مجلة الأعداد و الحساب

القسمة في زاد

الموافقات

الأعداد الأولية

التعداد

الدكتور : السكي داود - dr.daoud.sekki

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

MATHS

1 تمارين محلولة في الأعداد و الحساب

التمرين الأول

أجب بصحيح أو خطأ مع التّبرير :

1 من أجل كل عدد طبيعي n العدد (2^2n-1) يقبل القسمة على 3 .

2 إذا كان العدد الصّحيح x حلاّ للمعادلة $x^2+x\equiv 0[6]$ فإنّ : $x\equiv 0[3]$.

3 المعادلة : $25x-30y=47$ ، تقبل حلولا في Z^2 .

4 توجد ثنائية وحيدة $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية حيث $a<b$ و $PPCM(a,b)-PGCD(a,b)=1$

5 مهما يكن العدد الطبيعي n : $PGCD(14n+21;21n+14)=7$.

6 العددان M و N مكتوبان في النّظام العشري على الشّكل : $M=\overline{abc}$ ، $N=\overline{bca}$:
إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإنّ : $(M-N)$ يقبل القسمة على أيضا .

7 يوجد نظام تعداد أساسه a بحيث العدد 2018 يكتب : $\overline{21312}^{(a)}$.

الحل

1 **الإجابة صحيحة** ، لأنّ : $2^2n=4^n$ ، ونعلم أنّ: $4\equiv 1[3]$ أي: $4^n\equiv 1[3]$ أي : $4^n-1\equiv 0[3]$ ومنه : $2^2n-1\equiv 0[3]$.

2 **الإجابة خاطئة** ، لأنّ :
ومنه $x^2+x\equiv 0[6]$ لا يعطينا حتما : $x\equiv 0[3]$.

$x^2\circ$	0	1	4	3	4	1	6
x^2+x°	0	2	0	0	2	0	6

و كمثال مضاد: ممكن أن يكون $x\equiv 5[6]$ وهنا x=6k+5: أي أنّ x ليس مضاعفا لـ 3 .

3 الإجابة خاطئة ، لأنّ : PGCD(25;30)=5 لكن 5 لا يقسم 47 .

4 **الإجابة صحيحة** ، لأنّ : نعلم أنّ $PPCM(a;b)=da'b'$ حيث d هو $PGCD(a;b)$ ،وَ a' و b' أوليّان فيما بينهما ، ولدينا $PPCM(a;b)-PGCD(a;b)=1$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

، أي : $da'b'-d=1$ أي : $d(a'b'-1)=1$

إذن : $d=1$ ، ومنه : $a'b'-1=1$ أي $a'b'=2$ ، وبما أنّ $a'<b'$

لأنّ : $a<b$ ، إذن : $(a';b')=(1;2)$ ، ومنه : $(a;b)=(1;2)$ ، لأنّ : $d=1$.

5 **الإجابةخاطئة** ، لأنّ :

$PGCD(14n+21;21n+14)=PGCD(7(2n+3);7(3n+2))$

أي: $PGCD(14n+21;21n+14)=7\times PGCD(2n+3;3n+2)$.

نفرض أنّ : $PGCD(2n+3;3n+2)=d$ ،إذن: $\begin{cases}d/3(2n+3)\\d/2(3n+2)\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}d/2n+3\\d/3n+2\end{cases}$ أي : $\begin{cases}d/6n+9\\d/6n+4\end{cases}$

، ومنه : $d/5$ أي : $d=1$ أو $d=5$

، إذن : $PGCD(14n+21;21n+14)=7\times 1$

، ومنه: $PGCD(14n+21;21n+14)=7$.

أو : $PGCD(14n+21;21n+14)=7\times 5$ ، ومنه : $PGCD(14n+21;21n+14)=35$.

6 **الإجابة صحيحة** ، لأنّ :

لدينا :

$$\begin{cases}M=\overline{abc}=a\times 10^2+b\times 10+c=100a+10b+c\\N=\overline{bca}=b\times 10^2+c\times 10+a=100b+10c+a\end{cases}.$$

بما أنّ M يقبل القسمة على27 ، إذن M يقبل القسمة على3 (لأنّ 27 مضاعف لـ 3) .

إذن : $M\equiv 0[3]$ أي : $100a+10b+c\equiv 0[3]$.

نعلم أنّ : $100\equiv 1[3]$ وَ $10\equiv 1[3]$، إذن : $a+b+c\equiv 0[3]$.....(1) .

نحسب الآن : $M-N$ ، $M-N=(100a+10b+c)-(100b+10c+a)$

أي : $M-N=99a-90b-9c$ ، أي : $M-N=9(11a-10b-c)$ (مضاعف لـ9) .

يكون $M-N$ قابلا للقسمة على27 إذا كان : $(11a-10b-c)$ مضاعفا لـ 3 ، أي :

$11a-10b-c\equiv 0[3]$ أي : $2a-b-c\equiv 0[3]$ وَ $2\equiv -1[3]$ ، إذن : $-a-b-c\equiv 0[3]$

(بالضرب في (-1))أي : $a+b+c\equiv 0[3]$. ، وهذا ما توصّلنا من قبل ، أنظر (1) .

