات

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}3x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}3x=+\infty$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
إشارة $x-3$		$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to3^<} g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to3^>} g(x)=+\infty$

2) دراسة إشارة g' ثم تغيرات الدالة g

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{3\}$

$g'(x)=\dfrac{(6x-5)(x-3)-1(3x^2-5x)}{(x-3)^2}$

$=\dfrac{6x^2-18x-5x+15-3x^2+5x}{(x-3)^2}$

$g'(x)=\dfrac{3x^2-13x+15}{(x-3)^2}$

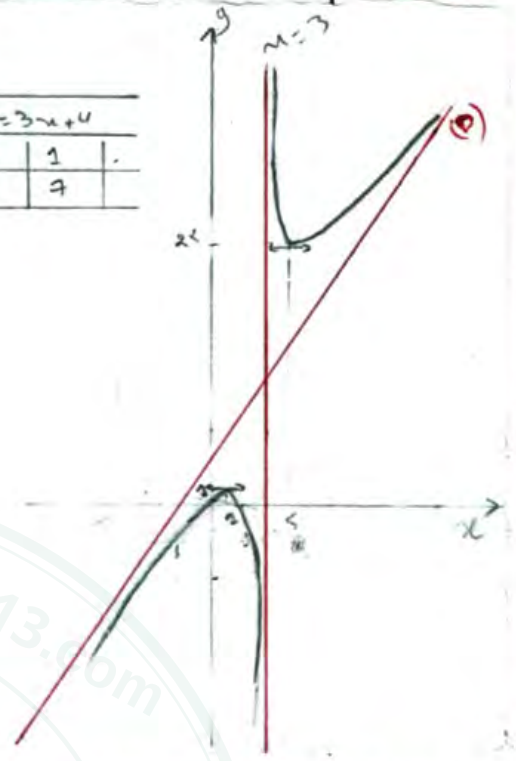
لدراسة إشارة g' المقام موجب تماما ومنه إشارة g' من إشارة البسط

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الإنشاء

(D): $y=3x+4$			
x	0	1	.
y	4	7	



7) المناقشة البيانية

$g(x)=m$ مناقشة أفقية

$g(x)=m$ لها حل وحيد $m=1$

$g(x)=m$ لها حلان $m\in]-\infty,1[$

$g(x)=m$ لا تقبل حلول $m\in]1,25[$

$g(x)=m$ لها حل مضاعف $m=25$

$g(x)=m$ لها حلان موجبان $m\in]2,+\infty[$

8) $h(x)=\dfrac{3x^2-5|x|}{|x|+3}$

أ- إثبات أن h دالة زوجية

$h(-x)=\dfrac{3(-x)^2-5|-x|}{|-x|-3}=\dfrac{3x^2-5|x|}{|x|-3}=h(x)$

ومنه h زوجية

ب- كتابة h بدون رمز القيمة المطلقة

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-5x}{x-3} & ;x\geq 0\\ \dfrac{3x^2+5x}{-x-3} & ;x\leq 0\end{cases}$$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x\in[0,+\infty[$

وبما أن الدالة زوجية فإن (C_h) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

وعليه نحصل على جزء (C_h) لما $x<0$

برسم نظير جزء (C_h) لما $x\geq 0$

بالنسبة لمحور التراتيب

القرينة 8

$f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x+1}$; $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

أ) التحقق أن $f(x)=x+3+\dfrac{1}{x+1}$

نستعمل الطريقة أو القسمة الإقليدية

ب) حساب النهايات

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=+\infty$

ج/ اتجاه تغير الدالة f

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$

$f'(x)=\dfrac{(2x+4)(x+1)-1(x^2+4x+4)}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{2x^2+2x+4x+4-x^2-4x-4}{(x+1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

دراسة إشارة المشتقة

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$3x^2-18x+15=0$

حساب Δ

$\Delta=(-18)^2-4(3)(15)$

$\Delta=144$ $\quad/\Delta=12$

$\Delta>0$ و منه المعادلة تقبل حلين مختلفان هما

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{18-12}{6}$ $\quad x_2=\frac{18+12}{6}$

$x_1=1$ $\quad x_2=5$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	‖	−		+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	25	↗	$+\infty$

