najah213.com · نجاح 213

التمرين الأول ☹

I - لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=-2x^2+2-\ln x$

1. أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
2. احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II - f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{-1+\ln x}{x}-2x+2e$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.

ب- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-2x+2e$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ج- حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]0,4;0,5[$.

ب- أنشئ (Δ) و (C_f).

الحل ☺

I - لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=-2x^2+2-\ln x$

1. دراسة تغيرات الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} -2x^2+2=2$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \ln x=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(-2x+\frac{2}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=-4x-\dfrac{1}{x}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $-4x<0$ و $-\dfrac{1}{x}<0$ ومنه $g'(x)<0$ على $]0;+\infty[$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

2. حساب $g(1)$ ثم استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

$$g(1)=2(1)^2+2-\ln 1=0$$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

من أجل $x \in]0;1[$ ، $g(x) > 0$

من أجل $x \in]1;+\infty[$ ، $g(x) < 0$

II - f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{-1+\ln x}{x} - 2x + 2e$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **.**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} + \frac{\ln x}{x} - 2x + 2e = -\infty$$

لدينا $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-1+\ln x}{x} = -\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-1+\ln x}{x} - 2x + 2e = -\infty$

ب- بين أن المستقيم (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = -2x + 2e$ بجوار $+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (-2x + 2e) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$ إذن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -2x + 2e$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ج- تحديد وضعية المنحنى (C_f) **بالنسبة إلى المستقيم** (Δ) **.**

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$.

لدينا $f(x) - y = \frac{-1+\ln x}{x}$ وهي إشارة $x > 0$ و $f(x) - y$ من نفس إشارة $-1+\ln x$.

$f(x) - y = 0$ يكافئ $-1+\ln x = 0$ يكافئ $\ln x = 1$ أي $x = e$.

$f(x) - y > 0$ يكافئ $-1+\ln x > 0$ يكافئ $\ln x > 1$ أي $x > e$.

x	0		e		$+\infty$
$f(x) - y$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية	‖ (C_f) تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $B(e;0)$		(C_f) فوق (Δ)

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x **من المجال** $]0;+\infty[$ **:** $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - (-1+\ln x)}{x^2} - 2 = \frac{2 - \ln x - 2x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f **.**

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$.

من أجل $x \in]-\infty;1[$ ، $f'(x) > 0$ ؛ ومن أجل $x \in]1;+\infty[$ ، $f'(x) < 0$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;1]$ وتناقصية تماما على $[1;+\infty[$.

Mostefai A/Elaziz

aziz_mus1@hotmail.fr

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

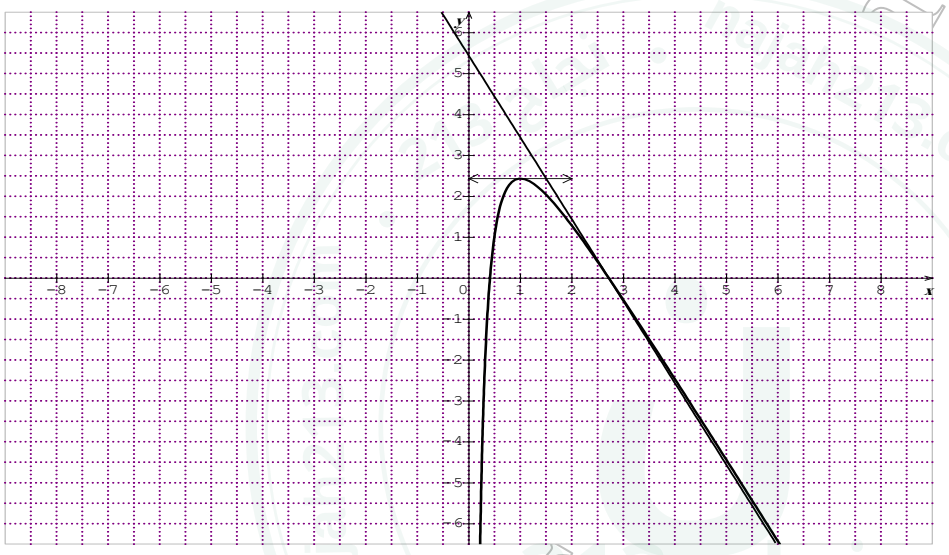
جدول تغيرات الدالة f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$2e-3$	↘	$-\infty$

3. أ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]0,4;0,5[$.

ب- استنتج حسب قيم x إشارة $f(x)$ على المجال $]0;1[$.

4. أنشئ (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ $f(0,4)\approx -0,15$ و $f(0,5)\approx 1,04$ و x_0 فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع محور الفواصل).



ب- نسمي (Δ) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1. أكتب معادلة (Δ).

التمرين الثاني

I - لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2+2-2\ln(x)$

1. ادرس تغيرات الدالة g واحسب $g(1)$.

2. استنتج أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $g(x)>0$.

II - f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x+\dfrac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.

ب- بين أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ج- حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D).

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ- بين أنه يوجد مماس وحيد (Δ) للمنحنى (C_f)، موازي للمستقيم (D).

aziz_mus1@hotmail.fr

Mostefai A/Elaziz
سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ب - كتابة معادلة المماس (Δ).

ج- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $\frac{1}{2}<\alpha<1$

د - أنشئ المستقيمين (Δ) و (D) والمنحنى (C_f).

هـ- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $mx-2\ln(x)=0$.

الحل☺

I - لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2+2-2\ln(x)$

1. **ادرس تغيرات الدالة g وحسب $g(1)$.**

لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 2\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^2+2=2$ إذن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^2+2-2\ln x=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(x+\frac{2}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$$

لدينا $g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}$ و $x>0$ إذن إشارة $g'(x)$ من إشارة x^2-1

x	0		1		$+\infty$
x^2-1	‖	$-$	0	$+$	

$g(1)=1+2+2\ln 1=3$

جدول تغيرات الدالة g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

2. **استنتج أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $g(x)>0$.**

بما أنّ 3 هي قيمة حدية صغرى للدالة g على المجال $]0;+\infty[$ فإنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $g(x)\geq 3$ ولما $g(x)>0$.

II - f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x+\frac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. **أ - احسب** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x}=0$ فيكون $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\frac{2\ln x}{x}=+\infty$

ولدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{2\ln x}{x}=-\infty$ فيكون $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x+\frac{2\ln x}{x}=-\infty$

aziz_mus1@hotmail.fr

سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك
Mostefai A/Elaziz
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ب ـ بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}=0$ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

ج ـ تحديد وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

لدينا $f(x)-x=\dfrac{2\ln x}{x}$؛ إشارة $f(x)-x$ من نفس إشارة $\ln x$.

$f(x)-x=0$ أي $\ln x=0$ أي $x=1$

$f(x)-x>0$ أي $\ln x>0$ أي $x>1$

$f(x)-x<0$ أي $\ln x<0$ أي $0<x<1$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-x$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية	‖ (C_f) تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

2. أ ـ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=1+2\left[\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}\right]=1+\frac{2-2\ln x}{x^2}=\frac{x^2+2-2\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

ب ـ استنتاج اتجاه تغير الدالة f.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $g(x)>0$ و $x^2>0$ إذن $f'(x)>0$ ولما كانت f الدالة متزايدة تماماً على $]0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3. أ ـ بيّن أنّه يوجد مماس وحيد (T) لـ (C_f)، موازي للمستقيم (Δ).

(T) موازي (Δ) يعني $f'(x_0)=1$.

$f'(x_0)=1$ أي $\dfrac{g(x_0)}{x_0^2}=1$ أي $x_0^2+2-2\ln x_0=x_0^2$ أي $\ln x_0=1$ أي $x_0=e$

إذن (C_f) يقبل مماس وحيد (T) موازي لـ (Δ) في النقطة التي إحداثيتها $\left(e;e+\dfrac{2}{e}\right)$.



aziz_mus1@hotmail.fr

najah213.com · نجاح 213
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

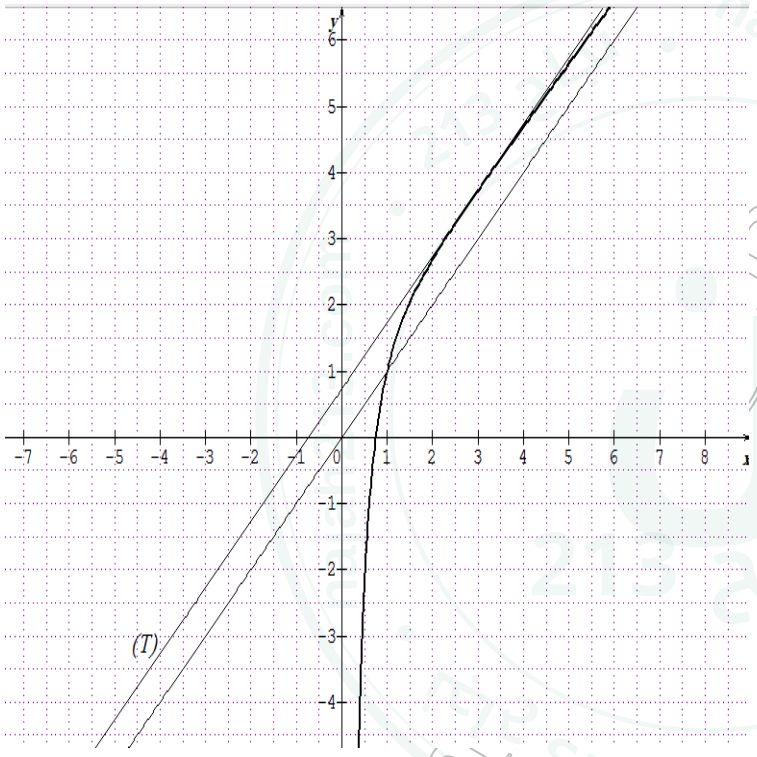
ب كتابة معادلة (Δ).

$y=f'(e)(x-e)+f(e)$ هي $y=(x-e)+e+\frac{2}{e}$ أي $y=x+\frac{2}{e}$.

ج- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $\frac{1}{2}<\alpha<1$

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $[0;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[0,5;1]$ و $f(0,5)\approx -2,27$ ، $f(1)=1$ أي $f(0,5)\times f(1)<0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $]0,5;1[$ حيث $f(\alpha)=0$ بما أنّ الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ فإن α وحيد أي (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $0,5<\alpha<1$

د ـ ارسم كلا من (Δ) و (T) والمنحنى (C_f).



هـ ـ لتكن m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة : $mx-2\ln(x)=0$.

$mx-2\ln(x)=0$ تكافئ $mx=2\ln(x)$

تكافئ $m=\frac{2\ln(x)}{x}$

تكافئ $x+m=x+\frac{2\ln(x)}{x}$ أي $f(x)=x+m$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) ومستقيم ذي المعادلة $y=x+m$

بقراءة بيانية:

إذا كان $m\le 0$ فإن المعادلة تقبل حل واحدا.

إذا كان $0<m<\frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلّين.

إذا كان $m=\frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا.

إذا كان $m>\frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا.

حذار: قيم m العلاقة بينها بمجموع متعرف للدالة f.

التمرين الثالث ☹

I- h دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} h(x)$.

2. بيّن أنّه، من أجل x من $]-1;+\infty[$: $h'(x)=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ ثم شكّل جدول تغيرات h.

3. احسب $h(0)$ واستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x.

aziz_mus1@hotmail.fr

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1
سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com · نجاح 213

najah213.com · نجاح 213

II- f دالة معرّفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

نسمّي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- احسب $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانياً.

ب- باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ برهن أنّ: $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

ج- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

د- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ وفسّر النتيجة بيانياً.

هـ- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

2. بيّن أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكّل جدول تغيّرات f.

3. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين أحدهما معدوم والآخر α حيث $3,3<\alpha<3,4$.

4. ارسم (C_f).

الحل☺

I- h دالة معرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

$\lim\limits_{x\to -1^+} h(x)=-\infty$ ألنّ $\lim\limits_{x\to -1^+}\ln(x+1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to -1^+} x^2+2x=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$ ألنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x=+\infty$

ب- بيّن أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$.

$$h'(x)=2(x+1)+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)(x+1)+1}{x+1}=\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$$

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، $h'(x)>0$ و h متزايدة تماماً على $]-1;+\infty[$.

جدول تغيّرات h.

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$h(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

3. احسب $h(0)$

$$h(0)=0^2+2(0)+\ln(0+1)=0$$

aziz_mus1@hotmail.fr

سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

استنتاج إشارة $h(x)$ **حسب قيم** x.

x	-1		0		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II- f دالة معرّفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

نسمّي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أ - **حساب** $\lim\limits_{x\to-1^{>}} f(x)$ **وتفسير النتيجة بيانيا.**

$\lim\limits_{x\to-1^{>}} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-1^{>}} \ln(x+1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-1^{>}} x+1=0^{+}$

وعليه $\lim\limits_{x\to-1^{>}} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^{>}} x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$.

بتبيان استخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ **عبارة عن أنّ:** $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

نضع $u=e^t$ عليه $t=\ln u$ إذا كان t يؤول إلى $+\infty$ فإنّ u يؤول إلى $+\infty$.

وعليه $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u}{\ln u}=+\infty$ وهي $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{u}{\ln u}}=0$

ج- **استنتاج** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$ وعليه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$

د - **بحساب** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ **واستنتاج وجود مستقيم مقارب مائل لـ** (C_f).

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$ ؛ إذن يوجد مستقيم مقارب مائل (C_f) معادلته $y=x-1$.

هـ - **دراسة وضعية** (C_f) **بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.**

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$.

لأنّ $f(x)-y=\dfrac{-\ln(x+1)}{x+1}$ ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$، $x+1>0$ وعليه إشارة $f(x)-y$ من نفس إشارة $-\ln(x+1)$.

$f(x)-y=0$ كافئ $-\ln(x+1)=0$ كافئ $\ln(x+1)=0$ كافئ $x+1=1$ أي $x=0$

$f(x)-y>0$ كافئ $-\ln(x+1)>0$ كافئ $\ln(x+1)<0$ كافئ $0<x+1<1$ أي $-1<x<0$

$f(x)-y<0$ كافئ $-\ln(x+1)<0$ كافئ $\ln(x+1)>0$ كافئ $x+1>1$ أي $x>0$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$+$	0	$-$	
الوضعية النسبية	‖ (C_f) فوق (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;-1)$		(C_f) تحت (Δ)

2) بيّن أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$.

$$f'(x)=1-\left[\frac{\frac{1}{x+1}(x+1)-\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=1-\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$.