إذن : $M-N$ يقبل القسمة على27 أيضا .

7 **الإجابة خاطئة** ، لأنّ : $2018=\overline{21321}^{(a)}$ ، $(a>3)$: $2018=2a^4+a^3+3a^2+2a+1$ ، إذن : $2a^4<2018$

أي : $a^4<1009$ أي : $a^2<\sqrt{1009}$ أي: $a^2<31,764$ أي: $a<\sqrt{31,764}$

ومنه : $a<5,63$ ، لكن : $(a>3)$ ، إذن : $(a=4)$ أو $(a=5)$.

التحقق من أجل :$(a=4)$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

مرفوضة لأنّ :

$\overline{21321}^{(4)} = 2\times(4)^4 + 1\times(4)^3 + 3\times(4)^2 + 2\times(4) + 1 = 633$.

التحقّق من أجل : $(a = 5)$

مرفوضة لأنّ : $\overline{21321}^{(5)} = 2\times(5)^4 + 1\times(5)^3 + 3\times(5)^2 + 2\times(5) + 1 = 1461$.

إذن لا يوجد نظام تعداد أساسه a حيث 2018 يكتب : $\overline{21321}^{(a)}$.

التمرين الثاني

أجب بصح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية :

- نعتبر x و y عددان صحيحان .

1 من أجل كل عدد صحيح x ، لدينا : $x^3 \equiv x[2]$.

2 إذا كان $x \equiv 2[14]$ فإن : $x \equiv 1[7]$.

3 إذا كان $4x \equiv 10y[5]$ فإن : $x \equiv 0[5]$.

4 إذا كان $\begin{cases} x \equiv 4[5] \\ y \equiv 5[8] \end{cases}$ فإن : $8x - 5y = 7$.

الحل

1 صحيح ، لأن :

نعلم أن : $x^3 - x = x(x^2-1)$ أي : $x^3 - x = x(x+1)(x-1)$ ، لدينا : الجداء $x(x+1)$ زوجي.

إذن : $x^3 - x$ يقبل القسمة على 2 أي : $x^3 - x \equiv 0[2]$ و منه : $x^3 \equiv x[2]$.

2 خطأ ، لأن :

لدينا : $x \equiv 2[14]$ تكافئ : $x = 14k + 2$ أي : $x = 2(7k+1)$ ، و نعلم أن : $7k+1 \equiv 1[7]$ إذن : $2(7k+1) \equiv 2[7]$ و منه : $x \equiv 2[7]$.

3 صحيح ، لأن :

لدينا : $4x \equiv 10y[5]$ أي : $4x - 10y = 5k$ و منه : $4x = 5(k+2y)$.

بما أن : $\frac{5}{4x}$ و 5 أولي مع 4 إذن : حسب غوص فإن : $\frac{5}{x}$ و منه : $x \equiv 0[5]$.

4 خطأ ، لأن :

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

لدينا : $\begin{cases} x \equiv 4[5] \\ y \equiv 5[8] \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x = 5\alpha + 4 \\ y = 8\beta + 5 \end{cases}$.

لنحسب العدد $8x-5y$: $8x-5y = 40\alpha+32-40\beta-25$ أي : $8x-5y = 40(\alpha-\beta)+7$ أي : $8x-5y = 40k+7$
و منه : $8x-5y \equiv 7[40]$.

التمرين الثالث

n عدد طبيعي غير معدوم و يكتب في النظام العشري على الشكل : $n = \overline{abab}$.

1. بين أن n يقبل القسمة على 101 .
2. بين أن n يقبل القسمة على 4 إذا وافقط إذا كان العدد $\overline{ab}$ قابلا للقسمة على 4 .
3. جد أصغر قيمة للعدد الطبيعي n إذا علمت أنه يقبل القسمة على 20 .

الحل

1) لدينا : $n = \overline{abab}$ أي : $n = \overline{ab} \times 100 + \overline{ab}$ و منه : $n = \overline{ab}(100+1)$ أي : $n = 101 \times \overline{ab}$.
إذن : العدد n يقبل القسمة على 101 .

2) بما أن : $n = \overline{ab} \times 100 + \overline{ab}$ و 100 يقبل القسمة على 4 ، إذن : n يقبل القسمة على 4 إذا وافقط إذا كان العدد $\overline{ab}$ قابلا للقسمة على 4 .

3) n يقبل القسمة على 20 يكافئ أن n يقبل القسمة على 4 و 5 ، أي أن : العدد $\overline{ab}$ يقبل القسمة على 4 و رقم الآحاد b يكون 0 أو 5 .
لكن الرقم b لا يمكن أن يكون 5 لأن $\overline{ab}$ يقبل القسمة على 4 .
إذن : الأعداد من الشكل $\overline{a0}$ التي تقبل القسمة على 4 هي : $80, 60, 40, 20$.
و بالتالي قيم العدد n هي : $8080, 6060, 4040, 2020$ و أصغر قيمة لـ n هي 2020 .