2) تعيين الأعداد الحقيقية a و b و c

$\frac{3x^2-5x}{x-3}$ $\quad x-3$

$-3x^2+9x$ $\quad 3x+4$

$4x$

$-4x+12$

12

$\frac{3x^2-5x}{x-3}=3x+4+\frac{12}{x-3}$

$a=3$ و $b=4$ و $c=12$

3) إثبات أن (C_g) مقارب لـ $g: y=3x+4$

$f(x)=3x+4+\frac{12}{x-3}$ نلاحظ أن

لأن

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12}{x-3}=0$

و

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{12}{x-3}=0$

وعليه (D) مقارب لـ (C_g) عند $+\infty$ و $-\infty$

5) إثبات أن $w(3,13)$ مركز تناظر (C_g)

(C_g) يقبل مركز تناظر معناه

$f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$

$f(2(3)-x)+f(x)=f(6-x)+f(x)$

$=\frac{3(6-x)^2-5(6-x)}{6-x-3}+\frac{3x^2-5x}{x-3}$

$=\frac{108+3x^2-36x+30+5x}{-x+3}+\frac{3x^2-5x}{x-3}$

$=\frac{-(3x^2+31x+78)}{x-3}+\frac{3x^2-5x}{x-3}$

$=\frac{-3x^2+31x-78+3x^2+5x}{x-3}$

$=\frac{+26x-78}{x-3}=\frac{+26(x-3)}{(x-3)}$

$f(2(3)-x)+f(x)=2(13)$ ومنه

وعليه $w(3,13)$ مركز تناظر (C_g)

6) تعيين تقاطع (C_g) مع حاملي محوري الإحداثيات

* مع محور التراتيب

$x=0$

$(C_g)\cap(yy')=\{(0,0)\}$

* مع محور الفواصل

$f(x)=0$

$\frac{3x^2+5x}{x-3}=0$

$3x^2+5x=0$ و $x-3\neq0$ تكافئ

$x(3x+5)=0$ تكافئ $x=0$ أو

$3x+5=0$ أي $x=\frac{-5}{3}$

$(C_g)\cap(xx')=\{(0,0);(\frac{-5}{3},0)\}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

المقام موجب فما هو هنا إشارة المشتقة
من إشارة البسط أي
$x(x+2)=0$ أي $x^2+2x=0$
ذكاي $x=0$ أو $x=-2$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ || $-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↘	$-\infty$ || $+\infty$ ↘	4 ↗	$+\infty$

ع) أ- إثبات أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين

لدينا $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$ ⟹ (C_f) يقبل مستقيم عمودي معادلته $x=-1$

لدينا $f(x) = x+3+\frac{1}{x+1}$

حيث $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

معناه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل عند ∞ معادلته $y=x+3$

ب- الوضع النسبي (C_f) و (D)

$f(x)-y = (x+3)+\frac{1}{x+1}-(x+3)$

$f(x)-y = \frac{1}{x+1}$

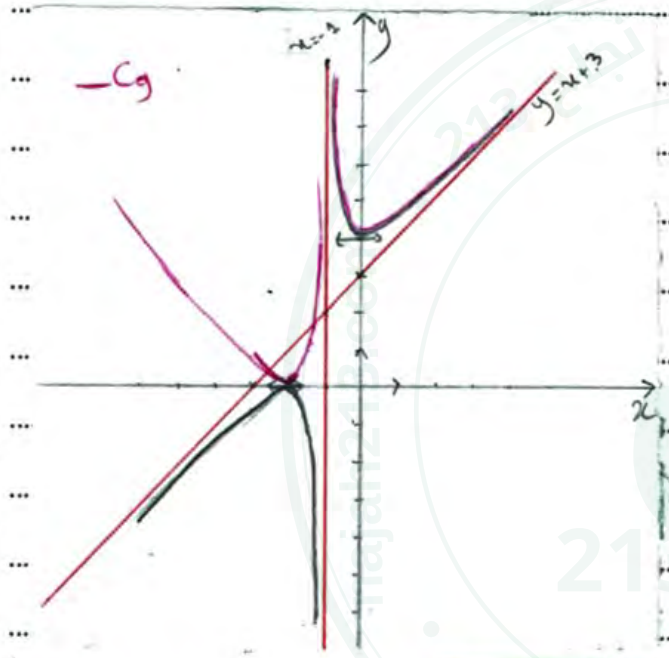
دراسة إشارة الفرق

إشارة الفرق من إشارة المقام كذا البسط موجب

$x+1>0$ ⟹ $x>-1$

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$ || $+$	
الوضع النسبي	(C_f) تحت (D)		(C_f) فوق (D)	

$-C_f$



3) المناقشة"