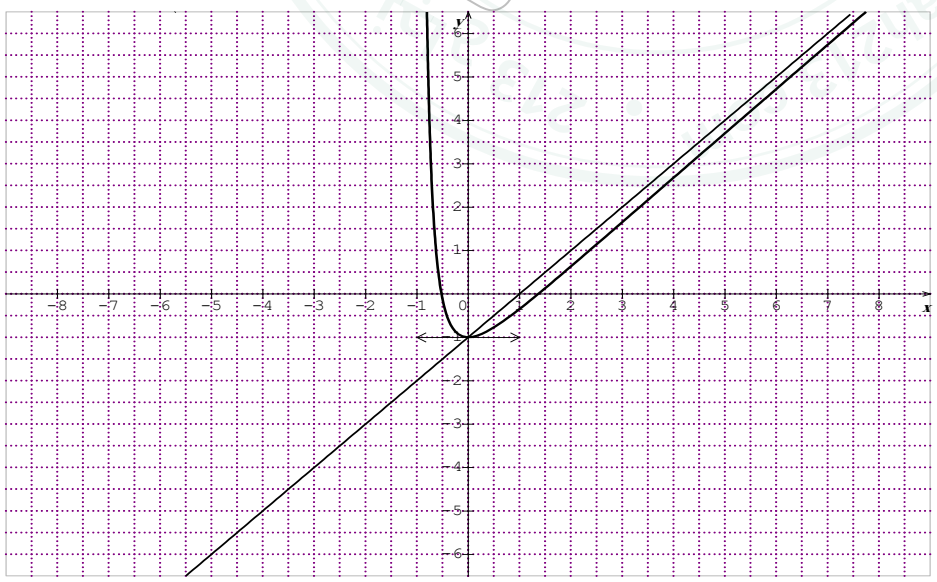
جدول تغيرات f.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

3) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ في نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4.

الدالة f مستمرة ورتيبة تماماً على المجال $[0;+\infty[$ ومنه مستمرة على المجال $[3,3;3,4]$ ولدينا $f(3,3)\approx 1,96$ و $f(3,4)\approx 2,06$ أي $f(3,3)<2<f(3,4)$ وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد قيمة وحيدة α من المجال $]3,3;3,4[$ بحيث $f(\alpha)=2$ أي (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ في نقطة فاصلتها α محصورة بين 3,3 و 3,4.

4) رسم (C_f).



aziz_mus1@hotmail.fr

najah213.com · نجاح 213
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

التمرين الرابع ☹

I- g هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$

1. ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2. أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل على المجال $]0;+\infty[$ حل وحيد α حيث $1,5<\alpha<2$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II- f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتائج هندسياً.

ب) عبر عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ واستنتج تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha^2}$ واستنتج حصر العدد $f(\alpha)$.

3. اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4. ارسم (Δ) و (C_f).

5. ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+m$.

III- h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{|\ln x|}{x^2+1}$

بين كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقاً من (C_f) ثم ارسم (C_h).

الحل ☺

I- g هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$

1. دراسة تغيرات الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها.

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=1$ لأن $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x^2\ln x=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} 1+x^2=1$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x^2}+1-2\ln x\right)=-\infty$$

$$g'(x)=2x-2\left(2x\ln x+\frac{1}{x}x^2\right)=2x-4x\ln x-2x=-4x\ln x$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $-4x<0$ وهي إشارة $g'(x)$ هي عكس إشارة $\ln x$.

من أجل $x\in]0;1[$، $\ln x<0$ وهي $g'(x)>0$

ومن أجل $x\in]1;+\infty[$، $\ln x>0$ وهي $g'(x)<0$

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ وتناقصية تماما على المجال $[1;+\infty[$

aziz_mus1@hotmail.fr

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

جدول تغيرات الدالة g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ 1	↗	2	↘	$-\infty$

2. أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ **تقبل على المجال** $]0;+\infty[$ **حلاً وحيداً** α **حيث** $1,5<\alpha<2$.

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]0;1]$ وتأخذ قيمها في المجال $[1;2]$ و $0\notin[1;2]$ إذن على المجال $]0;1]$، $g(x)\neq 0$.

لدينا الدالة g مستمرة وتناقصية تماماً على المجال $[1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;2]$ و $0\in]-\infty;2]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[1;+\infty[$؛ بما أنّ $g(1,5)\approx 1,42$ و $g(2)\approx -0,55$ أي $g(1,5)\times g(2)<0$ فإنّ $1,5<\alpha<2$.

ب) استنتاج إشارة $g(x)$ **على المجال** $]0;+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

II- f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) حساب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+1=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\times\dfrac{x}{x^2+1}=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1}$.

تفسير النتيجة هندسياً.

لدينا $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$ (محور التراتيب)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ (محور الفواصل) بجوار $+\infty$.

ب) التعبير عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x^2+1)-2x\ln x}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)-2x^2\ln x}{x(x^2+1)^2}=\frac{g(x)}{x(x^2+1)^2}$$

استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $x(x^2+1)^2>0$ وهي إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $g(x)$.

إذن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]0;\alpha]$ وتناقصية تماماً على المجال $[\alpha;+\infty[$.

aziz_mus1@hotmail.fr

Mostefai A/Elaziz
سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

جدول تغيرات الدالة f.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

2. بيّن أنّ $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha^2}$

لدينا $g(\alpha)=0$ تكافئ $1+\alpha^2-2\alpha^2\ln\alpha=0$ أي $\ln\alpha=\dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$

إذن $f(\alpha)=\dfrac{\ln\alpha}{\alpha^2+1}=\dfrac{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{\alpha^2+1}=\dfrac{\alpha^2+1}{2\alpha^2\left(\alpha^2+1\right)}=\dfrac{1}{2\alpha^2}$

استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

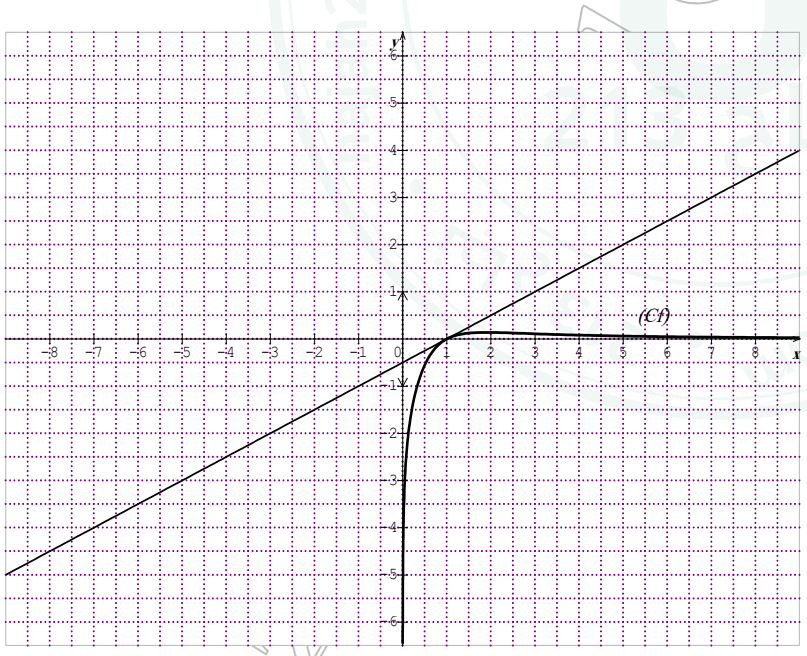
لدينا $1,5<\alpha<2$ معناه $2,25<\alpha^2<4$ تكافئ $4,5<2\alpha^2<8$ تكافئ $\dfrac{1}{8}<\dfrac{1}{2\alpha^2}<\dfrac{1}{4,5}$ أي

$$0,12<f(\alpha)<0,23$$

3. اكتب معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ وهي $y=\dfrac{1}{2}(x-1)$ أي $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

4. رسم (Δ) و (C_f).



5. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+m$.

إذا كان $m<-\dfrac{1}{2}$ فإن المعادلة لا تقبل حلا.

إذا كان $m=-\dfrac{1}{2}$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا.

إذا كان $m>-\dfrac{1}{2}$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين.

III- h الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{|\ln x|}{x^2+1}$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

شرح كيف يمكن رسم (C_h) منحنى الدالة h انطلاقا من (C_f)،

لدينا $\begin{cases} h(x)=\dfrac{\ln x}{x^2+1};\ln x \geq 0 \\ h(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2+1};\ln x \leq 0 \end{cases}$ وهذا يكافئ $\begin{cases} h(x)=f(x);x\in[1;+\infty[\\ h(x)=-f(x);x\in]0;1] \end{cases}$.

إذن في المجال $[1;+\infty[$ يكون (C_h) منطبق على (C_f)

وفي المجال $]0;1]$، (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

التمرين الخامس☹

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$، و (C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الطول $2cm$.

1. أ - احسب $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا.

ب - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

جـ - ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2. أ - بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف E يطلب تعيين إحداثياتها.

ب - اكتب معادلة المماس (D) لـ (C) الذي شعاع توجيهه $\vec{i}$.

3. ارسم (Δ)، (D) و (C).

4. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة $m^x=x$.

الحل☺

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$، و (C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الطول $2cm$.

1. أ - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x}=-\infty$$ لأن $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} x=0^+$.

تفسير النتيجة بيانيا.

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ فإن (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ (محور الفواصل)

و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ وهذا يقبل (C) مستقيم مقارب معادلته $x=0$ (محور التراتيب)

aziz_mus1@hotmail.fr

سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

بتبيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

ج- دراسة تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $1-\ln x$.

$f'(x)=0$ معناه $1-\ln x=0$ أي $\ln x=1$ أي $x=e$.

$f'(x)>0$ معناه $1-\ln x>0$ أي $\ln x<1$ أي $0<x<e$

$f'(x)<0$ معناه $1-\ln x<0$ أي $\ln x>1$ أي $x>e$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على $]0;e]$ وتناقصية تماما على $[e;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

2. أ- بيّن أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف E يطلب تعيين إحداثياها.

$$f''(x)=\frac{\frac{-1}{x}x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-1-2+2\ln x}{x^3}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $x^3>0$ وإشارة $f''(x)$ من نفس إشارة $-3+2\ln x$.

$f''(x)=0$ معناه $-3+2\ln x=0$ أي $\ln x=\frac{3}{2}$ أي $x=\sqrt{e^3}$

$f''(x)>0$ معناه $-3+2\ln x>0$ أي $\ln x>\frac{3}{2}$ أي $x>\sqrt{e^3}$

x	0		$\sqrt{e^3}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$f''(x)$ تنعدم عند $\sqrt{e^3}$ وتغير إشارتها من أجل هذه القيمة و $\sqrt{e^3}$ فاصلة نقطة انعطاف $E\left(\sqrt{e^3};f\left(\sqrt{e^3}\right)\right)$ للمنحنى (C).

ج- كتابة معادلة المماس (D) لمنحنى (C) الذي يشمل المبدأ O.

معادلة المماس من الشكل $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$O\in(D)$ معناه $0=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$ أي $-x_0\left(\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}\right)+\frac{\ln x_0}{x_0}=0$ أي $\frac{-1+2\ln x_0}{x_0}=0$

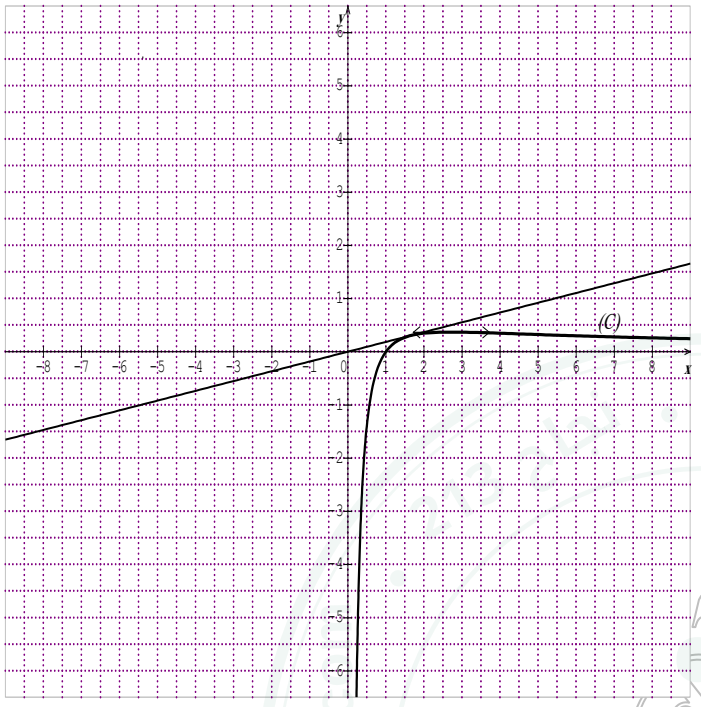
aziz_mus1@hotmail.fr

Mostefai A/Elaziz
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ومنه $\ln x_0 = \frac{1}{2}$ أي $x_0 = \sqrt{e}$

إذن معادلة المماس هي $y = f'(\sqrt{e})x$ أي $y = \frac{1}{2e}x$

3. رسم (D) و (C).



4. المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب m عدد حلول المعادلة $m^x = x$.

$m^x = x$ يكافئ $\ln m^x = \ln x$ يكافئ $x \ln m = \ln x$

يكافئ $\ln m = \frac{\ln x}{x}$ أي $f(x) = \ln m$

إذا كان $0 < m \leq 1$ فإن $\ln m \leq 0$ وبالتالي المعادلة تقبل حل وحيد.

إذا كان $1 < m < e^{\frac{1}{e}}$ فإن $0 < \ln m < \frac{1}{e}$ وبالتالي المعادلة تقبل حلين متمايزين.

إذا كان $m = e^{\frac{1}{e}}$ فإن $\ln m = \frac{1}{e}$ وبالتالي المعادلة تقبل حل مضاعف.

إذا كان $m > e^{\frac{1}{e}}$ فإن $\ln m > \frac{1}{e}$ وبالتالي المعادلة لا تقبل حلول.

التمرين السادس ☹

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g.
2. احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$

1. أ- احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ب- احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2. أثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

ب شكل جدول تغيرات الدالة f.