التمرين الرابع

1. جد كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية و التي تحقق : $\begin{cases} PGCD(a,b) = 42 \\ PPCM(a,b) = 1680 \end{cases}$.
2. عين الأعداد الصحيحة x حيث : $8x \equiv 7[5]$.
3. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $336x + 210y = 294$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الحل

1 لدينا : $\begin{cases} PGCD(a,b)=42 \\ PPCM(a,b)=1680 \end{cases}$ و نعلم أن : $\begin{cases} a=42a' \\ b=42b' \end{cases}$

و $PPCM(a,b)=42\times a'b'$ مع $(PGCD(a',b')=1)$

إذن : $a'b'=\dfrac{1680}{42}$ أي : $a'b'=40$ و منه :

$(a',b')\in\{(1,40);(40,1);(5,8);(8,5)\}$

و بالتالي نجد : $(a,b)\in\{(42,1680);(1680,42);(210,336);(336,210)\}$.

2 لدينا : $8x\equiv 7[5]$ أي : $3x\equiv 2[5]$ ، بالضرب في 2 نجد : $6x\equiv 4[5]$ و منه : $x\equiv 4[5]$.

إذن : $x=5k+4$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.

3 المعادلة $336x+210y=294$

تكافئ : $8x+5y=7$ أي : $8x+5y=7$ و منه : $8x-7=5y$ إذن : $8x\equiv 7[5]$ و بالتعوض نجد $x=5k+4$:

و بالتالي : $S=(5k+4,-8k-1)$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.

التمرين الخامس

الجزء الأول :

1 أ - عين تبعا لقيم العدد الطبيعي باقي قسمة العدد 4^n على 7 .

ب - إستنتج باقي قسمة العدد $(2019^{2020}+2020^{1441}+1962^{1441})$ على 7 .

جـ - عين قيم العدد الطبيعي بحيث يكون :

$2020^{(6n+5)}+1441^{(6n+6)}+5n\equiv 0[7]$

2 نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n=1+4+4^2+.....+4^{(n-1)}$.

أ - بين أن U_n يكون مضاعفا لـ إذا وافقط إذا كان (4^n-1) مضاعفا لـ 7 .

ب - إستنتج قيم حتى يكون U_n قابلا للقسمة على 7 .

الجزء الثاني :

1 1) أ - باستعمال خوارزمية إقليدس عين العددين الصحيحين u و v حيث :
$101u-72v=1$.

ب - إشرح لماذا المعادلة $(E).....2020x-1440y=60$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

جـ - عين حلا خاصا للمعادلة ، ثم استنتج جميع حلول هذه المعادلة .

2 عين الحل (x,y) للمعادلة (E) الذي يحقق : $\begin{cases} PGCD(x,y)=3 \\ PPCM(x,y)=24948 \end{cases}$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الحل

حل الجزء الأول :

1 أ) تعيين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 4^n على 7 :

نجد : $4^0 \equiv 1[7]$ ، $4^1 \equiv 4[7]$ ، $4^2 \equiv 2[7]$ ، $4^3 \equiv 1[7]$ و منه الدور هو : 3 .

إذن : $4^{3k} \equiv 1[7]$ و $4^{3k+1} \equiv 4[7]$ و $4^{3k+2} \equiv 2[7]$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

الإستنتاج :

لدينا : $2019 \equiv 3[7]$ أي : $2019 \equiv -4[7]$ و $2020 \equiv 4[7]$ و $1441 \equiv 6[7]$ أي : $1441 \equiv -1[7]$.

إذن :

$2019^{2020} + 2020^{1441} + 1441^{1962} \equiv (-4)^{2020} + 4^{1441} + (-1)^{1962}[7]$ ، $(2020 = 3k+1)$ و $(1441 = 3k'+1)$

أي : $2019^{2020} + 2020^{1441} + 1441^{1962} \equiv (4^{3k+1} + 4^{3k'+1)+1}[7]$

و منه : $2019^{2020} + 2020^{1441} + 1441^{1962} \equiv (4+4+1)[7]$

أي : $2019^{2020} + 2020^{1441} + 1441^{1962} \equiv 9[7]$

إذن : $2019^{2020} + 2020^{1441} + 1441^{1962} \equiv 2[7]$.

و عليه باقي قسمة العدد $(2019^{2020} + 2020^{1441} + 1441^{1962})$ على 7 هو : 2 .

ج) تعيين قيم العدد الطبيعي n:

لدينا : $2020^{6n+5} + 1441^{6n+6} + 5n \equiv 0[7]$

أي : $4^{6n+5} + (-4)^{6n+6} + 5n \equiv 0[7]$

و نعلم أن : $(6n+6)$ زوجي

إذن : $4^{6n+5} + 4^{6n+6} + 5n \equiv 0[7]$

، لدينا : $6n+5 = 3 \times 2n + 3 + 2 = 3^{2n+1} + 2 = 3k+2$

أي تصبح : $4^{(3k+2)} + 4^{3k} + 5n \equiv 0[7]$

و منه : $2 + 1 + 5n \equiv 0[7]$ أي : $5n \equiv -3[7]$ أي : $5n \equiv 4[7]$

أي : $15n \equiv 12[7]$

و عليه : $n = 7k+5$ مع $k \in \mathbb{N}$.