$f(x)=m$ مناقشة افقية

$m\in]-\infty,0[$ المعادلة تقبل حلين سالبان

$m=0$ المعادلة تقبل حل مضاعف

$m\in]0,4[$ المعادلة لا تقبل حل

$m=4$ المعادلة تقبل حل مضاعف

$m\in]4,+\infty[$ المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والآخر موجب

4) $g(x)=\frac{x^2+4x+4}{|x+1|}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

أ- كتابة g بدون رمز القيمة المطلقة

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4x+4}{x+1}; & x+1\geq 0\\ \dfrac{x^2+4x+4}{-(x+1)}, & x+1\leq 0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4x+4}{x+1}; & x\geq -1\\ -\dfrac{x^2+4x+4}{x+1}, & x\leq -1\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}f(x); & x\geq -1\\ -f(x); & x\leq -1\end{cases}$$

ومنه

لما $x\geq -1$ (C_g) ينطبق على (C_f)

لما $x\leq -1$ (C_g) نظيرة (C_f) الواقع تحت محور الفواصل بالنسبة لمحور الفواصل

التمرين 9

$g(x)=8x^3-9x^2+4$

1) دراسة تغيرات الدالة g

* حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 8x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 8x^3=+\infty$$

* حساب $g'(x)$

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$g'(x)=24x^2-18x$

دراسة إشارة g'

$g'(x)=0$ تكافئ $24x^2-18x=0$

تكافئ $x(24x-18)=0$

تكافئ $x=0$ أو $24x-18=0$ أي $x=\frac{18}{24}$

ومنه $x=\frac{3}{4}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	4	↘		↗	$+\infty$

$$f(x)=\frac{-4x+3}{x^3-1}$$

أ- حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{x^2}$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=$ المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{x}=\frac{-4}{+\infty}=0^-$ إشارة المقام

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب لـ (C_f) بجوار 1^+

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$

ب/ حساب $f'(x)$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ حيث

$$f'(x)=\frac{-4(x^3-1)-3x^2(-4x+3)}{(x^3-1)^2}$$

$$=\frac{-4x^3+4+12x^3-9x^2}{(x^3-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{8x^3-9x^2+4}{(x^3-1)^2}=\frac{g(x)}{(x^3-1)^2}$$

جـ/ دراسة اتجاه تغير الدالة f

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط لأن المقام موجب تماما وعليه

$g(x)=0$

$8x^3-9x^2+4=0$

حيث $\alpha \in]-0.55;-0.54[$ و $g(\alpha)=0$

x	α	
$g(x)$	$-$ 0	$+$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	$+\infty$

د/ إثبات أن $f(\alpha)=\dfrac{-4}{3\alpha^2}$

$f(\alpha)+\dfrac{4}{3\alpha^2}=\dfrac{-4\alpha+3}{\alpha^3-1}+\dfrac{4}{3\alpha^2}$

$=\dfrac{(-4\alpha+3)3\alpha^2+4(\alpha^3-1)}{(\alpha^3-1)(3\alpha^2)}$

$=\dfrac{-12\alpha^3+9\alpha^2+4\alpha^3-4}{3\alpha^5-3\alpha^2}$

$=\dfrac{-8\alpha^3+9\alpha^2-4}{3\alpha^5-3\alpha^2}=\dfrac{-g(\alpha)}{3\alpha^5-3\alpha^2}$

حيث $g(\alpha)=0$ ومنه

$f(\alpha)+\dfrac{4}{3\alpha^2}=0$

إذا

$f(\alpha)=\dfrac{-4}{3\alpha^2}$

$f(\alpha)$ حصر

لدينا $-0.55<\alpha<-0.54$

$0.2916<\alpha^2<0.3025$

$0.8748<3\alpha^2<0.9075$

$\dfrac{1}{0.9075}<\dfrac{1}{3\alpha^2}<\dfrac{1}{0.8748}$

$\dfrac{4}{0.8748}<\dfrac{-4}{3\alpha^2}<-\dfrac{4}{0.9075}$

ومنه $-4.57<f(\alpha)<-4.41$

تمرين 10

$g(x)=2x^3+x^2-1$

دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$

حساب النهايات

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty$

حساب $g'(x)$

$g'(x)=6x^2+2x$

دراسة إشارة g'

$6x^2+2x=0$ تكافئ $g'(x)=0$

$x(6x+2)=0$ أي $x=0$ و $x=-\frac{1}{3}$

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$		$-1/3$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-1/3)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ب) إثبات أن $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α