3. أثبت أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f).

ب- ادرس وضع (C_f) بالنسبة لـ (D).

4 أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1 - \frac{1}{e}$ مماس لـ (C_f) في نقطة A يطلب تعيين إحداثياتها.

5. ارسم (Δ)، (D) و (C_f).

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

najah213.com · نجاح 213
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

التمرين ☺

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-x^2-\ln x$.

1. دراسة تغيرات الدالة g.

g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ومن أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)=-2x-\frac{1}{x}$

بما أن x موجب تماما على $]0;+\infty[$، فإن $g'(x)<0$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$.

2. حساب $g(1)$ ثم استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

$g(1)=1-1^2-\ln 1=0$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$

1. أ - حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1-\frac{\ln x}{x}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$.

ب - حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln x}{x}=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$.

تفسير هندسي.

المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=0$ بجوار 0 على يمين 0.

2. أ تبيين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=1-\left[\frac{\frac{1}{x}(x)-\ln x}{x^2}\right]=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}=\frac{-g(x)}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

من أجل $x\in]0;1[$، $g(x)>0$ ومنه $f'(x)<0$.

من أجل $x\in]1;+\infty[$، $g(x)<0$ ومنه $f'(x)>0$

إذن الدالة f متناقصة تماما على $]0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$.

ب - جدول تغيرات الدالة f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Mostefai A/Elaziz
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

3. أثبت أنّ المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{\ln x}{x}=0$ ومنه المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب ـ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).

$f(x)-(x-1)=\dfrac{-\ln x}{x}$ ومنه $f(x)-(x-1)$ من إشارة $-\ln x$.

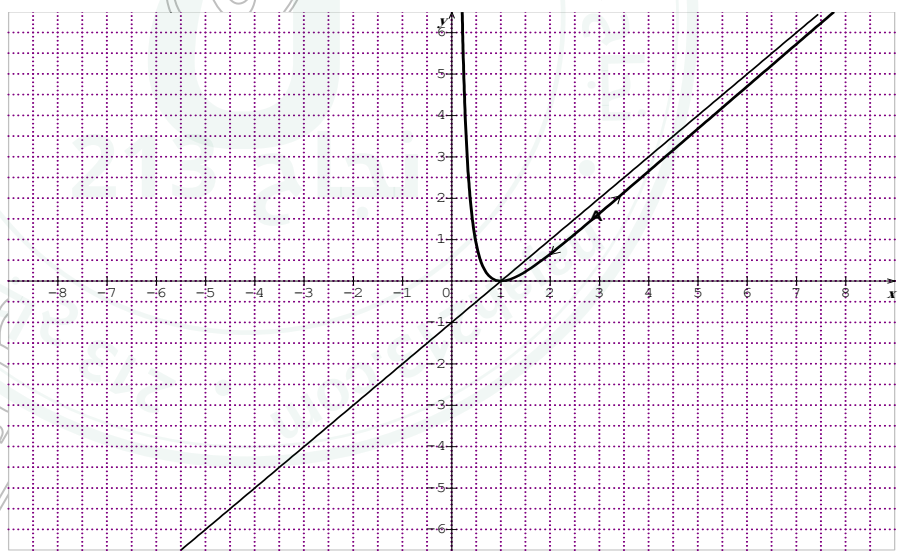
x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$+$	0	$-$	
الوضعية النسبية	‖ (C_f) فوق (D)		(C_f) يقطع (D) في النقطة $A(1;0)$		(C_f) تحت (D)

4. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1-\dfrac{1}{e}$ مماس للمنحنى (C_f) في نقطة وحيدة A يطلب تعيين إحداثيتيها.

$f'(x_0)=1$ يعني $\dfrac{-g(x)}{x^2}=1$ أي $x^2-1+\ln x=x^2$ أي $\ln x=1$ أي $x=e$

$f(e)=e-1-\dfrac{1}{e}$ و $y=e-1-\dfrac{1}{e}$ إذن (Δ) يطلب (C_f) في $A\left(e;e-1-\dfrac{1}{e}\right)$

5. ارسم (Δ)، (D) و (C_f).



التمرين الرابع ☹

ليكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\dfrac{2\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسّر النتائج هندسيًا.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

aziz_mus1@hotmail.fr

سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك
Mostefai A/Elaziz
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

2) أ) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=1$.

ب) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

ج-) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلاً وحيداً α، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

3) أنشئ (T) و (C_f).

4) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}$.

ولتكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$. ماذا تستنتج ؟

ب) أنشئ المنحنى (C_h) إنطلاقا من (C_f).

ج-) نناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.

الحل ☺

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\dfrac{2\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) حساب $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ وهذه $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}1+\dfrac{2\ln x}{x}=-\infty$

لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ وهذه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{2\ln x}{x}=1$

تفسير النتيجة هندسياً.

لأنّ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$ (محور التراتيب).

لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=1$ بجوار $+\infty$.

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f **على المجال** $]0;+\infty[$.

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{2}{x}\right)x-2\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

لأنّ من أجل كل عدد حقيقي x، $x^2>0$ وهذه إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-\ln x$.

$f'(x)=0$ تكافئ $1-\ln x=0$ أي $\ln x=1$ أي $x=e$.

$f'(x)>0$ تكافئ $1-\ln x>0$ أي $\ln x<1$ أي $0<x<e$

$f'(x)<0$ تكافئ $1-\ln x<0$ أي $\ln x>1$ أي $x>e$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على $]0;e]$ وتقبل قيمة قصوى على $[e;+\infty[$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$1+\frac{2}{e}$	↘	1

2) أ) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=1$.

لدينا $f(x)-1=\frac{2\ln x}{x}$

$f(x)-1=0$ معناه $\frac{2\ln x}{x}=0$ كافئ $\ln x=0$ أي $x=1$.

$f(x)-1>0$ معناه $\frac{2\ln x}{x}>0$ كافئ $\ln x>0$ أي $x>1$

$f(x)-1<0$ معناه $\frac{2\ln x}{x}<0$ كافئ $\ln x<0$ أي $0<x<1$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-1$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية	‖	(C_f) تحت (Δ)	$A(1;1)$ نقطة التقاء (C_f) و (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

ب) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي $y=2(x-1)+1$ وهذه $y=2x-1$

ج) بيّن أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α في المجال $]0;1[$، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

الدالة f مستمرة على المجال $]0;1[$ فهي مستمرة على المجال $\left[e^{-0,4};e^{-0,3}\right]$ ولدينا $f(e^{-0,4})\approx -0,19$،

$f(e^{-0,3})\approx 0,19$ أي $f(e^{-0,4})\times f(e^{-0,4})<0$ وحسب مبرهنة القيم المتوسطة توجد عدد حقيقي α من المجال $\left[e^{-0,4};e^{-0,3}\right]$ بحيث $f(\alpha)=0$ وبما أنّ الدالة f متزايدة تماما على $]0;1[$ فإنّ α وحيد.

4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}$.

ليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) اكتب أنّه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$. ماذا تستنتج ؟

ليكن x عددا حقيقيا غير معدوم:

$$h(x)-h(-x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|-x|}{|-x|}=\frac{2\ln|x|}{|x|}-\frac{2\ln|x|}{|x|}=0$$

من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا $-x\in\mathbb{R}^*$

Mostefai A/Elaziz
najah213.com · نجاح 213
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

لدينا $h(x)-h(-x)=0$ وهذه $h(x)=h(-x)$ إذن الدالة h زوجية.

ب) الرسم

جـ) المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.

$\ln x^2=(m-1)|x|$ تكافئ $m=\frac{\ln x^2}{|x|}+1$ تكافئ $m=\frac{2\ln|x|}{|x|}+1$ أي $h(x)=m$.

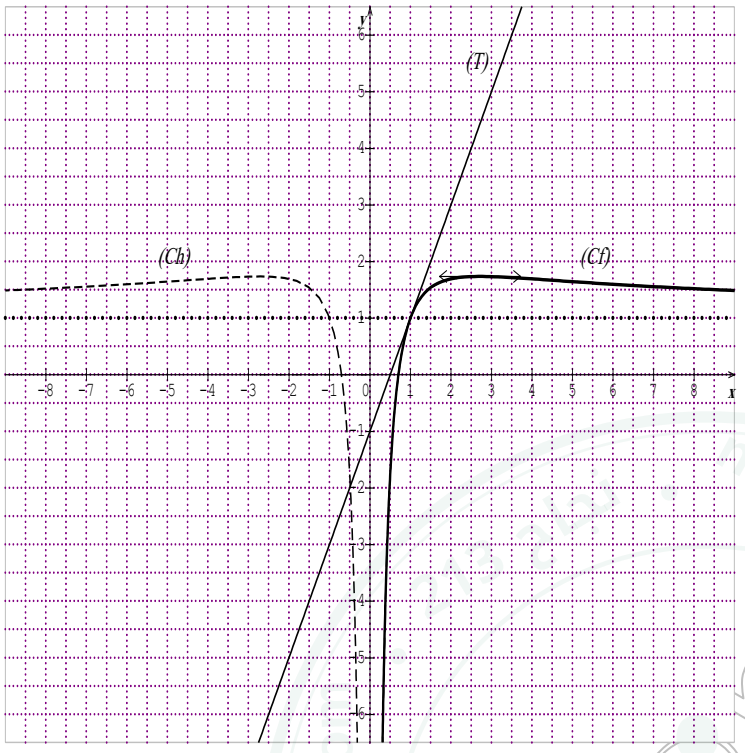
حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_h) مع المستقيم ذي المعادلة $y=m$.

إذا كان $m\le 1$ فإن المعادلة لا تقبل حلول.

إذا كان $m<1+\frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m=1+\frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا.

$m>1+\frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين.



التمرين الثاني ☹

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أنه يمكن كتابة $f(x)$، على الشكل: $f(x)=-\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{x}\right)$.
2. برهن أن الدالة f زوجية.
3. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
4. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
5. بين أن المستقيم (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلة لكل منهما.
6. ارسم (Δ)، (Δ') و (C_f).
7. لتكن g الدالة المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$.

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$، $g(x)=f(\ln x)$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g.

Mostefai A/Elaziz
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الحل☺

تعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. **تبين أن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{x}\right)$ هي نفسها الدالة $f(x)$.**

$$f(x)=\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{-x}\right)=f(x)=\frac{1}{2}x+\ln e^{-x}\left(e^{x}+1\right)$$
$$=\frac{1}{2}x+\ln e^{-x}+\ln\left(e^{x}+1\right)$$
$$=\frac{1}{2}x-x+\ln\left(e^{x}+1\right)$$
$$=-\frac{1}{2}x+\ln\left(e^{x}+1\right)$$

2. **بإثبات أن الدالة f زوجية.**

من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$ ولدينا $f(-x)=-\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{x}\right)=f(x)$ وهذه الدالة f زوجية.

3. **حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.**

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{x}\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+e^{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}x=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(-x)=\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=+\infty$

4. **دراسة تغيرات الدالة f.**

$$f'(x)=\frac{-1}{2}+\frac{e^{x}}{1+e^{x}}=\frac{-1-e^{x}+2e^{x}}{2\left(e^{x}+1\right)}=\frac{e^{x}-1}{2\left(e^{x}+1\right)}$$

من أجل كل عدد حقيقي x، $2\left(e^{x}+1\right)>0$ وهذه إشارة $f'(x)$ من إشارة $e^{x}-1$.

$f'(x)=0$ تعني $e^{x}-1=0$ أي $e^{x}=1$ أي $x=0$

$f'(x)>0$ تعني $e^{x}-1>0$ أي $e^{x}>1$ أي $x>0$

$f'(x)<0$ تعني $e^{x}-1<0$ أي $e^{x}<1$ أي $x<0$

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\ln 2$	↗	$+\infty$

aziz_mus1@hotmail.fr

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

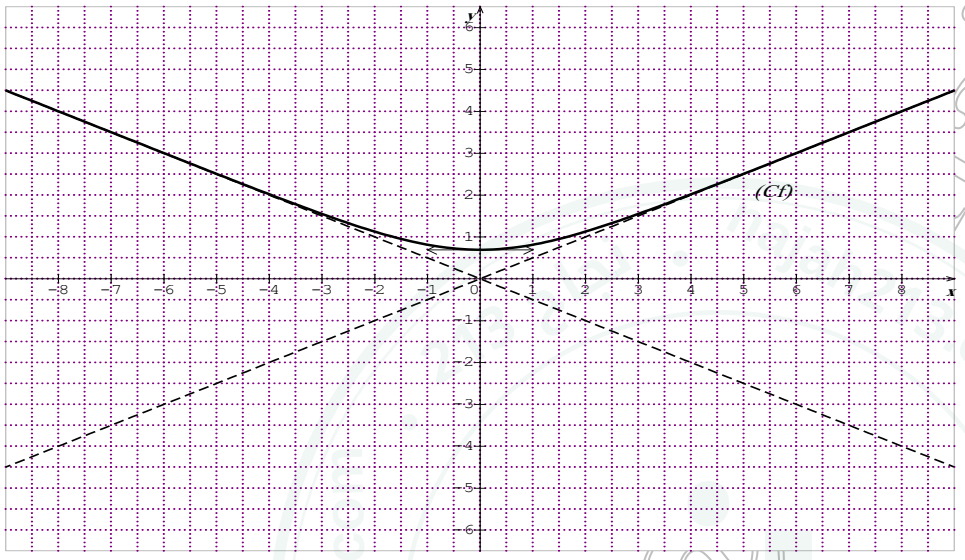
najah213.com · نجاح 213

5. بيّن أنّ المستقيم (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\frac{1}{2}x=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)=0$ إذن (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ مستقيم مقارب (Δ) معادلته $y=\frac{1}{2}x$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+e^{x}\right)=0$ إذن (C_f) يقبل بجوار $-\infty$ مستقيم مقارب (Δ') معادلته $y=-\frac{1}{2}x$.

6. ارسم (Δ)، (Δ') و (C_f).



7. لتكن g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$.

أ - تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$، $g(x)=f(\ln x)$.

لدينا $g(x)=\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)=\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln x=-\frac{1}{2}\ln x+\ln\left(e^{\ln x}+1\right)=f(\ln x)$

- استنتج اتجاه تغير الدالة g.