2 لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n = 1 + 4 + 4^2 + \ldots\ldots + 4^{n-1}$

نلاحظ أن U_n هو مجموع لحدود متتالية هندسية أساسها 4 و عدد الحدود n حدا أي نجد : $U_n = 1 \times (4^n - 1)/(4-1)$

و منه : $U_n = (4^n - 1)/3$.

أ) البرهان : أولا نبين أنه إذا كان U_n مضاعفا لـ 7 فإن $(4^n - 1)$ مضاعف لـ 7 .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

نفرض U_n مضاعف لـ 7 أي: $U_n = 7k$ أي : $(4^n - 1)/3 = 7k$ أي : $4^n - 1 = 7k \times 3$

إذن نستنتج أن : $(4^n - 1)$مضاعف لـ $7(1)$.

ثانيا نفرض $(4^n - 1)$ مضاعف لـ 7 و نبين أن U_nمضاعف لـ 7 .

بما أن : $(4^n - 1)$مضاعف لـ 7 و نعلم أن : $U_n = (4^n - 1)/3$ أي : $4^n - 1 = 3U_n$ أي :$3U_n$ مضاعف لـ 7 و نعلم أن : $U_n = 7U_n - 3 \times 2U_n$، لدينا : $(3 \times 2U_n)$ مضاعف لـ 7 و $7U_n$ مضاعف لـ 7 .

و عليه نستنتج أن : U_n مضاعف لـ 7 ...(2).

من (1) و (2) نستنتج أن U_n مضاعف لـ 7 إذا وافقط إذا كان $(4^n - 1)$ مضاعفا لـ 7 .

ب) إستنتاج قيم n : يكون U_n قابلا للقسمة على 7 إذا وافقط إذا كان $(4^n - 1)$ قابلا للقسمة 7 .

أي :$4^n - 1 \equiv 0[7]$ أي : $4^n \equiv 1[7]$ و منه :$(n = 3k)$ مع $k \in \mathbb{N}$.

حل الجزء الثاني :

1 أ) إستخدام خوارزمية إقليدس لتعيين العددين الصحيحين u و v :

لدينا : $101 = 72 \times 1 + 29$، $72 = 29 \times 2 + 14$، $29 = 14 \times 2 + 1$إذن :$29 - 2 \times 14 = 1$

أي : $29 - 2(72 - 29 \times 2) = 1$ أي : $29 - 2 \times 72 + 4 \times 29 = 1$

و منه : $5(101 - 72) - 2 \times 72 = 1$ أي : $5 \times 29 - 2 \times 72 = 1$

أي : $5 \times 101 - 5 \times 72 - 2 \times 72 = 1$ و منه : $.5 \times 101 - 7 \times 72 = 1$

إذن : $(u, v) = (5, 7)$.

ب) المعادلة(E) تقبل حلولا في Z^2 لأن : $PGCD(2020, 1440) = 20$ و 20 يقسم 60 .

ج) المعادلة $(E) : 2020x - 1440y = 60$ تكافئ : $101x - 72y = 3$و لدينا : $101u - 72v = 1$

إذن الحل الخاص هو : $(3u, 3v)$ أي : $(15, 21)$.

- إستنتاج جميع حلول المعادلة(E) : لدينا : $\begin{cases} 101x - 72y = 3 \\ 101(15) - 72(21) = 3 \end{cases}$

بالطرح نجد : $101(x - 15) - 72(y - 21) = 0$

أي : $101(x - 15) = 72(y - 21)$.

لدينا : 72 يقسم $101(x - 15)$ و 72 أولي مع 101 حسب مبرهنة غوص نستنتج أن : 72 يقسم $x - 15$ أي : $x - 15 = 27k$ و منه : $x = 27k + 15$ بالتعويض نجد : $y = 101k + 21$. و عليه الحلول هي : $S = \{(x, y) = (72k + 15, 101k + 21); k \in \mathbb{Z}\}$.

لدينا : (x, y) حل لـ $\begin{cases} PGCD(x, y) = 3 \\ PPCM(x, y) = 24948 \end{cases}$ و بما أن :(x, y)حل لـ (E) أي : $\begin{cases} x = 72k + 15 \\ y = 101k + 21 \end{cases}$ و

أي أن : $PGCD(x, y) = 3$ $\begin{cases} 72k + 15 \equiv 0[3] \ldots\ldots(1) \\ 101k + 21 \equiv 0[3] \ldots\ldots(2 \end{cases}$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

العلاقة (1) محققة دائما ، لنحل (2) أي: $101k+21\equiv 0[3]$، بما أن : $21\equiv 0[3]$ فإن: $101k\equiv 0[3]$.

لدينا : 101 أولي مع 3 و منه: $k\equiv 0[3]$ أي: $k=3\alpha$.

إذن : $\begin{cases} x=72k+15 \\ x=72(3\alpha)+15 \\ x=216\alpha+15 \end{cases}$ و $\begin{cases} y=101k+21 \\ y=101(3\alpha)+21 \\ y=303\alpha+21 \end{cases}$

و نعلم أن : $PPCM(x,y)=\dfrac{x\times y}{PGCD(x,y)}$

و منه : $24948=(x\times y)/3$ أي : $x\times y=74844$

إذن : $(216\alpha+15)(303\alpha+21)=74844$

أي : $3(72\alpha+5)\times 3(101\alpha+7)=74844$

أي : $(72\alpha+5)(101\alpha+7)=8316$

أي نحصل على : $7272\alpha^2+504\alpha+505\alpha+35-8316=0$

و منه : $7272\alpha^2+1009\alpha-8281=0$.