$0,5 < \alpha < 0,6$

الدالة g رتيبة تماما على المجال $]0;0,6[$ حيث $g(0,5) < 0$

و $g(0,6) > 0$ إذا

$g(0,5) \times g(0,6) < 0$

و منه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد

$\alpha \in]0,5;0,6[$

ج/ إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{3x}$

أ- حساب النهايات

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ $x: \begin{matrix}-\\+\end{matrix}$ 0

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

ب/ حساب $f'(x)$ حيث f معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$

$f'(x)=\dfrac{(3x^2+2x)(3x)-3(x^3+x^2+1)}{(3x)^2}$

$=\dfrac{9x^3+6x^2-3x^3-3x^2-3}{(3x)^2}$

$=\dfrac{6x^3+3x^2-3}{9x^2}$

$=\dfrac{3(2x^3+x-1)}{3\times 3x^2}$

وعليه $f'(x)=\dfrac{g(x)}{3x^2}$

وحسب إشارة f' من إشارة g لأن المقام موجب تماما

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$
			$\|\|$ $-\infty$				

د/ إثبات أن $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{6}+\dfrac{1}{2\alpha}$

$f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^2+6}{12\alpha}$

$f(\alpha)-\dfrac{2\alpha^2+6}{12\alpha}\overset{?}{=}0$

$f(\alpha)-\dfrac{2\alpha^2+6}{12}=\dfrac{12\alpha(\alpha^3+\alpha^2+1)-(2\alpha^2+6)(3\alpha)}{3\alpha\times 12\alpha}$

$=\dfrac{12\alpha^4+12\alpha^3+12\alpha-(6\alpha^3+18\alpha)}{36\alpha}$

$=\dfrac{12\alpha^4+6\alpha^3-6\alpha}{36\alpha}$

$=\dfrac{6\alpha(2\alpha^3+\alpha^2-1)}{6\times 6\alpha}=\dfrac{2\alpha^3+\alpha^2-1}{6}$

$2\alpha^3+\alpha^2-1=0$ لأن $g(\alpha)=0$ أي

$f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{6}+\dfrac{1}{2\alpha}$ وهذا ما أردنا

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$f(\alpha)$ حصر

$f(\alpha) = \frac{9}{6} + \frac{1}{2\alpha}$

$\ln 2 =$

$0.5 < \alpha < 0.9$

(1) $0.08 < \frac{\alpha}{6} < 0.15$

$1 < 2\alpha < 1.8$

(2) $0.55 < \frac{1}{2\alpha} < 1$

بجمع (1) و (2) نجد

$1.05 < f(\alpha) < 1.15$

تمرين 13

$g(x) = \frac{2-3x}{(x-1)^2}$; $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

1) حساب النهايات

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{x} = 0$

2)

$f(x) = -x + 3 + g(x)$

أ/ المستقيم (D) مقارب مائل للمنحنى (C) الدالة f عند $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$

ب/ حساب النهايات

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$

جـ/ دراسة اتجاه تغير الدالة f

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ حيث

$f'(x) = (-x+3)' + g'(x)$

$f'(x) = -1 + \frac{-3(x-1)^2 - (2x-2)(2-3x)}{(x-1)^4}$

$= \frac{-(x-1)^4 - 3(x^2+1-2x) - (4x-6x^2-4+6x)}{(x-1)^4}$

$= \frac{-x^4+4x^3-6x^2+4x-1-3x^2+3+6x-4x+6x^2+4-6x}{(x-1)^4}$

$= \frac{-x^4+4x^3+3x^2}{(x-1)^4}$

$f'(x) = \frac{x^2(-x^2+4-3)}{(x-1)^4}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط و

إشارة f' من إشارة Δ أي

الأقل موجب لما أي

$x=0$ أي $x^2(-x^2+4x-3)=0$

$\Delta = b^2-4ac$ حساب Δ

$\Delta = 16-12 = 4$; $\sqrt{\Delta} = 2$

حلول المعادلة x_1 و x_2

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+2}{-2} = 1$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-2}{-2} = 3$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↗	-1.75	↘	$-\infty$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

3- أ- استنتاج الوضع النسبي لـ (C_g) و (Δ)

$f(x) - y = g(x)$

ب- إشارة $g(x)$

المقام موجب تماما وعليه إشارة $g(x)$ من إشارة البسط أي $3x - 2$

$3x - 2 = 0$ أي $x = \frac{2}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_g) فوق (Δ)	(C_g) يقطع (Δ)	(C_g) تحت (Δ)