نلاحظ أنّ الدالة g هي مركب الدالة $\ln$ متبوع قبل الدالة f $(g=f\circ\ln)$

لدينا الدالة $\ln$ موجبة ومتزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]0;+\infty[$ والدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ إذن الدالة g لها نفس اتجاه التغير على المجال $]1;+\infty[$ أي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

ب - جدول تغيرات الدالة g.

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$\ln 2$	$+\infty$

تمرين إضافي ☹

I- الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$

1) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

aziz_mus1@hotmail.fr

Mostefai A/Elaziz
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

2) استنتج أنّه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$، $g(x)>0$.

II- f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ فسّر النتيجة بيانيًا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$، حيث f' هي المشتقة الثانية للدالة f.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

ج- بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلًا وحيدًا α في المجال $]-1;+\infty[$ ثمّ تحقّق أن $0<\alpha<0,5$.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4) نقبل أنّ المستقيم (T) ذا المعادلة: $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$، مماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_0.

أ) احسب x_0.

ب) أرسم المستقيم (T) ثمّ (C_f).

ج- عيّن بيانيًا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تكون للمعادلة $f(x)=x+m$ حلّان متمايزان.

الحل☺

I- g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$

1) دراسة تغيّرات الدالة g.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} x^2+2x+4-2\ln(x+1)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} 2\ln(x+1)=-\infty$ و

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} x^2+2x+4=3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+1\left(\dfrac{x^2+2x+4}{x+1}-2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=2x+2-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2x^2+4x}{x+1}=\dfrac{2x(x+2)}{x+1}$

من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$، $x+1>0$ و $x+2>0$ وعليه إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة x.

إذن الدالة g متناقصة تمامًا على المجال $[-1;0]$ ومتزايدة تمامًا على المجال $[0;+\infty[$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

جدول تغيرات الدالة g .

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$ ‖	↘	4	↗	$+\infty$

2) استنتج أنه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$، $g(x)>0$.

نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$، $g(x)\geq 4$ وبالتالي $g(x)>0$.

II- f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1) أ) حساب $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1} x-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=-\infty \text{ وهي } \lim_{x\to -1}\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$$

تفسير النتيجة بيانياً.

لدينا $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=-1$.

ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=x-\frac{1}{x+1}+\frac{2\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln(x+1)}{x+1}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$

2) أ) تبين أنه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

$$f'(x)=1-\frac{\frac{-2}{x+1}(x+1)-1+2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=1-\frac{-3+2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x+4-2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

لدينا من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$، $g(x)>0$ و $(x+1)^2>0$ إذن $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-1;+\infty[$

aziz_mus1@hotmail.fr

سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

جدول تغيرات الدالة f.

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

ج) تبيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-1;+\infty[$ ثمّ تحقق أن $0<\alpha<0,5$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]-1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ إذن من أجل كل عدد حقيقي k المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]-1;+\infty[$ وبالخصوص المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-1;+\infty[$ بما أنّ $f(0,5)\times f(0)<0$ فإنّ $0<\alpha<0,5$.

3) أ) تبيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x+1}+2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$ وهذا يعني أنّ المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

لدينا $f(x)-x=-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=\dfrac{2\ln(x+1)-1}{x+1}$ وهذا يعني أنّ إشارة $f(x)-x$ من نفس إشارة $2\ln(x+1)-1$

$f(x)-x=0$ يعني $2\ln(x+1)-1=0$ أي $\ln(x+1)=\dfrac{1}{2}$ أي $x=\sqrt{e}-1$

$f(x)-x>0$ يعني $2\ln(x+1)-1>0$ أي $\ln(x+1)>\dfrac{1}{2}$ أي $x>\sqrt{e}-1$

x	-1		$\sqrt{e}-1$		$+\infty$
$f(x)-x$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية	‖ (C_f) تحت (Δ)			(C_f) فوق (Δ)	

و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي إحداثياها $\left(\sqrt{e}-1;\sqrt{e}-1\right)$.

4) نبيّن أنّ المستقيم (T) ذا المعادلة: $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0.

أ) حساب x_0.

المستقيم (T) حاملٌ لمماس معامله 1 وهذا يعني $f'(x_0)=1$.

$f'(x_0)=1$ يعني $\dfrac{g(x_0)}{(x_0+1)^2}=1$ أي $x_0^{\,2}+2x_0+1$ أي $x_0^{\,2}+2x_0+4-2\ln(x_0+1)=x_0^{\,2}+2x_0+1$ أي $\ln(x_0+1)=\dfrac{3}{2}$

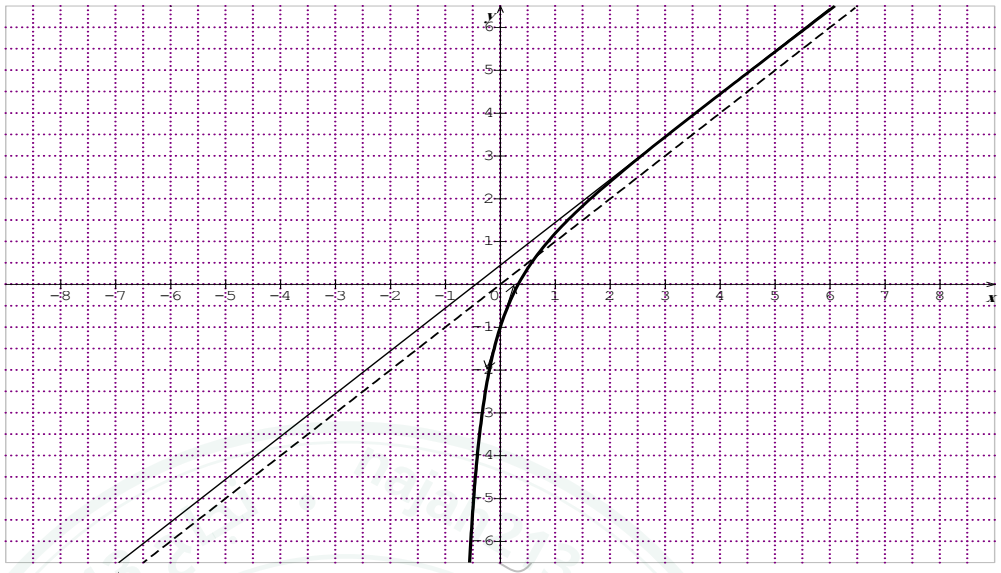
أي $x_0=e^{\frac{3}{2}}-1$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ب) أنشئ المستقيم (T) ثم المنحنى (C_f).



ج) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$ في المجال $\left]0;\frac{2}{\sqrt{e^3}}\right[$.

التمرين العاشر ☹

I لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=2x-1-\ln x$

1. ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
2. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.
3. تحقق أن $g(1)=1$ وبين أن المعادلة $g(x)=1$ تقبل حلا آخر α حيث $0,1<\alpha<0,3$.

II نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x^2-x\ln x$ و $f(0)=0$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ - احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}$ وفسر النتيجة هندسيا.

ب - $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2. أ) بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$.

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج - بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها.

د - عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسر النتيجة بيانيا.

3. أ) تحقق أن $f(x)=x\left[g(x)-x+1\right]$ ثم احسب $f(\alpha)$.

ب - أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.

4. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب كتابة معادلة لكل منهما.

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefai A/Elaziz

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

5. ارسم (T) ، (T') والمنحنى (C_f).

الحل☺

I ـ لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=2x-1-\ln x$

1. دراسة تغيرات الدالة g

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 2x-1-\ln x=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة: $g'(x)=2-\frac{1}{x}=\frac{2x-1}{x}$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x-1$ لأن $x>0$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

جدول تغيرات الدالة g.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\ln 2$	↗	$+\infty$

2. استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى وهي $\ln 2$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ $g(x)\geq \ln 2$ ولما كان $\ln 2>0$ فإن $g(x)>0$.

3. تحقق أن $g(1)=1$

$g(1)=2(1)-1-\ln 1=1$

تبين أن المعادلة $g(x)=1$ تقبل حل آخر α حيث $0,1<\alpha<0,3$.

الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ وبالخصوص على المجال $[0,1;0,3]$ ولدينا $g(0,1)\approx 1,5$ ، $g(0,3)\approx 0,8$ أي $g(0,3)<1<g(0,1)$ وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,1;0,3[$ بحيث $g(\alpha)=1$.

II ـ نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x^2-x\ln x$ و $f(0)=0$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

1. أ - حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x^2 - x\ln x}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x - \ln x = +\infty$$

التفسير: الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين 0 وتقبل مماسا موازيا لحامل محور التراتيب بجوار (C_f).

ب - حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

2. أ - بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = g(x)$.

$$f'(x) = 2x - \left[\ln x + \frac{1}{x}x\right] = 2x - 1 - \ln x = g(x)$$

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $g(x) > 0$ وهذا يعني $f'(x) > 0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↗	$+\infty$

ج- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها.

لدينا $f''(x) = g'(x)$ وهذا يعني أنّ $f''(x)$ هي إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$f''(x)$ تنعدم من أجل $\frac{1}{2}$ وتتغير من إشارتها وهذا يعني أنّ النقطة $\omega\left(\frac{1}{2};f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

د - تعيين دون حساب $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ وتفسير النتيجة بيانيا.

الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وبالأخص عند α لدينا:

$\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = g(\alpha) = 1$ ؛ وتفسير ذلك وجود مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها α معامل توجيهه يساوي 1.

3. أ - إثبات أنّ $f(x) = x\left[g(x) - x + 1\right]$،

$$f(x) = x^2 - x\ln x = x(x - \ln x) = x(2x - 1 - \ln x - x + 1) = x\left[g(x) - x + 1\right]$$

aziz_mus1@hotmail.fr

Mostefai A/Elaziz
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ب- حساب $f(\alpha)$.

$f(\alpha)=\alpha\left[g(\alpha)-\alpha+1\right]=\alpha(1-\alpha+1)=\alpha(2-\alpha)$.

ب- تحصر $f(\alpha)$.

$0,1<\alpha<0,3$ يعني $-0,3<-\alpha<-0,1$ كذلك $1,7<2-\alpha<1,9$

و منه $1,7\times0,1<\alpha(2-\alpha)<1,9\times0,3$ أي $0,17<f(\alpha)<0,57$.

4. إثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') معامل توجيه كلّ منهما يساوي 1.

$f'(x_0)=1$ تكافئ $g(x_0)=1$ و منه $x_0=1$ أو $x_0=\alpha$

إذن (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') معامل توجيه كلّ منهما يساوي 1 عندما يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين اللتين فاصلتاهما 1 و α.

كتابة معادلة كلّ منهما.

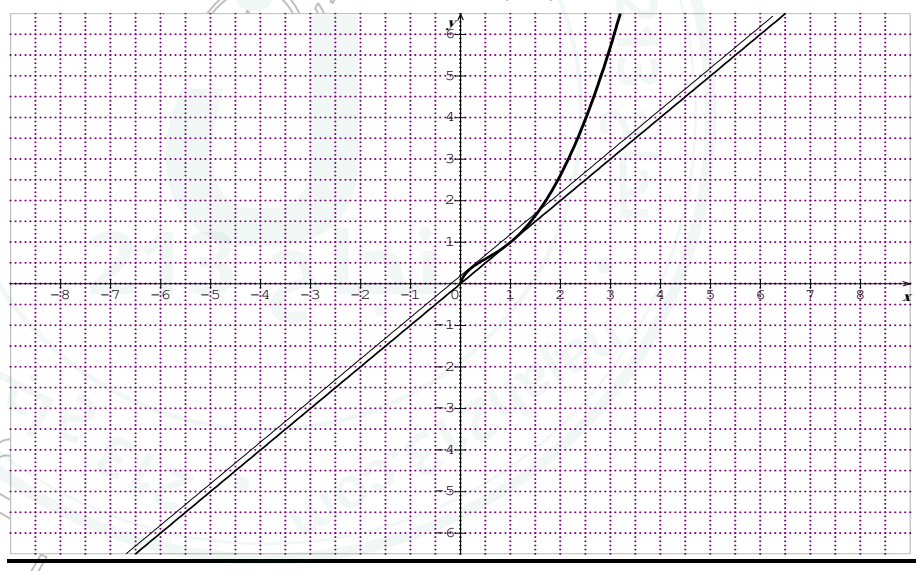
معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $y=(x-1)+1$ أي $(T):y=x$

معادلة المماس (T') عند النقطة ذات الفاصلة α.

$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ و منه $y=(x-\alpha)+\alpha(2-\alpha)$ أي $(T'):y=x-\alpha^2+\alpha$.

5. رسم (T)، (T') و المنحنى (C_f).



التمرين الاختياري ☹

لتكن f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=1-\dfrac{\ln x^2}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس تغيرات الدالة f.

2. بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $(\Delta):y=1$ في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

3. احسب $f(x)+f(-x)$، ماذا تستنتج ؟

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

4. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]-0,71;-0,70[$

5. بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل المماس (T) في النقطة $A(0;1)$ ومماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب يشكلان زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ راديان.

6. أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f).

7. نناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx+1$

8. h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ حيث: $h(x)=1+\frac{\ln x^2}{|x|}$.

أ) بيّن أنّ h دالة زوجية.

ب) دون دراسة تغيرات h، أرسم (C_h)، في نفس المعلم.

الحل☺

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=1-\frac{\ln x^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. دراسة تغيرات الدالة f.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 1-\frac{2\ln -x}{x}=\lim_{t\to+\infty} 1+\frac{2\ln t}{t}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2\ln x}{x}=1$$

لدينا $\lim_{x\to 0^<} \ln x^2=-\infty$ و $\lim_{x\to 0^<} \frac{\ln x^2}{x}=+\infty$ إذن $\lim_{x\to 0^<} f(x)=\lim_{x\to 0^<} 1-\frac{\ln x^2}{x}=-\infty$

لدينا $\lim_{x\to 0^>} \ln x^2=-\infty$ و $\lim_{x\to 0^>} \frac{\ln x^2}{x}=-\infty$ إذن $\lim_{x\to 0^>} f(x)=\lim_{x\to 0^>} 1-\frac{\ln x^2}{x}=+\infty$.

$$f'(x)=-\frac{\left(\frac{2}{x}\right)x-\ln x^2}{x^2}=\frac{\ln x^2-2}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $\ln x^2-2$.