نلاحظ أن مجموع المعاملات يساوي 0 إذن: $\alpha=1$ أو $\alpha=-8281/7272\notin\mathbb{Z}$

و عليه : $\alpha=1$. و منه : $x=231$ و $y=324$ ، أي : $(x,y)=(231,324)$.

التمرين السادس

1 درس تبعا لقيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7 .

2 برهن أنه من أجل كل n من N يكون العدد : $2\times 2012^{(6n+4)}+3\times 1432^{(3n+2)}$ قابلا للقسمة على 7 .

3 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على N بحدها العام u_n حيث: $u_n=2\times 3^n+3\times 4^n$.

أ) أحسب بدلالة المجموع : $S_n=u_0+u_1+....+u_n$.

ب) ماهي قيم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها المجموع S_n قابلا للقسمة على 7 ؟ .

الحل

1 بواقي القسمة الإقليدية لكل من 3^n و 4^n على 7 :

$3^0\equiv 1[7]$، $3^1\equiv 3[7]$ ، $3^2\equiv 2[7]$ ، $3^3\equiv 6[7]$ ، $3^4\equiv 4[7]$ ، $3^5\equiv 5[7]$، $3^6\equiv 1[7]$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

قيم n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
باقي قسمة العدد 3^nعلى7	1	3	2	6	4	5

$4^0 \equiv 1[7]$ ، $4^1 \equiv 4[7]$ ، $4^2 \equiv 2[7]$ ، $4^3 \equiv 1[7]$.

قيم n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
باقي قسمة العدد 3^nعلى7	1	4	2

2 برهان أن : $2 \times 2012^{6n+4} + 3 \times 1432^{3n+2}$ يقبل القسمة على 7 من أجل كل عدد طبيعي n :

$2012 \equiv 3[7]$ ، أي : $2012^{6n+4} \equiv 3^{6n+4}[7]$، ومنه : $2012^{6n+4} \equiv 4[7]$.

$1432 \equiv 4[7]$، أي : $1432^{3n+2} \equiv 4^{3n+2}[7]$ ، ومنه : $1432^{3n+2} \equiv 2[7]$.

إذن : $2 \times 2012^{6n+4} + 3 \times 1432^{3n+2} \equiv 8+6[7]$ ، أي : $2 \times 2012^{6n+4} + 3 \times 1432^{3n+2} \equiv 14[7]$ ، ومنه : $2 \times 2012^{6n+4} + 3 \times 1432^{3n+2} \equiv 0[7]$. و هو المطلوب .

3 أ) حساب بدلالة nالمجموع $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$:

نلاحظ أن المتتالية (u_n)هي مجموع متتاليتين هندسيتين إحداهما أساسها 3 و حدها الأول 2 ، والثانية أساسها 4 و حدها الأول 3 ، أي : $S_n = 2\left[\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right] + 3\left[\frac{1-4^{n+1}}{1-4}\right]$ ،

ومنه : $S_n = [3^{n+1}-1] + [4^{n+1}-1]$ ،

أي أنّ : $S_n = 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2$.

ب) قيم nحتى يكون S_n قابلا للقسمة على 7 :

$S_n \equiv 0[7]$ معناه : $3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7]$.

قيم n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
باقي قسمة العدد 3^nعلى7	1	3	2	6	4	5
باقي قسمة العدد 4^nعلى7	1	4	2	1	4	2

نلاحظ أن : $3^n + 4^n \equiv 2[7]$ ، لما : $n = 6k$، و منه : $3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7]$ ، لما : $n+1 = 6k$.

أي لما : $n = 6k-1$ أو : $n = 6(k-1)+5$. لنضع : $k' = k-1$ ، أي : $n = 6k'+5$ ، حيث : $k' \in \mathbb{N}$.

ومنه حتى يكون S_n قابلا للقسمة على 7 ، يجب أن يكون $n = 6k'+5$ ، حيث : $k' \in \mathbb{N}$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين السابع

نعتبر a عدد طبيعي غير معدوم .

1 (أ) بين أن العدد $a=a(a^2-1)$ يقبل القسمة على 6 .

(ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $a_n=a(a^{2n}-1)$ قابلا للقسمة على 6 .

2 من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S=a_1+a_2+.....+a_n$ و $S_n=a_1^{2n+1}+a_2^{2n+1}+.....+a_n^{2n+1}$

حيث : a_1 ، a_2 ، ..... و a_n

أعداد طبيعية غير معدومة .

(أ) برهن أن S و S_n لهما نفس الباقي في القسمة على 6 .

(ب) عين باقي قسمة المجموع :

$(2002^{1443}+2003^{1443}+.....+2022^{1443})$ على 6 .

3 ليكن n عدد طبيعي مكتوب في النظام الخماسي (ذي الأساس) على الشكل : $N=\overline{abab}^5$

(أ) برهن أن N يقبل القسمة على 6 إذا وافقط إذا كان : $a\equiv b[3]$.