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

* حساب f'

f قابلة على $\mathbb{R} - \{2\}$ حيث

$f'(x) = \frac{3(2-x) - (-1)(3x-7)}{(2-x)^2}$

$= \frac{6 - 3x + 3x - 7}{(2-x)^2} = \frac{-1}{(2-x)^2}$

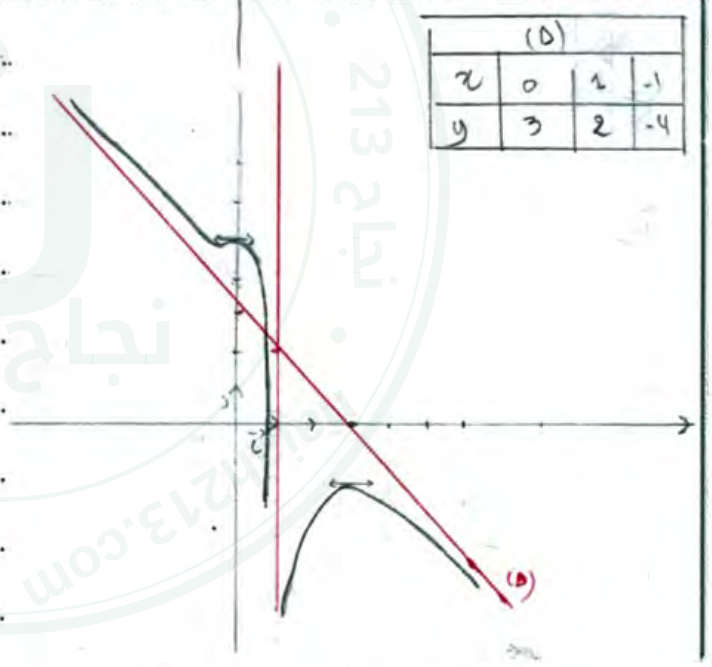
$f'(x) < 0$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|$	$-$
$f(x)$	-3 ↘ $-\infty$	$\|$	$+\infty$ ↘ -3

الإنشاء

(Δ)			
x	0	1	-1
y	3	2	-4



تمرين 14

$f(x) = \frac{3x-7}{2-x}$; $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

1) دراسة تغيرات الدالة f

* حساب النهايات

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{-x} = -3$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -3$

إشارة المقام $2 - x$: $+$ 0 $-$

2) المستقيمات المقاربة

لدينا $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -3$

معناه أن المستقيم ذو المعادلة $y = -3$ مقارب أفقي لـ (C_f)

لدينا $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

معناه أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ مقارب عمودي لـ (C_f)

3) تعيين نقط (C_f) حاملي محور الأفاصيل ومحور التراتيب

* مع محور التراتيب

$(C_f) \cap (yy') = \{(0, \frac{7}{2})\}$ أي $f(0) = \frac{7}{2}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

• مع محور الفواصل

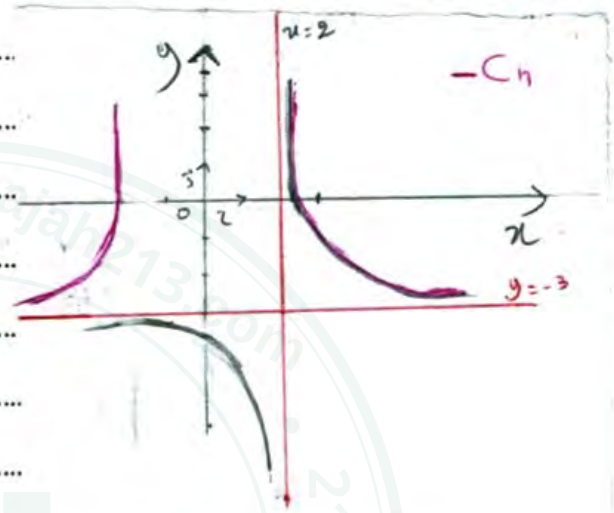
$f(x)=0$ أي $\frac{3x-7}{2-x}=0$

أي $3x-7=0$ و $2-x\neq 0$

$x=\frac{7}{3}$ و $x\neq 2$

$(C_f)\cap(xx')=\{(\frac{7}{3},0)\}$

ثم انشاء



4) إثبات أن نقطة تقاطع المقاربين هي مركز تناظر (C_f)