$f'(x)=0$ يعني $\ln x^2-2=0$ أي $\ln x^2=2$ أي $x^2=e^2$ أي $x=e$ أو $x=-e$

$f'(x)>0$ يعني $\ln x^2-2>0$ أي $\ln x^2>2$ أي $x^2>e^2$ أي $x>e$ أو $x<-e$

إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على كل من $]-\infty;-e]$ و $[e;+\infty[$ ومتناقصة تماما على كل من $[-e;0[$ و $]0;e]$.

aziz_mus1@hotmail.fr

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

خ د ل ت غ ي ر ا ت ا ل د ا ل ة f.

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$\frac{e+2}{e}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{e-2}{e}$	↗	1

2. بإثبات أنّ المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $(\Delta): y=1$ في وقطة ه ٌ ع ٍ ت ه ٌ ط ة إحداثياتها.

$f(x)=1$ يعني $1-\frac{\ln x^2}{x}=1$ أي $\ln x^2=0$ أي $x^2=1$ أي $x=1$ أو $x=-1$

إذً $(C_f)\cap(\Delta)=\{A(1;1),B(-1;1)\}$

3. حساب $f(-x)+f(x)$.

$$f(-x)+f(x)=1-\frac{\ln(-x)^2}{-x}+1-\frac{\ln x^2}{x}=2+\frac{\ln x^2}{x}-\frac{\ln x^2}{x}=2$$

أي م ٌ د ن $x\in\mathbb{R}^*$ م ٌ د ن $-x\in\mathbb{R}^*$ و ٌ ح ُ ظ ّ ل ُ م ط ه ٌ ع و $f(-x)+f(x)=2$ ن ُ ظ ّ م ُ ل ي ٌ ص ق ي ٌ ن ُ ظ ّ م ه ٌ ح ُ ظ ّ ل ُ م ط ه ٌ $\omega(0;1)$ ي أ ج م (C_f).

4. بإثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α على المجال $]-0,71;-0,70[$

لدّالة f متناقصة تماماً على المجال $[-0,71;-0,70]$ لأنّ $f(-0,71)\approx 0,04$ ، $f(-0,70)\approx -0,02$ أي $f(-0,71)\times f(-0,70)<0$ ومن ب س ح ن ة ر ب م ة ل ق ي م ت س ط و ج د ع د ح ق ي ٌ ق ٌ و ح ٌ د α ف ي ٌ ل م ج ا ل $]-0,71;-0,70[$ ب ح ٌ ث $f(\alpha)=0$.

5. بإثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماساً (T) ش ٌ م ل ل ن ق ط ة $A(0;1)$ و ٌ م س ّ ل ل م ن ح ن ى (C_f) ف ي ٌ ن ق ط ت ٌ ن.

لدّينا معادلة المماس (T) من الشكل: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$A(0;1)\in(T)$ معناه $1=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$ أي $-x_0\left(\frac{\ln x_0^2-2}{x_0^2}\right)+1-\frac{\ln x_0^2}{x_0}=1$

أي $\left(\frac{-\ln x_0^2+2}{x_0}\right)-\frac{\ln x_0^2}{x_0}=0$ أي $\frac{-2\ln x_0^2+2}{x_0}=0$ أي $\ln x_0^2=1$ وهذه $x_0^2=e$

أي $x_0=\sqrt{e}$ أو $x_0=-\sqrt{e}$. إذن (C_f) ق ب ل م م ا س ن ش ٌ م ا ل ن ل ل ق ط ة $A(0;1)$ ع ن د ال ق ي م ت ي ن ل ل ت ّ ن ف ط ر ل ت ه ٌ م ا $\sqrt{e}$ و $-\sqrt{e}$ ل ذ ل ك ا ن $f'(\sqrt{e})=-\frac{1}{e}$ و $f'(-\sqrt{e})=-\frac{1}{e}$ إذن ل م م ا س ا ن م ت و ا ز ي ا ن و ل ل ت ا ل ي ه م ا ت ت ط ا ب ق ا ن أي أنّ ل م ن ح ن ى (C_f) ق ب ل م م ا س ا (T) ش ٌ م ل ل ن ق ط ة $A(0;1)$ و ٌ م س ّ ل ل م ن ح ن ى (C_f) ف ي ن ق ط ت ي ن ل ل ت ّ ن إ ح د ا ه ٌ م ا $\left(\sqrt{e};f(\sqrt{e})\right)$ و $\left(-\sqrt{e};f(-\sqrt{e})\right)$.

ك ت ا ب ة م ع ا د ل ة ل م م ا س (T).

$y=f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e})+f(\sqrt{e})$ وهذه $y=\frac{-1}{e}x+1$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

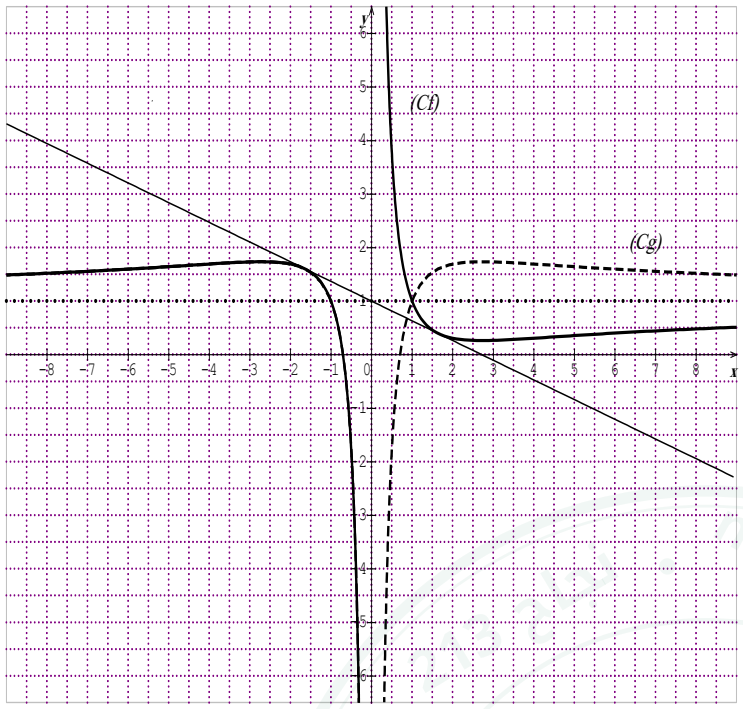
6. المستقيم (T) مماس لـ (C_f).

أ) بين أنه توجد قيمة وحيدة للعدد الحقيقي m حتى يكون (T) مماس لـ (C_f) في نقطة فاصلتها 1.

معادلة المماس (T) هي: $y = f'(1)(x-1)+f(1)$

$f'(x) = m$ و $f(1) = m+1$

$y = m(x-1)+m+1 = mx+1$



إذا كان $m < -\frac{1}{e}$ فإن المعادلة ليس لها حلول.

إذا كان $m = -\frac{1}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا.

إذا كان $-\frac{1}{e} < m < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين.

إذا كان $m \geq 0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا.

8. h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$.

أ) بين أن h دالة زوجية.

من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $-x \in \mathbb{R}^*$.

$h(-x) = 1 + \frac{\ln(-x)^2}{|-x|} = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|} = h(x)$ إذن

$$\begin{cases} h(x) = f(-x); x > 0 \\ h(x) = f(x); x < 0 \end{cases}$$ وفيه $$\begin{cases} h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{x}; x > 0 \\ h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{-x}; x < 0 \end{cases}$$

إذن (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $]-\infty;0[$ وبما أن h زوجية فإن (C_h) نظيرها بالنسبة إلى محور التراتيب.

الجزء الثاني: (غير مبرمج)

I) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب نهايتي الدالة f عند 0 وعند $+\infty$ وفسر النتيجة هندسيا.
2. ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
3. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
4. بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها.

aziz_mus1@hotmail.fr

Mostefai A/Elaziz
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

5. بيّن أنّ المنحنى (C) يقطع المستقيم (d) ذا المعادلة $y=\frac{1}{2}$ في نقطة فاصلتها α و β حيث: $0,4<\alpha<0,5$ و $5,3<\beta<5,4$.

6. ارسم كلا من (T) و (C).

نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $g(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x^2}{2x}$. ولتكن (γ) تمثيلها البيانيّ في المعلم السابق.

أ. بيّن أنّ الدالة g فردية.

2. بيّن أنّ $g(x)=f(x)$ على مجموعة يطلب تحديدها.

3. دون دراسة الدالة g شكل جدول تغيّراتها.

4. اعتمادا على المنحنى (C) شرح كيفية رسم (γ) ثمّ ارسمه.

الحل☺

I) الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$

(C) تمثيلها البيانيّ في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. حساب نهايات الدالة f عند 0 وعند $+\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}1+\ln x=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1+\ln x}{x}=-\infty$ وهي

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}=0$ وهي

تفسير النتائج هندسيا

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=-\infty$ لأنّ إذن المستقيم (d) ذو المعادلة $x=0$ مقارب (محور التراتيب)

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ لأنّ إذن المستقيم (d) ذو المعادلة $y=0$ مقارب (محور الفواصل)

2. دراسة اتجاه تغيّر الدالة f.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ لأنّ: $f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)x-1-\ln x}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-\ln x$.

من أجل $x\in]0;1[$، $\ln x<0$ وهي $f'(x)>0$

ومن أجل $x\in]1;+\infty[$، $\ln x>0$ وهي $f'(x)<0$ و $f'(1)=0$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على $]0;1]$ ومتناقصة تماما على $[1;+\infty[$.

جدول التغيّرات.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1 — najah213.com
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

3) كتابة معادلة المماس (T) لـ (C) عند النقطة ذات الترتيب 0.

$f(x_0)=0$ معناه $\frac{1+\ln x_0}{x_0}=0$ كافئ $1+\ln x_0=0$ أي $x_0=e^{-1}$

و $(T): y=f'(e^{-1})(x-e^{-1})+f(e^{-1})$ أي $y=e^2(x-e^{-1})$ و منه $(T): y=e^2x-e$

4) التبيّن أنّ المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياها.

لدراسة تقعر المنحنى (C) نبيّن أنّ f'' تنعدم على $]0;+\infty[$: لدينا $f''(x)=\frac{\left(\frac{-1}{x}\right)x^2+2x\ln x}{x^4}=\frac{-x+2x\ln x}{x^4}=\frac{-1+2\ln x}{x^3}$

إشارة $f''(x)$ من إشارة $-1+2\ln x$.

$f''(x)=0$ معناه $-1+2\ln x=0$ كافئ $\ln x=\frac{1}{2}$ أي $x=\sqrt{e}$

$f''(x)>0$ معناه $-1+2\ln x>0$ كافئ $\ln x>\frac{1}{2}$ أي $x>\sqrt{e}$.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$f''(x)$ تنعدم عند $\sqrt{e}$ و تتغيّر إشارتها بجوار $\sqrt{e}$ و منه النقطة $\omega\left(\sqrt{e};f\left(\sqrt{e}\right)\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C).

5) التبيّن أنّ المنحنى (C) يقطع المستقيم (d) ذا المعادلة $y=\frac{1}{2}$ في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث: $0,4<\alpha<0,5$ و $5,3<\beta<5,4$.

الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ و بالخصوص على المجال $[0,4;0,5]$ لدينا $g(0,4)\approx 0,20$ ، $g(0,5)\approx 0,61$ إذن $f(0,4)<\frac{1}{2}<f(0,5)$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,4;0,5[$ بحيث $f(\alpha)=\frac{1}{2}$

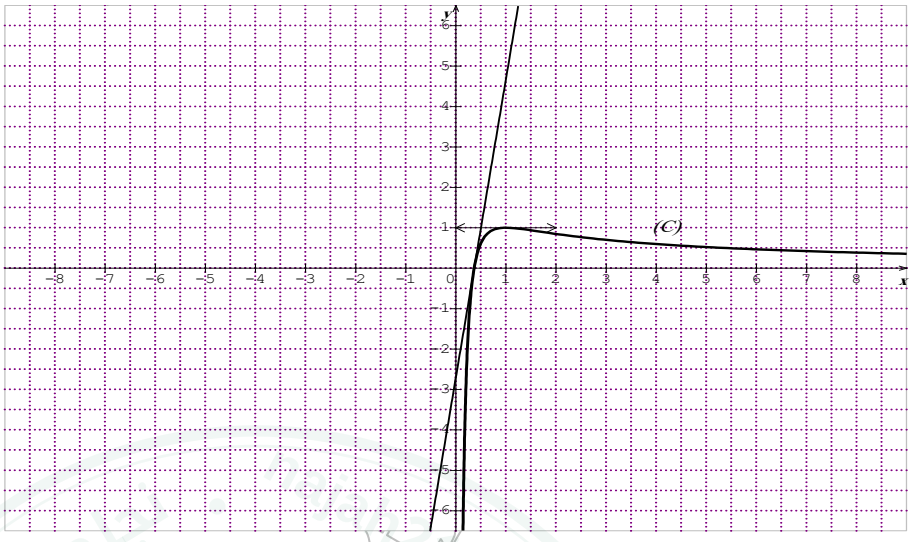
الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و بالخصوص على المجال $[5,3;5,4]$ لدينا $g(5,3)\approx 0,503$ ، $g(5,4)\approx 0,497$ إذن $f(5,3)>\frac{1}{2}>f(5,4)$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد β من المجال $]5,3;5,4[$ بحيث $f(\beta)=\frac{1}{2}$ و بالتالي المنحنى (C) يقطع المستقيم (d) ذا المعادلة $y=\frac{1}{2}$ في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث: $0,4<\alpha<0,5$ و $5,3<\beta<5,4$.

aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefai A/Elaziz

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

نجاح 213 · najah213.com

6رسم كال من (T) و (C).



نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $g(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x^2}{2x}$. ليكن (γ) تمثيلها البيانيّ في المعلم السابق.

1تبيّن أنّ الدّالة g فرديّة.

من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا $-x\in\mathbb{R}^*$

ليدنا من أجل كل عدد حقيقيّ غير معدوم x:

$$g(-x)=\frac{1}{-x}+\frac{\ln(-x)^2}{-2x}=-\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x^2}{2x}\right)=-g(x)$$ وهذا يعني الدّالة g فرديّة.

2بيّن أنّ $g(x)=f(x)$ على مجال يطلب تحديده.