(ب) إستنتج أكبر قيمة للعدد n الذي يقبل القسمة على 6.

الحل

1 أ) لدينا : $A=a(a^2-1)$ أي تصبح : $A=a(a-1)(a+1)$.

ملاحظة : الأعداد الطبيعية :$a-1$، a و $a+1$ متتابعة و نعلم أن : جداء عددين طبيعيين متتاليين يكون زوجيا و أيضا جداء ثلاث أعداد طبيعية متتالية يكون مضاعفا لـ 3 .

إذن : العدد A يقبل القسمة على 2 و على 3 و بالتالي يقبل القسمة على 6 لأن : 2 و 3 أوليان فيما بينهما .

تنبيـه : يمكن إستعمال جدول الموافقة بتردید 6 و نجد أن العددAيقبل القسمة على 6 .

ب) أولا نذكر أنه من أجل كل عدد a يكون :

$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+.....+1)$.

لدينا : $A_n=a(a^{2n}-1)$

أي : $A_n=a[(a^2)^n-1]$ و منه : $A_n=a(a^2-1)[(a^2)^{n-1}+(a^2)^{n-2}+....+1]$.

نعلم أن : يقبل القسمة على 6 أي : $a(a^2-1)=6k$و بالتالي فالعدد A_n يقبل القسمة على 6 .

2 2) لدينا :

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$S_n = a_1^{2n+1} + a_2^{2n+1} + \ldots\ldots + a_n^{2n+1}$

$S = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$.

أ) لإثبات أن S و S_n لهما نفس الباقي على 6 يكفي أن نبين أن : الفرق $S_n - S$ مضاعف لـ 6 .

*) لنحسب الفرق :

$S_n - S = a_1^{2n+1} + a_2^{2n+1} + \ldots + a_n^{2n+1} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$

أي نتحصل على :

$S_n - S = (a_1^{2n+1} - a_1) + (a_2^{2n+1} - a_2) + \ldots + (a_n^{2n+1} - a_n)$

أي: $S_n - S = a_1(a_1^{2n} - 1) + a_2(a_2^{2n} - 1) + \ldots + a_n(a_n^{2n} - 1)$

حسب السؤال السابق وجدنا أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم a العدد يقبل القسمة على 6.

و منه : الفرق $S_n - S$ هو عبارة عن مجموع لمضاعفات 6 إذن : فهو يقبل القسمة على 6 .

و بالتالي فإن : S و S_n لهما نفس الباقي على 6 .

المجموعين :

$(2002^{1443} + 2003^{1443} + \ldots + 2022^{1443})$

و $(2002 + 2003 + \ldots + 2022)$ لهما نفس الباقي على 6 .

لأن : الأس 1443 يكتب على الشكل $2n+1$ و من جهة أخرى نعلم أن : $(2002 + 2003 + \ldots + 2022)$ هو مجموع متتالية حسابية أساسها 1 أي :

$(2002 + 2003 + \ldots + 2022) = \frac{21(2002 + 2022)}{2}$

و منه : $(2002 + 2003 + \ldots + 2022) = 42252$.

العدد 42252 يقبل القسمة على 2 (عدد زوجي) و يقبل القسمة على 3 (مجموع أرقامه مضاعف لـ 3) إذن هو يقبل القسمة على 6 .

و بالتالي باقي قسمة المجموع $(2002^{1443} + 2003^{1443} + \ldots + 2022^{1443})$ على 6 هو 0 .

3 أ) لدينا : $N = \overline{abab}^5$ أي : $N = a \times 5^3 + b \times 5^2 + a \times 5 + b$ مع $(0 < a < 5)$ و $(0 \leq b < 5)$. نعلم أن : $5 \equiv -1[6]$ أي يصبح :

$N \equiv a \times (-1)^3 + b \times (-1)^2 + a \times (-1) + b[6]$ أي : $N \equiv -a + b - a + b[6]$

و منه : $N \equiv -2a + 2b[6]$ إذن : العدد يقبل القسمة على معناه : $-2a + 2b \equiv 0[6]$ أي : $2b \equiv 2a[6]$

إذن : $a \equiv b[3]$.

ب) لدينا : $a \equiv b[3]$ أي أن : $a - b = 3k$ و نعلم أن : $a \in \{1,2,3,4\}$ و $b \in \{0,1,2,3,4\}$ أي : الثنائيات (a,b).

التي تحقق $a - b = 3k$ هي :$(1,1)$،$(1,4)$، $(2,2)$، $(3,0)$ ، $(3,3)$، $(4,1)$و $(4,4)$.

لإيجاد أكبر قيمة لـ N نختار أكبر قيمة لـ a و هي 4 كذلك أكبر قيمة لـ b هي 4 .

إذن : $\overline{4444}^5$ و يكتب في النظام العشري : $N = 624$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين الثامن

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n = 2\times 5^n + 7$.

1 (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : a_n فردي .

(ب) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 8 .

(ج) إستنتج أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون : $a_n \equiv 1[8]$.

2 (أ) برهن أنه إذا كان : $\begin{cases} x\equiv 1[8] \\ x\equiv 7[125] \end{cases}$ فإن : $x\equiv 257[1000]$.