نقطة تقاطع المقاربين هي $(2,-3)$

$f(2\times 2-x)+f(x)=2\beta$

$f(2(2)-x)+f(x)=\frac{3(4-x)-7}{2-(4-x)}+\frac{3x-7}{2-x}$

$=\frac{12-3x-7}{2-4+x}+\frac{3x-7}{2-x}$

$=\frac{-3x+5}{-2+x}+\frac{3x-7}{2-x}$

$=-\frac{-3x+5}{2-x}+\frac{3x-7}{2-x}$

$=\frac{3x-5+3x-7}{2-x}=\frac{6x-12}{2-x}$

$=\frac{6(x-2)}{-(x-2)}=-6=2(-3)$

وهو المطلوب

5

(C_g) يقبل مماس موازي لحامل محور الفواصل

$f'(x)=-1$ معناه $y=-x+4$

أي $\frac{-7}{(-x+2)^2}=-1$

$-7=-(x^2+4-4x)$

$-x^2+4x+3=0$

$\Delta=b^2-4ac$ Δ حساب

$=16+12=28$ $/\sqrt{\Delta}=2\sqrt{7}$

$\Delta>0$ ومنه المعادلة تقبل

$x_1=\frac{-4-2\sqrt{7}}{-2}$ $x_2=\frac{-4+2\sqrt{7}}{-2}$

$x_1=2+\sqrt{7}$ $x_2=2-\sqrt{7}$

ومنه (C_f) يقبل مماس موازي للمستقيم ذو المعادلة $y=-x+4$ عند $x_1=2+\sqrt{7}$ و $x_0=2-\sqrt{7}$

6) $h(x)=f(|x|)$

أ/ $h(x)=\begin{cases}f(x) & ,x\geq 0\\ f(-x) & ,x\leq 0\end{cases}$

$h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$

"h زوجية" ومنه

(C_h) ينطبق على (C_f) على $[0,+\infty[$ وبما أن (C_h) نظير جزء (C_f) على $[0,+\infty[$ و h زوجية"

فحور التراتيب كذلك

ب/ $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$ نعين 19

$f'(x)$ بحساب

$f'(d)=a-\frac{c}{(x-2)^2}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ج) تعيين الأعداد a، b و c

من جدول التغيرات لدينا

$f(1) = 2$

$f'(1) = 0$

$f(3) = -2$

حيث $f(1) = a+b-c$

وهذا $a+b-c = 2$ ... (1)

$f'(1) = a - c$

وهذا $a - c = 0$ ... (2)

$f(3) = 3a+b+c$

وهذا $3a+b+c = -2$ ... (3)

من (2) نجد $a = c$

وعليه بتعويضها في (1) نجد

$c + b - c = 2$

$\boxed{b = 2}$ أي

بتعويض قيمة b في (3) نجد

$3c + 2 + c = -2$

$4c = -4$

$\boxed{c = -1}$

وهذا $\boxed{a = -1}$

ب/ إثبات أن (C_f) يقبل مقارب بجوار $+\infty$

$\lim_{x \to 2} f(x) = ?$

لدينا

$f(x) = -x + 2 - \frac{1}{x-2}$

$f(x) = \frac{-x^2+3}{x-2}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-x+2$		$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$		$+$	$\|$	$-$	

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ / $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

وعليه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 2$

(يمكن ملاحظة ذلك من جدول التغيرات)

ج/ المقارنة بين $f(0)$ و $f(\frac{1}{2})$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0, \frac{1}{2}]$ وعليه من أجل كل x من $0 < x < \frac{1}{2}$ فإن $0 < \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) > f(0)$

3) أ- إثبات أن (C_f) يقبل مستقيم (D)

يطلب تعيين معادلته

$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2+3}{x-2} \times \frac{1}{x}$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2+3}{x^2-2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2}{x^2}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ وهذا

حسب الخاصية ج

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

$a = -1$ وهذا

$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$

$\lim_{x \to +\infty} [-x + 2 - \frac{1}{x-1} + x]$

$= \lim_{x \to +\infty} [2 - \frac{1}{x-2}] = 2$

$b = 2$ وهذا

$(D): y = -x + 2$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ب/ دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (D)

$f(x) - y = -\frac{1}{x-2}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
-1	$-$		$-$		
$x-2$	$-$		$+$		
$f(x)-y$	$+$		$-$		
(C_f)	(C_f) فوق (D)		(C_f) تحت (D)		