لدينا $g(x)=\frac{1}{x}+\frac{2\ln|x|}{2x}$ وهذا يعني $\begin{cases}g(x)=\frac{1}{x}+\frac{2\ln x}{2x};x>0\\ g(x)=\frac{1}{x}+\frac{2\ln -x}{2x};x<0\end{cases}$ أي $\begin{cases}g(x)=\frac{1+\ln x}{x};x>0\\ g(x)=\frac{1+\ln -x}{x};x<0\end{cases}$

إذن من أجل $x\in]0;+\infty[$: $g(x)=f(x)$

3. جدول تغيّرات الدّالة g.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	‖	0	
$g(x)$	0 ↘	-1 ↗	‖	$-\infty$ ↗ 1 ↘	0

4شرح كيفيّة رسم المنحنى (γ)

(γ) يطابق على (C_f) في المجال $]0;+\infty[$ وبما أنّ g فردية فإنّ (γ) نظيره بالنسبة إلى O مبدأ المعلم.

لتمرين الثالث غير:

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases}f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right);x>0\\ f(0)=0\end{cases}$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة $5cm$.

I- g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}$

1) بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$

2. ادرس إشارة $g'(x)$ حسب قيم x.

3. شكّل جدول تغيرات الدالة g.

4) برهن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $0,5<\alpha<0,6$.

5. حدد إشارة $g(x)$.

II- 1. أ. بيّن أنّه، من أجل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$

ب. استنتج إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

2. أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$ ؛ يمكن وضع $t=\frac{1}{x^2}$

ب. استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. أبيّن أنّه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=x\ln(x^2+1)-2x\ln x$

ب. احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$

ج- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0.

4) نشئ جدول تغيرات الدالة f ثمّ ارسم (C). نأخذ $f(\alpha)\simeq 0,8$.

الحل☺

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:
$$\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right);x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة $5cm$.

I- g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}$

1) تبيّن أوّلاً، من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$

$$g'(x)=\frac{\frac{-2x}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-2}{x(x^2+1)}+\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

aziz_mus1@hotmail.fr

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$$= \frac{-2\left(x^2+1\right)}{x\left(x^2+1\right)^2} + \frac{4x^2}{x\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{2\left(x^2-1\right)}{x\left(x^2+1\right)^2}$$

2. دراسة إشارة $g'(x)$ حسب قيم x.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $x\left(x^2+1\right)^2 > 0$ وعليه إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة x^2-1.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

3. جدول تغيرات الدالة g.

x	0		α		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	0		$\ln 2-1$	↗	0

4. نتبيّن أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلّ وحيد α حيث: $0,5<\alpha<0,6$.

5. نحدّد إشارة $g(x)$.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

II- 1. أ. تبيين أنّه، من أجل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$

$$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\frac{-2x}{x^4}}{\frac{x^2+1}{x^2}}x$$

$$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{-2x}{x^4}\cdot\frac{x^2}{x^2+1}x = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1} = g(x)$$

ب. استنتاج إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

2. أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$ ؛ يمكن وضع $t=\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}$$

نضع $t=\frac{1}{x^2}$ إذا كان x يؤول إلى $+\infty$ فإنّ t يؤول إلى 0.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$.

ب. استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

3. أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث $f(x)=x\ln(x^2+1)-2x\ln x$

$$f(x)=x\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)=x\left(\ln(x^2+1)-\ln x^2\right)=x\ln(x^2+1)-2x\ln x$$

ب. احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

لدينا $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$ و $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x^2+1)=0$

إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x^2+1)-2x\ln x=0$

ج- درس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0.

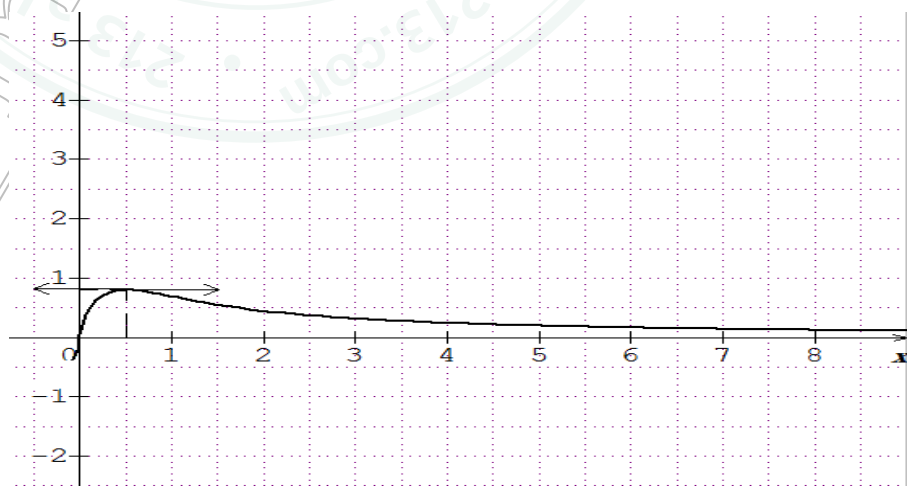
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$$

إذن للدالة f قبل الاشتقاق 0.

4. **جدول تغيرات الدالة f.**

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	0 ↗	$f(\alpha)$	↘ 0

رسم (C).



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين الرابع عشر ☹

I- g هي الدالة العددية المعرفة على $[-1;3]$ كما يلي: $g(x)=2\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$.

1) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,8<\alpha<-0,7$.

3) عين حسب قيم x إشارة $g(x)$.

4) h هي الدالة العددية المعرفة على المجال $[-1;3]$ بـ: $h(x)=[g(x)]^2$.

أ) احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

ب) عين إشارة $h'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة h.

II- f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $[-1;3]$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{\ln(x+1)}, x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) احسب $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب) بين أن f قابلة للاشتقاق عند الصفر ثم اكتب معادلة (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

2- أ) بين أنه، من أجل كل x من $]-1;0[\cup]0;3]$، $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

ب) بين أن: $f(\alpha)=2\alpha(\alpha+1)$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.

ج) احسب $f(3)$ و $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3- أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $[-1;3]$ فإن: $x-\ln(x+1)\geq 0$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (T).

4- عين معادلة (T') المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3.

5- ارسم (T)، (T') و (C_f).

6- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$.

الحل ☺

I- g هي الدالة العددية المعرفة على $[-1;3]$ كما يلي: $g(x)=2\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$.

1) دراسة تغيرات الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها.

$$\lim_{x\to -1^+} g(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x+1}\left[2(x+1)\ln(x+1)-x\right]=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to -1^+} 2(x+1)\ln(x+1)=\lim\limits_{t\to 0} 2t\ln t=0$ و $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$.

$$g(3)=2\ln 4-\frac{3}{4}$$

لدراسة إشارة g على $[-1;3]$ نحسب:

aziz_mus1@hotmail.fr

سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك

Mostefai A/Elaziz

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$$g'(x)=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)-1}{(x+1)^2}=\frac{2x+1}{(x+1)^2}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x+1$.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		3
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

نستنتج أن الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};3\right]$.

جدول تغيرات الدالة g.

x	-1		α		$-\frac{1}{2}$		0		3
$g'(x)$	‖	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-2\ln 2+1$	↗	0	↗	$4\ln 2-\frac{3}{4}$

2) بين أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,8<\alpha<-0,7$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ وتأخذ قيمها في المجال $[-2\ln 2+1;+\infty[$ و

$0\in[-2\ln 2+1;+\infty[$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ وكذلك الدالة g

مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};3\right]$ وتأخذ قيمها في المجال $\left[-2\ln 2+1;4\ln 2-\frac{3}{4}\right]$ و

$0\in\left[-2\ln 2+1;4\ln 2-\frac{3}{4}\right]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $\left[-\frac{1}{2};3\right]$. بما أن

$g(0)=2\ln(0+1)-\frac{0}{0+1}=0$ فإن $\beta=0$ ولدينا $g(-0,8)\approx 0,8$ و $g(-0,7)\approx -0,8$ أي

$g(-0,7)\times g(-0,8)<0$ وهذه $-0,8<\alpha<-0,7$

3) تعيين، حسب قيم x إشارة $g(x)$.

x	-1		α		0		3
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

4) h هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3]$ بـ: $h(x)=[g(x)]^2$.

أ) حساب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

$h'(x)=2g'(x)\times g(x)$

aziz_mus1@hotmail.fr

Mostefai A/Elaziz
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ب) تعيين إشارة $h'(x)$.

x	-1		α		$-\frac{1}{2}$		0		3
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة h متزايدة تماما على كل من $\left[\alpha;-\frac{1}{2}\right]$ و $[0;3]$ وتناقصية تماما على كل من $]-1;\alpha]$ و $\left[-\frac{1}{2};0\right]$.

جدول تغيرات الدالة h.

x	-1		α		$-\frac{1}{2}$		0		3
$h'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$(-2\ln 2+1)^2$	↘	0	↗	$h(3)$

II- f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;3]$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{\ln(x+1)}, x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) بيّن أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند الصفر.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\ln(x+1)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(x+1)}{x}}=1$$

لأن $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0.

كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

$$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0) \quad \text{أي} \quad y=x$$

2- أ) بيّن أنه، من أجل $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{\left[\ln(x+1)\right]^2}$.

من أجل $]-1;0[\cup]0;3]$، $x\in$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{2x\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}x^2}{(\ln(x+1))^2}=\frac{x\left[2\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}\right]}{(\ln(x+1))^2}=\frac{xg(x)}{(\ln(x+1))^2}$$

Mostefai A/Elaziz

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

جدول تغيرات الدالة f

x	-1		α		0		3
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
x	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	

نستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-1;\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;3]$.

ب) نبيّن أنّ: $f(\alpha)=2\alpha(\alpha+1)$.

$g(\alpha)=0$ معناه $\ln(\alpha+1)-\frac{\alpha}{\alpha+1}=0$ أي $\ln(\alpha+1)=\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}$ أي $\frac{1}{\ln(\alpha+1)}=\frac{2(\alpha+1)}{\alpha}$

وهذه $f(\alpha)=\frac{2\alpha^2(\alpha+1)}{\alpha}=2\alpha(\alpha+1)$ أي $\frac{\alpha^2}{\ln(\alpha+1)}=2\alpha(\alpha+1)$.

تعيين حصرا لـ $f(\alpha)$.

$-0,8<\alpha<-0,7$ معناه $-1,6<2\alpha<-1,4$ أي $1,4<-2\alpha<1,6$.....(1)

ولدينا $0,2<\alpha+1<0,3$.....(2)

إذن $0,28<-2\alpha(\alpha+1)<0,48$ وهذه $-0,48<2\alpha(\alpha+1)<-0,28$ أي $-0,48<f(\alpha)<-0,28$.

ج) حساب $f(3)$ **و** $\lim\limits_{x\to-1^{>}} f(x)$.

$$f(3)=\frac{3^2}{\ln(3+1)}=\frac{9}{\ln 4}$$

$\lim\limits_{x\to-1^{>}} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^{>}}\frac{x^2}{\ln(x+1)}=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-1^{>}} x^2=1$ و $\lim\limits_{x\to-1^{>}}\ln(x+1)=-\infty$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	-1		α		3
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	$f(\alpha)$	↗	$\frac{9}{\ln 4}$

3- أ) بيّن أنّه من أجل كل x **من المجال** $]-1;3]$ **فإنّ:** $x-\ln(x+1)\geq 0$.

نضع $u(x)=x-\ln(x+1)$

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;3]$: $u'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$ ولدينا

إشارة $u'(x)$ من إشارة x.

من أجل $]-1;0[$، $u'(x)<0$ ومن أجل $]0;3[$، $u'(x)>0$

aziz_mus1@hotmail.fr

سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

إذن الدالة u متزايدة تماما على المجال $[0;3]$ وعلى المجال $[-1;0]$ متناقصة تماما على المجال $[-1;3]$ وهو $u(0)=0$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1;3]$، $u(x)\geq 0$ أي $x-\ln(x+1)\geq 0$.

ب) دراسة وضعية (C_f) و (T).

$$f(x)-x=\frac{x^2}{\ln(x+1)}-x=\frac{x^2-x\ln(x+1)}{\ln(x+1)}=\frac{x\left(x-\ln(x+1)\right)}{\ln(x+1)}=\frac{xu(x)}{\ln(x+1)}$$

$\ln(x+1)>0$ كان $x+1>1$ أي $x>0$

$\ln(x+1)<0$ كان $0<x+1<1$ أي $-1<x<0$

x	-1		0		3
x		$-$	0	$+$	
$u(x)$		$+$	0	$+$	
$\ln(x+1)$		$-$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (T)		(C_f) فوق (T)	

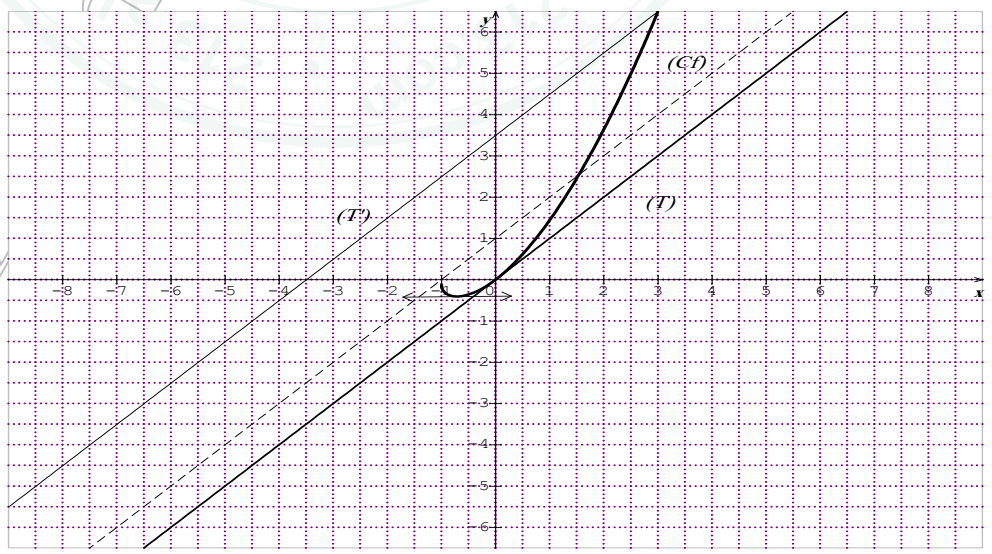
(T) مماس لـ (C_f) عند النقطة O

4- تعيين معادلة (T') المماس لـ (C_f) والموازي لـ (T) ثم تحديد وضعية (T') و (C_f).