(ب) بين أنه من أجل كل $n\geq 3$ يكون : $a_n \equiv 257[1000]$.

(ج) ما هي الأرقام الثلاث الأخيرة للعدد $(2\times 5^{2020}+7)(2\times 5^{2021}+7)$ ؟ .

3 (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$.

(ب) نعتبر $d = PGCD(a_{2n}; a_{2n+1})$ ، بين أن d يختلف عن 7 .

(ج) جد عندئذ d.

الحل

لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $a_n = 2\times 5^n + 7$.

1 أ – نلاحظ أن هو عبارة عن مجموع عددين أحدهما زوجي (2×5^n) و الآخر فردي (7) إذن : هو فردي .

أو كطريقة أخرى لدينا: $a_n = 2\times 5^n + 7$ $a_n = 2\times 5^n + 7$ أي : $a_n = 2\times 5^n + 2\times 3 + 1$ و منه : $a_n = 2(5^n + 3) + 1$ و هذا ما يدل على أن a_n فردي .

ب – نجد :

$5^0 \equiv 1[8]$ ، $5^1 \equiv 5[8]$ ، $5^2 \equiv 1[8]$.

إذن : من أجل $n = 2k$ يكون : $(5^n \equiv 1[8])$ و من أجل $n = 2k+1$ يكون : $(5^n \equiv 5[8])$.

ج – نميز حالتين : حالة : n=2k (زوجي) فإن : $5^n \equiv 1[8]$ أي : $2\times 5^n \equiv 2[8]$ أي : $2\times 5^n + 7 \equiv 9[8]$ و منه : $(a_n \equiv 1[8])$.

حالة : $n = 2k+1$

(فردي) فإن : $5^n \equiv 5[8]$ أي : $2\times 5^n \equiv 10[8]$ أي : $2\times 5^n + 7 \equiv 17[8]$ و منه : $(a_n \equiv 1[8])$. من الحالتين السابقتين نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي فإن : $(a_n \equiv 1[8])$.

2 2) أ- لنبرهن أنه إذا كان : $\begin{cases} x\equiv 1[8] \\ x\equiv 7[125] \end{cases}$ فإن : $x\equiv 257[1000]$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

لدينا : $\begin{cases} x \equiv 1[8] \times 125 \\ x \equiv 7[125] \times 8 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 125x \equiv 125[1000] \\ 8x \equiv 56[1000] \times 16 \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} 125x \equiv 125[1000] \\ 128x \equiv 896[1000] \end{cases}$ بالطرح نجد : $3x \equiv 771[1000]$

بضرب هذه الأخيرة في 3 نجد : $9x \equiv 2313[1000]$ و نعلم أن : $2313 \equiv 313[1000]$ أي : $9x \equiv 313[1000]$ و منه تصبح : بالطرح نتحصل على : $(x \equiv 257[1000])$ هو المطلوب .

أو كطريقة أخرى : لدينا : أي : و منه : $8\alpha + 1 = 125\beta + 7$ أي : $8\alpha = 125\beta + 6$ أي : $8\alpha \equiv 6[125]$

و منه : $4\alpha \equiv 3[125]$ أي : $124\alpha \equiv 93[125]$ و نعلم أن : $125\alpha \equiv 0[125]$ بالطرح نجد : $\alpha \equiv -93[125]$

و منه : $\alpha \equiv 32[125]$ أي : $(\alpha = 125k + 32)$ نعوض قيمة α في : $x = 8\alpha + 1$ نجد : $x = 8(125k + 32) + 1$ أي : $x = 1000k + 257$ و هذا ما يدل على أن : $x \equiv 257[1000]$.

ب – لدينا من أجل $n \geq 3$ يكون : 5^n مضاعفا لـ 125 مثلا $(5^3 = 125)$.

إذن : من أجل $n \geq 3$ فإن : $5^n \equiv 0[125]$ أي : $2 \times 5^n + 7 \equiv 7[125]$ و بالتالي يكون : $a_n \equiv 7[125]$.

لدينا مما سبق أن : $a_n \equiv 1[8]$ و $a_n \equiv 7[125]$ إذن حسب السؤال (أ) فإن : $a_n \equiv 257[1000]$ هو المطلوب .

ج – لدينا : $a_{2020} \times a_{2021} = (2 \times 5^{2021} + 7)(2 \times 5^{2020} + 7)$.

حسب ما سبق لدينا : $\begin{cases} a_{2020} \equiv 257[1000] \\ a_{2021} \equiv 257[1000] \end{cases}$ أي : $a_{2020} \times a_{2021} \equiv 257^2[1000]$ و منه : $a_{2020} \times a_{2021} \equiv 66049[1000]$

إذن : $(a_{2020} \times a_{2021} \equiv 49[1000])$ و هذا ما يدل على أن آخر ثلاث أرقام للعدد $(2 \times 5^{2021} + 7)(2 \times 5^{2020} + 7)$ هي : 049

3 أ – لدينا : $5a_{2n} - a_{2n+1} = 5(2 \times 5^{2n} + 7) - (2 \times 5^{2n+1} + 7)$

أي : $5a_{2n} - a_{2n+1} = 2 \times 5^{2n+1} + 35 - 2 \times 5^{2n+1} - 7$

إذن: $(5a_{2n} - a_{2n+1} = 28)$.