ج/ مناقشة أفقية

تمرين 21

$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$

1) أ- حساب النهايات

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة g

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث

$g'(x) = 6x^2 - 8x + 7$

$g'(x) = 0$

حساب Δ

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 64 - 168$

$\Delta < 0$ وعليه المعادلة ليس لها حلول وهذه

$g'(x)$ موجبة تماما

أي الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2) أ- إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

g دالة متزايدة تماما على $[0{,}7\,;0{,}8]$

$g(0{,}8) > 0$ و $g(0{,}7) < 0$ حسب (نتيجة)

وعليه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد α من $[0{,}7\,;0{,}8]$

ب/ إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$		

II) $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ / $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب/ توجيه المقاربات

(D) مقارب مائل بجوار $-\infty$ و $+\infty$

$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$

$b = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x\right]$

$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}\right] = \frac{1}{2}$

$(D): \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

ج/ الوضع النسبي (إشارة الفرق)

I/3

$f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة x لأن المقام موجب تماما

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x	$-$		0	$+$		$+$	
$g(x)$	$-$		$-$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+$	$\|$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

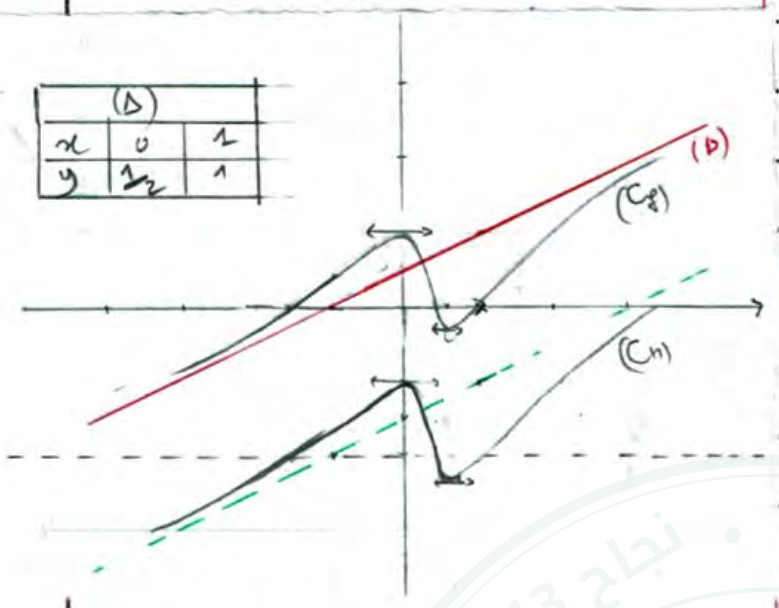
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ج) إنشاء $(C_f)\cap(y'y)=\{A\}$

	(Δ)	
x	0	1
y	$\frac{1}{2}$	1



ب- حساب $f(1)$

$f(1)=0$

بعد توحيد المقامات نجد

$$f(x)=\frac{2x^3-4x+2}{2(2x^2-2x+1)}$$

$f(x)=0$ تكافئ $2x^3-4x+2=0$ و $2(2x^2-2x+1)\neq 0$

حسب 1 نجزئ $2x^3-4x+2$ أي

$2x^3-4x+2=(x-1)(ax^2+bx+c)$

$2x^3-4x+2$	$x-1$
$-2x^3+2x^2$	$2x^2+2x-2$
$+2x^2-4x+2$	
$-2x^2+2x$	
$0\quad -2x+2$	
$+2x-2$	
0	

ومنه

$$f(x)=\frac{(x-1)(2x^2+2x-2)}{2(2x^2-2x+1)}$$

$f(x)=0$ تكافئ $2(2x^2-2x+1)\neq 0$ و $\begin{cases}x-1=0\\ 2x^2+2x-2=0\end{cases}$

إذا $x=1$

حساب Δ

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=4+16=20$ / $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{5}$

بما أن $\Delta>0$ فالمعادلة تقبل حلين

$x_2=\frac{-2+2\sqrt{5}}{4}$ | $x_1=\frac{-2-2\sqrt{5}}{4}$

$x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ | $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