معادلة (T') من الشكل $y=x+b$ و (T') مماس لـ (C_f) إذا وفقط إذا كان $A\left(3;\frac{9}{\ln 4}\right)$ حيث $\frac{9}{\ln 4}=3+b$ أي $b=\frac{9}{\ln 4}-3$.

وعليه معادلة (T') هي $y=x+\frac{9}{2\ln 2}-3$.

5- رسم (T)، (T') و (C_f).



aziz_mus1@hotmail.fr

سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

6- لتكن m وسيط حقيقي، عين حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$.

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y=x+m$.

إذا كان $m<0$ أو $m>\frac{9}{2\ln 2}-3$ فإن المعادلة تقبل حلا.

إذا كان $m=0$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا.

إذا كان $0<m<1$ فإن المعادلة تقبل حلان متمايزان.

إذا كان $1\le m\le \frac{9}{2\ln 2}-3$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا.

التمرين الخامس عشر ☹

f دالة معرفة بـ: $f(x)=\ln\left(x+e^{-x}\right)$ و (C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

1. أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $x+e^{-x}\ge 1$.

ب- استنتج أن f معرفة على $\mathbb{R}$.

2. أ- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)=-x+\ln\left(1+xe^{x}\right)$.

- بين أنه من أجل كل $x>0$ لدينا $f(x)-\ln x=\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$

ب- عين نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

ج- استنتج من السؤال السابق أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=-x$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$.

3. ما نهاية $\left[f(x)-\ln x\right]$ عند $+\infty$ ؛ ماذا تستنتج ؟

4. ادرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

5. ارسم (d)، (C) و (Γ) حيث (Γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$.

الحل:

f دالة معرفة بـ: $f(x)=\ln\left(x+e^{-x}\right)$ و (C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

1. أ- **نتبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $x+e^{-x}\ge 1$.**

نضع $g(x)=x+e^{-x}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $g'(x)=1-e^{-x}$.

$g'(x)=0$ يعني $1-e^{-x}=0$ أي $e^{-x}=1$ أي $x=0$

$g'(x)>0$ يعني $1-e^{-x}>0$ أي $e^{-x}<1$ أي $-x<0$ أي $x>0$

$g'(x)<0$ يعني $1-e^{-x}<0$ أي $e^{-x}>1$ أي $-x>0$ أي $x<0$.

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ومن جدول تغيراتها نستخلص أن

$g(0)=1$ وهو أصغر قيمة تأخذها g على $\mathbb{R}$، أي من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)\ge 1$ أي $x+e^{-x}\ge 1$.

ب- **نستنتج أن f معرفة على $\mathbb{R}$.**

إذن من أجل كل عدد حقيقي x، $x+e^{-x}\ge 1$ ويوجد $x+e^{-x}>0$ إذن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

Mostefai A/Elaziz

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

2. أ- حساب النهايات :

- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=-x+\ln\left(1+xe^{x}\right)$.

$$f(x)=\ln\left(x+e^{-x}\right)=\ln e^{-x}\left(xe^{x}+1\right)=\ln e^{-x}+\ln\left(xe^{x}+1\right)=-x+\ln\left(xe^{x}+1\right)$$

- بين أنه من أجل كل $x>0$: $f(x)-\ln x=\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$

$$f(x)-\ln x=\ln\left(x+e^{-x}\right)-\ln x=\ln\left(\frac{x+e^{-x}}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$$

ب- تحقق أن الدالة f تقبل $+\infty$ و $-\infty$ حدا.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(x+e^{-x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}-x+\ln\left(xe^{x}+1\right)=+\infty$$ لأن $\lim_{x\to-\infty}-x=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}xe^{x}+1=1$

ج- استنتج مما سبق أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=-x$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(xe^{x}+1\right)=0$ ومنه المستقيم (d) مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$.

3. أ- $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)=0$ لأن $\lim_{x\to+\infty}1+\frac{e^{-x}}{x}=1$

4. دراسة تغيرات الدالة f.

$f'(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ ؛ لكل x من $\mathbb{R}$، $x+e^{-x}>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-e^{-x}$.

$f'(x)>0$ على $x>0$

$f'(x)<0$ على $x<0$

f متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة على المجال $[0;+\infty[$

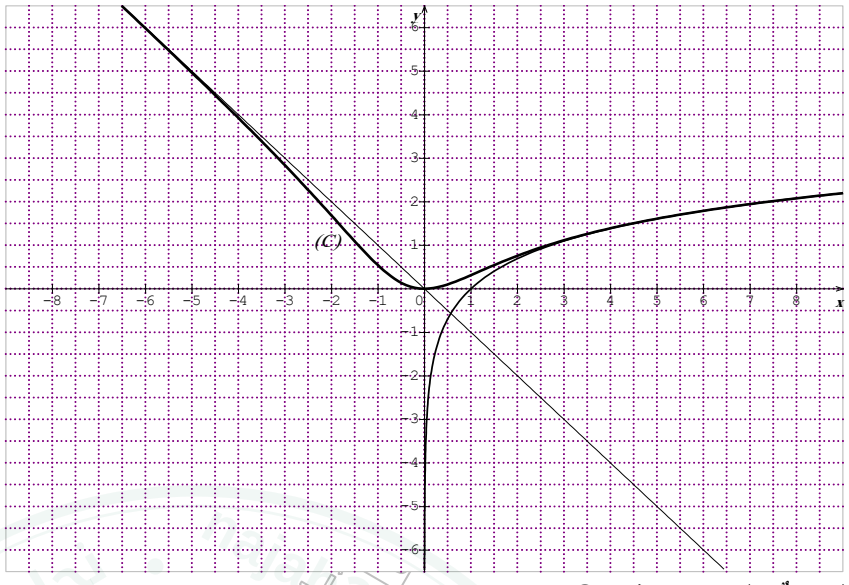
جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

5. رسم (d)، (C) و (Γ) حيث (Γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto\ln x$.

najah213.com · نجاح 213
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213



تمرين الدراسة ☹

I- لتكن g الدالة العرفة على المجال]−1;+∞[بالعبارة: $g(x)=(x+1)^2-2+\ln(x+1)$.

1- ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال]−1;+∞[.

2- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث: $0,31<\alpha<0,32$ وأن: $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

II- لتكن f الدالة العرفة على المجال]−1;+∞[بالعبارة: $f(x)=(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- بين أنه، من أجل كل x من]−1;+∞[: $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x+1}$.

3- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4- بين أن: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)$ ثم استنتج حصر للعدد $f(\alpha)$.

5- اشرح الشكل (C_f) على المجال]−1;2[.

III- (Γ) التمثيل البياني للدالة h العرفة على المجال]−1;+∞[بالعبارة: $h(x)=\ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x.

1- بين أن المسافة AM تعطى بالعبارة $AM=\sqrt{f(x)}$.

2- الدالة k العرفة على المجال]−1;+∞[بالعبارة: $k(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ- بين أن الدالتين k و f لهما نفس اتجاه التغير على المجال]−1;+∞[.

ب- عين إحداثيتي النقطة B من (Γ) بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

ج- بين أن: $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$.

Mostefai A/Elaziz

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الحل☺

I- الدّالة g معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=(x+1)^2-2+\ln(x+1)$.

1- دراسة تغيّرات الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$.

الدّالة g تقبل الاشتقاق على $]-1;+\infty[$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$:

$$g'(x)=2(x+1)+\frac{1}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $x+1>0$ و $\frac{1}{x+1}>0$ ومنه $g'(x)>0$ إذن الدالة g متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

2- نبيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيدا α حيث: $0,31<\alpha<0,32$ وأنّ: $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$.

الدّالة g مستمرة على $]-1;+\infty[$ لأنها تقبل الاشتقاق على $]-1;+\infty[$ وهي متزايدة تماما على هذا المجال و تحصر على المجال $[0,31;0,32]$ لدينا $g(0,31)\approx -0,01$ ، $g(0,32)\approx 0,02$ أي $g(0,32)\times g(0,31)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,31;0,32[$ بحيث $g(\alpha)=0$

$g(\alpha)=0$ معناه $(\alpha+1)^2-2+\ln(\alpha+1)=0$ أي $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$.

3- استنتاج، حسب قيم x إشارة $g(x)$.

من أجل $x\in]-1;\alpha[$ لدينا $g(x)<g(\alpha)$ أي $g(x)<0$

ومن أجل $x\in]\alpha;+\infty[$ لدينا $g(x)>g(\alpha)$ أي $g(x)>0$ و $g(\alpha)=0$.

II- الدّالة f معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- حساب $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-\ln(x+1))^2=+\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2=+\infty$.

ومنه $\lim\limits_{x\to -1}(2-\ln(x+1))^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2=+\infty$.

2- إثبات أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{2g(x)}{x+1}$.

الدّالة f تقبل الاشتقاق على $]-1;+\infty[$ لدينا:

$$f'(x)=2(x+1)+2\left(\frac{-1}{x+1}\right)(2-\ln(x+1))=2(x+1)-\frac{2(2-\ln(x+1))}{x+1}=\frac{2(x+1)^2-2(2-\ln(x+1))}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{2\left[(x+1)^2-2+\ln(x+1)\right]}{x+1}=\frac{2g(x)}{x+1}$$

aziz_mus1@hotmail.fr

سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

3- دراسة اتجاه تغير الدالة f.

من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$، $f'(x)=\frac{2}{x+1}>0$ وهي إشارة $g(x)$ حيث g هي الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ $g(x)=f'(x)$.

أي f متزايدة تماما على $]-1;\alpha]$ ومقعرة على $]\alpha;+\infty[$

نستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على $]-1;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ‖	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4- نتبين أن: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)$

لدينا $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$ إذن $f(\alpha)=(\alpha+1)^2+\left(2-\ln(\alpha+1)\right)^2=(\alpha+1)^2+\left(2-\left(2-(\alpha+1)^2\right)\right)^2$

$$f(\alpha)=(\alpha+1)^2+(\alpha+1)^4=(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)$$

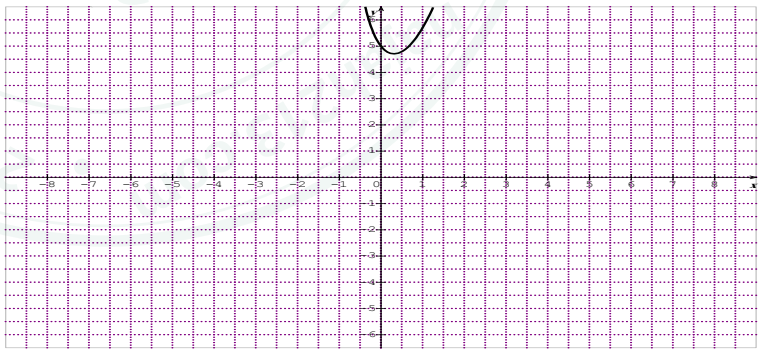
استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

$0,31<\alpha<0,32$ معناه $1,31<\alpha+1<1,32$ أي $1,7161<(\alpha+1)^2<1,7424$

$2,7161<1+(\alpha+1)^2<2,7424$ وهي $1,7161\times2,7161<(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)<1,7424\times2,7424$ أي

$4,6611<f(\alpha)<4,7789$.

5- تمثيل المنحنى (C_f) على المجال $]-1;2]$.



III- (Γ) المنحنى الممثل للدالة h المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x.

1- إثبات أن المسافة AM تعطى بالعبارة $AM=\sqrt{f(x)}$.

لدينا $M\left(x;\ln(x+1)\right)$ وعليه

$$AM=\sqrt{(x+1)^2+\left(\ln(x+1)-2\right)^2}=\sqrt{(x+1)^2+\left(2-\ln(x+1)\right)^2}=\sqrt{f(x)}$$

aziz_mus1@hotmail.fr

Mostefai A/Elaziz
سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

2- الدالة k معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $k(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ- بيّن أنّ الدالتين k و f نفس اتجاه التغيّر على المجال $]-1;+\infty[$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]-1;+\infty[$ و هي موجبة على هذا المجال إذن الدالة k تقبل الاشتقاق على $]-1;+\infty[$

و لدينا $k'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$، $2\sqrt{f(x)}>0$ و منه إشارة $k'(x)$ هي نفس إشارة $f'(x)$ و لدراسة اتجاه تغيّر الدالتين k و f نفس الطريقة على المجال $]-1;+\infty[$.

ملاحظة: يمكن إتباع طرق أخرى لدراسة تغيّر الدالتين.

ب- تحقّق أنّ النقطة B من (Γ)، التي تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

لدينا الدالة k تناقصية تماما على المجال $]-1;\alpha]$ و متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$ فهي تقبل قيمة حدّية صغرى على المجال $]-1;+\infty[$ عندما $x=\alpha$ أي من أجل $x=\alpha$ تكون AM أصغر ما يمكن و هي النقطة $B(\alpha;\ln(\alpha+1))$

ج- بيّن أنّ: $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$.

$$AB=k(\alpha)=\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)}=(\alpha+1)\sqrt{1+(\alpha+1)^2}$$

التمرين الرابع ☹

I- نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=\ln(1+e^{-x})-\dfrac{1}{1+e^x}$.

1- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

2- ادرس اتجاه تغيّر الدالة g و شكل جدول تغيّراتها.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=e^x\ln(1+e^{-x})$.

1- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ (يمكن وضع $t=\dfrac{1}{e^x}$).

2- بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=-xe^x+e^x\ln(1+e^x)$.

- استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

3- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f و شكل جدول تغيّراتها.

- استنتج حصر مجموعة صور $\mathbb{R}$ بواسطة الدالة f.

4- بيّن أنّ المعادلة: $f(x)=\dfrac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α.

5- ارسم (C_f) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

6- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $e^x\ln(1+e^{-x})-m=0$.

aziz_mus1@hotmail.fr

سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213 · najah213.com

aziz_mus1@hotmail.fr

najah213.com · نجاح 213

الحل:

I- g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)-\dfrac{1}{1+e^{x}}$.

1- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+e^{x}}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)-\dfrac{1}{1+e^{x}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+e^{x}}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)-\dfrac{1}{1+e^{x}}=0$

2- دراسة اتجاه تغير الدالة g

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ من أجل كل عدد حقيقي x:

$$g'(x)=\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}=\frac{-1}{1+e^{x}}+\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}=\frac{-1-e^{x}+e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}=\frac{-1}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}$$

من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)<0$ ولدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0

3- استنتاج إشارة $g(x)$ **على** $\mathbb{R}$.

نلاحظ من جدول تغيرات الدالة g أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)>0$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

1- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

نضع $t=\dfrac{1}{e^{x}}$ ومنه $e^{x}=\dfrac{1}{t}$ إذا كان x يؤول إلى $+\infty$ فإنّ t يؤول إلى 0.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{x}\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\ln(1+t)=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

2- بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=-xe^{x}+e^{x}\ln\left(1+e^{x}\right)$.

لدينا $f(x)=e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)=e^{x}\ln\left(e^{-x}\left(e^{x}+1\right)\right)=e^{x}\left[-x+\ln\left(e^{x}+1\right)\right]=-xe^{x}+e^{x}\ln\left(e^{x}+1\right)$

- استنتاج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}-xe^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}\ln\left(e^{x}+1\right)=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-xe^{x}+e^{x}\ln\left(e^{x}+1\right)=0$

3- دراسة اتجاه تغير الدالة f .

$$f'(x)=e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)-\left(\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)e^{x}=e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)-\frac{1}{1+e^{-x}}=g(x)$$

Mostefai A/Elaziz
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

نجاح 213 · najah213.com

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)>0$ وهذا يعني $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	1

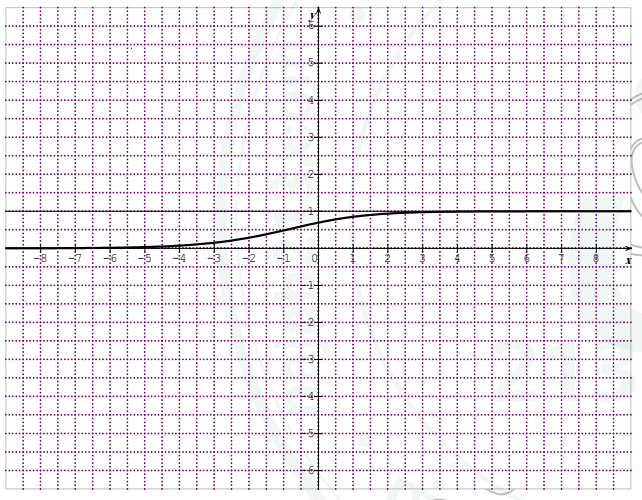
استنتاج مجموعة قيم x التي من أجلها $f(x)\in[1;2[$.

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $\mathbb{R}$ إذن هي تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $f(\mathbb{R})=f(]-\infty;+\infty[)=]1;2[$

4- بين أن المعادلة: $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حل وحيد α.

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $\mathbb{R}$ وتأخذ قيمها في المجال $]1;2[$ و $\frac{1}{2}\in]1;2[$ إذن المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حل وحيد α.

5- رسم (C_f)



6- لتكن m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $e^x\ln(1+e^{-x})-m=0$.

$e^x\ln(1+e^{-x})-m=0$ تكافئ $e^x\ln(1+e^{-x})=m$

$f(x)=m$

إذا كان $m\le 0$ أو $m\ge 1$ فإن المستقيم الذي معادلته $y=m$ لا يقطع (C_f).

إذا كان $0<m<1$ فإن المستقيم الذي معادلته $y=m$ يقطع (C_f) في نقطة وحيدة.

التمرين الثاني: (☹)

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $]0;e[\cup]e;+\infty[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}; & x\in]0;e[\cup]e;+\infty[\\ f(0)=-1 \end{cases}$$

و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) تحقق أن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1$ (يمكن وضع $t=\ln x$) ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة.

2) تحقق أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

3) أ) تأكد أنه من أجل كل $x \in]0;e[\cup]e;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.

5) أ) تأكد أنه من أجل كل $x \in]0;e[\cup]e;+\infty[$ ، $f''(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}$ ثم استنتج أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها .

6) أحسب $f(4)$ ثم أرسم (T) و $(\mathcal{C}_f)$.

7) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-e;e\}$ بـ : $g(x)=f(|x|)$.

أ) بين أن g دالة زوجية .

ب) كيف يمكن استنتاج $(\mathcal{C}_g)$ من $(\mathcal{C}_f)$ ثم ارسم $(\mathcal{C}_g)$.

الحل ☺

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $]0;e[\cup]e;+\infty[$ بـ :
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}\ ;\ x\in]0;e[\cup]e;+\infty[\\ f(0)=-1 \end{cases}$$

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) **أ) بين أن** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1$ **ثم أول النتيجة هندسيا .**

نضع $t=\ln x$ إذا كان $x \xrightarrow{x>0} 0^+$ فإن $t\to-\infty$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln x}{1-\ln x}=\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{1-t}=-1$$

بما أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=f(0)=-1$ فإن الدالة f مستمرة عند 0.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{\ln x}{1-\ln x}+1}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{1}{1-\ln x}}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x-x\ln x}=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(x-x\ln x)=0^+$

التفسير: الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0 ويقبل $(\mathcal{C}_f)$ مماس موازي لمحور التراتيب معادلته $x=0$ أي محور التراتيب ، ويقبل نصف مماس معامل توجيهه -1 عند النقطة ذات الإحداثيات $(0;-1)$

2) **بين أن** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ **ثم فسر النتيجة بيانيا .**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{1-\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{t}{1-t}=-1$$

التفسير: $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=-1$ بجوار $+\infty$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

3) أدرس اتجاه تغير الدالة f على $]0;e[\cup]e;+\infty[$، ثم أحسب عددين حقيقيين x حيث: $f'(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)^2}$.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1-\ln x)+\frac{1}{x}\ln x}{(1-\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}(1-\ln x+\ln x)}{(1-\ln x)^2}=\frac{1}{x(1-\ln x)^2}$$

بما أن $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$ فإن $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين $]0;e[$ و $]e;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|\|$	$+$		
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$	$-\infty$

4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي $y=1(x-1)$ أي $y=x-1$.

5) أثبت أن $f''(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}$، $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$ ثم استنتج أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

تذكير: $\left(\dfrac{1}{f}\right)'=\dfrac{-f'}{f^2}$

من أجل كل $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$:

$$f''(x)=\frac{-\left[(1-\ln x)^2+2x\left(-\frac{1}{x}\right)(1-\ln x)\right]}{x^2(1-\ln x)^4}=\frac{-\left[(1-\ln x)^2-2(1-\ln x)\right]}{x^2(1-\ln x)^4}$$

$$f''(x)=\frac{-(1-\ln x)(1-\ln x-2)}{x^2(1-\ln x)^4}=\frac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}$$

إشارة $f''(x)$ من إشارة $1+\ln x$ لأن $x^2(1-\ln x)^3>0$ من أجل كل $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$

$f''(x)=0$ تعني $1+\ln x=0$ أي $\ln x=-1$ أي $x=\dfrac{1}{e}$

$f''(x)>0$ تعني $1+\ln x>0$ أي $\ln x>-1$ أي $x>\dfrac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f''(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

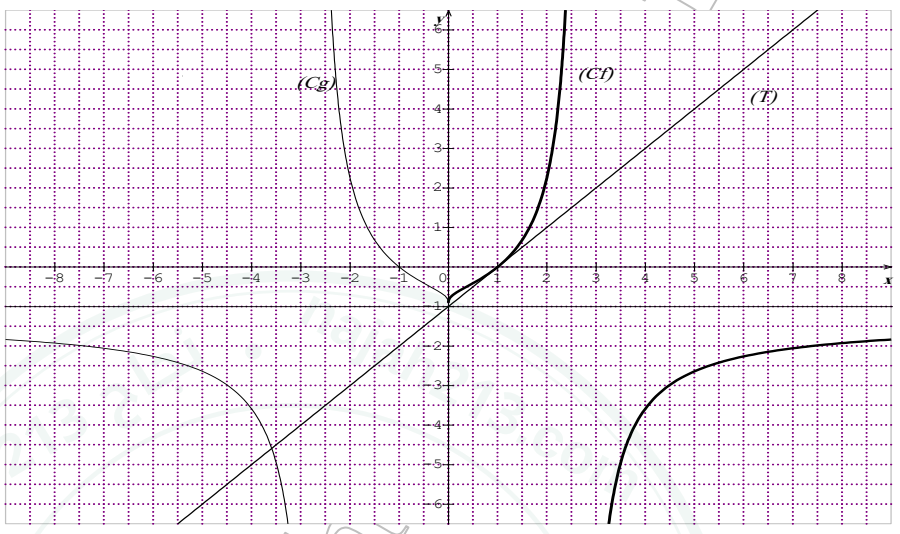
aziz_mus1@hotmail.fr
Mostefai A/Elaziz

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$f''(x)$ يدعم $\frac{1}{e}$ ويتغير إشارته عند $\left(\frac{1}{e};-\frac{1}{2}\right)$ فإن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف.

6) بين أن $f(4)$ هو معامل توجيه المماس (T) لـ $(\mathcal{C}_f)$.



7) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-e;e\}$ بـ: $g(x)=f(|x|)$.

أثبت أن الدالة g زوجية.

D_g متناظرة بالنسبة إلى 0

$$g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=g(x)$$

تحقق أن $(\mathcal{C}_g)$ منطبق على $(\mathcal{C}_f)$ على $[0;+\infty[$ ثم ارسم $(\mathcal{C}_g)$.

$$\begin{cases} g(x)=f(x);x\in[0;e[\cup]e;+\infty[\\ g(x)=f(-x);x\in]-\infty;-e[\cup]-e;0] \end{cases}$$

بما أن $x\in[0;e[\cup]e;+\infty[$ فإن $(\mathcal{C}_g)$ يطابق $(\mathcal{C}_f)$ وبما أن الدالة g زوجية فإن $(\mathcal{C}_g)$ يقبل محور التراتيب محور تناظر.

ليكن g الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $g(x)=2x+\ln x$.

1- ادرس تغيرات الدالة g.

أ- احسب نهاية الدالة g عند $+\infty$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g.

ج- بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ فإن $g(x)\neq 0$

2- لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{6\ln x}{2x+\ln x}$

أ بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{6\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}}$ من أجل $x\in[1;+\infty[$.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، ماذا تستنتج ؟

aziz_mus1@hotmail.fr

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ج- ـ ادرس اتجاه تغير الدالة f.

د ـ شكل جدول تغيرات الدالة f، ما هو عدد الحلول للمعادلة $f(x)=k$ حسب قيم الوسيط الحقيقي k ثم حل في $]1;+\infty[$ المعادلة $f(x)=k$.

هـ ـ جد معادلة المماس (Δ_1) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

ثم أنشئ (C_f) و (Δ_1) في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3- تعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=f(e^x)$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ ـ شكل جدول تغيرات الدالة h.

ب ـ جد معادلة المماس (Δ_2) للمنحنى (C_h) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

ج- ـ ارسم كلا من (Δ_1)، (Δ_2)، (C_f) و (C_h).

الحل:

1- g دالة معرفة على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=2x+\ln x$.

أ ـ احسب نهاية الدالة g عندما x يؤول إلى $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x+\ln x=+\infty$$

ب ـ دراسة اتجاه تغير الدالة g.

الدالة g تقبل الاشتقاق على $]1;+\infty[$ ولدينا $g'(x)=2+\frac{1}{x}$

من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$، $g'(x)>0$ ولما كانت g' موجبة تماما على $]1;+\infty[$ فإن الدالة g متزايدة تماما على $]1;+\infty[$.

ج- بما أن g متزايدة، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ فإن $g(x)\neq 0$

من أجل $x>1$ لدينا $g(x)>g(1)$ أي $g(x)>2$ وهذا يعني $g(x)\neq 0$

2- لتكن f دالة معرفة على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{6\ln x}{2x+\ln x}$

أ ـ بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{6\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}}$ من أجل $x\in]1;+\infty[$.

$$f(x)=\frac{6\ln x}{2x+\ln x}=\frac{x\left(\frac{6\ln x}{x}\right)}{x\left(2+\frac{\ln x}{x}\right)}=\frac{6\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}}$$

ب ـ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}2+\frac{\ln x}{x}=2$ وهذا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}}=0$

ج- ـ دراسة اتجاه تغير الدالة f.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]1;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{\frac{6}{x}(2x+\ln x)-\left(2+\frac{1}{x}\right)6\ln x}{(2x+\ln x)^2}=\frac{12+\frac{6\ln x}{x}-12\ln x-\frac{6\ln x}{x}}{(2x+\ln x)^2}=\frac{12(1-\ln x)}{(2x+\ln x)^2}$$

aziz_mus1@hotmail.fr

سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$f'(x)=0$ معناه $1-\ln x=0$ أي $\ln x=1$ أي $x=e$

$f'(x)>0$ معناه $1-\ln x>0$ أي $\ln x<1$ أي $1<x<e$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $[1;e]$ ومتناقصة تماما على $[e;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{6}{2e+1}$	↘	0

تعيين مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=k$ حسب قيم الوسيط الحقيقي k.

المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا من أجل كل k من المجال $\left]0;\frac{6}{2e+1}\right]$.

هـ - أكتب معادلة المماس (Δ_1) لـ (C_f) عند نقطة تقاطعها مع حامل محور الفواصل.

$(\Delta_1): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ وهي $y=3(x-1)$ أي $(\Delta_1): y=3x-3$

3- تعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=f\left(e^x\right)$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ- استنتج جدول تغيرات الدالة h.

نلاحظ أن الدالة h هي مركب الدالة الأسية بتبوع بالدالة f ($h=f\circ\exp$)

لدينا الدالة الأسية exp متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $[e;+\infty[$ والدالة f متناقصة تماما على المجال $[e;+\infty[$ إذن تركيبهما الدالة h متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ أي للدالة h متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$

لدينا $h(1)=f\left(e^1\right)=f(e)=\frac{6}{2e+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(e^x\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$

x	1		$+\infty$
$h(x)$	$\frac{6}{2e+1}$	↘	0

ب - جد معادلة المماس (Δ_2) لـ (C_h) عند نقطة تقاطعها مع حامل محور الفواصل.

$(\Delta_2): y=h'(1)(x-1)+h(1)$ وهي $y=\frac{6}{2e+1}$ أي $(\Delta_2): y=\frac{6}{2e+1}$

ج- ارسم كلا من (Δ_1)، (Δ_2)، (C_f) و (C_h).

aziz_mus1 — Mostefai A/Elaziz

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

سلسلة تمارين حول الدوال اللوغاريتمية

إعداد: عزالدين الطيب



aziz_mus1@hotmail.fr

سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com