$S=\left\{1,\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

$$h(x)=\frac{2x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$$ (6

أ/ التحقق أن $h(x)=f(x)-2$

$f(x)-2=\frac{2x^3-4x+2}{2(2x^2-2x+1)}-\frac{2(4x^2-4x+2)}{2(2x^2-2x+1)}$

$=\frac{2x^3-4x+2-8x^2+8x-4}{4x^2-4x+2}$

$=\frac{2x^3-8x^2+4x-2}{4x^2-4x+2}$

$=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}=h(x)$

ب/ (C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-2\vec{j}$

$h(x)=f(x)+k$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

تمرين 22

$f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$

$D_f =]-\infty,-1[\cup]-1,0[$

1) حساب النهايات

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$

ب/ جدول تغيرات الدالة

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	‖ $-\infty$	↘	$+\infty$ ↘ $-\infty$

2) $g(x) = -x + \frac{4}{x+1}$

أ/ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$

ب/ معادلة المقارب المائل

$a = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = 1$

$\boxed{a = 1}$

$b = \lim_{x\to\infty} [g(x) - ax] = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x+1}$

$b = 0$

$(\Delta): y = x$

3) $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

أ/ حساب

$\lim_{h\to0} \frac{k(h)-k(0)}{h}$

$k(x) = \begin{cases} x + \frac{4}{x+1} & ; x \geq 0 \\ -x + \frac{4}{x+1} & ; x \leq 0 \end{cases}$

$\frac{k(h)-k(0)}{h} = \frac{h + \frac{4}{h+1} - 4}{h}$

$= \frac{h^2+h+4-4h-4}{h+1} \times \frac{1}{h}$

$= \frac{h(h-3)}{h+1} \times \frac{1}{h}$

$= \frac{h-3}{h+1}$

$\lim_{h\to0} \frac{k(h)-k(0)}{h} = -3$

$\lim_{h\to0} \frac{k(h)-k(0)}{h} = -3$

نستنتج أن الدالة قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$

حيث $f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = -3$

التفسير الهندسي

(C_k) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$ مماس معامل توجيهه -3

(Δ_1) و (Δ_2) هي على التوالي معادلة

$(\Delta): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$= -3(x-0) + 4$

$(\Delta_1) - (\Delta_2) = -3x + 4$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

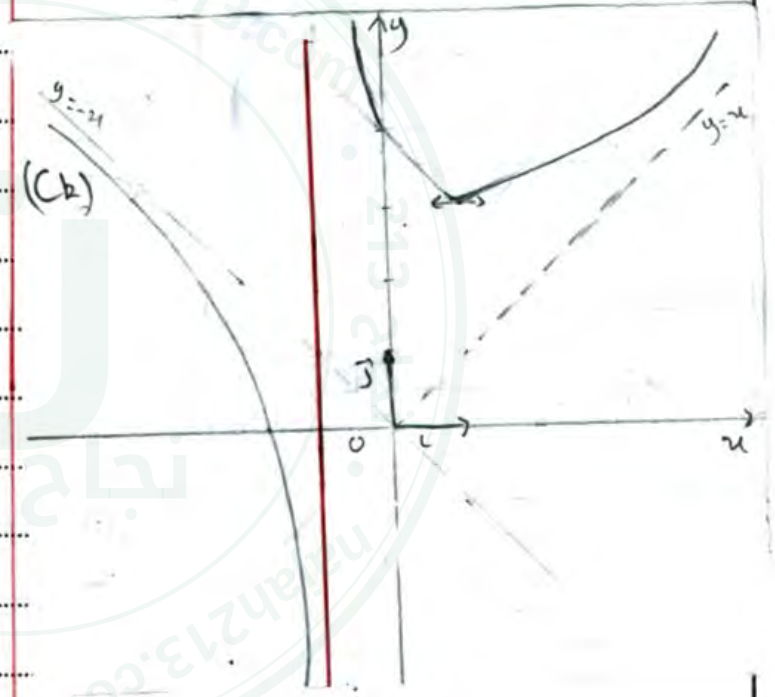
الإنشاء

$$k(x)=\begin{cases} x+\dfrac{4}{x+1} & ,x>0 \\ -x+\dfrac{4}{x+1} & ,x\leq 0 \end{cases}$$

أي

$$k(x)=\begin{cases} g(x) & ;x\in[0,+\infty[\\ f(x) & ;x\in]-\infty,-1[\cup]-1,0] \end{cases}$$

$$k(x)=\begin{cases} g(x) & ,x\in[0,+\infty[\\ f(x) & ,x\in]-\infty,0[\end{cases}$$



أدعو أن يكون هذا
الحل خالصاً لوجه الله
وإن كان هناك تقصير
فهو من عندي ^^

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com