ب – لدينا : $PGCD(a_{2n}, a_{2n+1}) = d$ أي أن : d/a_{2n} و d/a_{2n+1} ، لكن : $a_{2n} = 2 \times 5^{2n} + 7 a_{2n} = 2 \times 5^{2n} + 7$ و نعلم أن : (2×5^{2n})

ليس مضاعفا لـ 7 إذن : a_{2n} فردي و لا يقبل القسمة على 7 إذن : $d \neq 7$.

ج – **إيجاد قيم d :**

لدينا : $PGCD(a_{2n}, a_{2n+1}) = dPGCD(a_{2n}, a_{2n+1}) = d$ أي أن : d/a_{2n} و d/a_{2n+1} إذن : $d/5a_{2n} - a_{2n+1}$ و منه : $d/28$.

و بالتالي قيم الممكنة هي : $28, 14, 7, 4, 2, 1$ لكن $d \neq 7$ و أيضا حسب السؤال (1) (أ) فإن : a_n فردي بالتالي فحسب الشروط السابقة نستنتج أن : $d = 1$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين التاسع

1 (أ) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7.

(ب) حدد الأعداد الطبيعية n بحيث يكون :

$(2020^{1962} \times n + 4 \times 1441^{1954}) \equiv 0[7]$.

2 نعتبر العدد الطبيعي N_p المكتوب في النظام العشري على الشكل :

$N_p = \underbrace{\overline{11.....1}}_{p \text{ fois}}$.

(أ) بين أن : $N_p \equiv p[3]$.

(ب) إستنتج باقي قسمة العدد N_{2020} على 3 .

(ج) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $(3^n - 1)$ قابلا للقسمة على 2 .

(د) بين أن العدد N_p يقبل القسمة على 7 إذا وافقط إذا كان العدد $(3^p - 1)$ يقبل القسمة على 7 أيضا .

(هـ) إستنتج باقي قسمة العدد N_{2020} على 7 .

3 (أ) حل في Z^2 المعادلة: $3x - 7y = 4$.

(ب) إستنتج الأعداد الصحيحة a التي تحقق الجملة : $\begin{cases} a \equiv 1[3] \\ 2a \equiv 3[7] \end{cases}$. (ج) عين باقي قسمة العدد N_{2020} على 21.

4 نعتبر العدد الطبيعي M المكتوب في النظام ذي الأساس 4 على الشكل : $M = \overline{abb2a0}^4$.

(أ) عين قيم a و b علما أن : $M - 4 \equiv 0[7]$.

(ب) إستنتج قيم M و مكتوبة في النظام العشري .

الحل

1 أ) بواقي قسمة العدد 3^n على 7 .

نجد : $3^0 \equiv 1[7]$ ، $3^1 \equiv 3[7]$ ، $3^2 \equiv 2[7]$ ، $3^3 \equiv 6[7]$ ، $3^4 \equiv 4[7]$ ، $3^5 \equiv 5[7]$ و $3^6 \equiv 1[7]$

و نلخصها في الجدول التالي :

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

قيمة العدد الطبيعي n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
واقي قسمة العدد 3^n على 7	1	3	2	6	4	5

ب) نعلم أن : $2020 \equiv 4[7]$ أي : $2020 \equiv -3[7]$ و $1441 \equiv 6[7]$ أي : $1441 \equiv -1[7]$.

إذن : $2020^{1962} \times n + 4 \times 1441^{1954} \equiv 0[7]$ معناه : $(-3)^{1962} \times n + 4 \times (-1)^{1954} \equiv 0[7]$ أي : $3^{1962} \times n + 4 \times 1 \equiv 0[7]$

و منه : $3^6 k \times n + 4 \equiv 0[7]$ أي : $1 \times n + 4 \equiv 0[7]$ و منه : $n \equiv -4[7]$ و منه : $n \equiv 3[7]$. إذن : n=7k+3 مع $k \in \mathbb{Z}$.

2 أ) لدينا : $N_p = \underbrace{11.....1}_{\text{pfois}}$ إذن : $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + ... + 10^0$ و نعلم أيضا : $10 \equiv 1[3]$

و منه : $N_p = \underbrace{1+1+...+1}_{\text{pfois}}[3]$

إذن يكون : $N_p \equiv p[3]$ هو المطلوب .

ب) حسب السؤال (أ) لدينا : $N_p \equiv p[3]$

و منه يكون : $N_{2020} \equiv 2020[3]$

أي : $N_{2020} \equiv 1[3]$. و بالتالي باقي قسمة العدد N_p على 3 هو 1 .

ج) نعلم أن : $3 \equiv 1[2]$ أي : $3^n \equiv 1[2]$ و منه : $3^n - 1 \equiv 0[2]$ و بالتالي فإن العدد $(3^n - 1)$ يقبل القسمة على 2 .

د) نعلم أن : $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + ... + 10^0$ و $10 \equiv 3[7]$ إذن : $N_p \equiv (3^{p-1} + 3^{p-2} + ... + 1)[7]$.

نلاحظ أن $(3^{p-1} + 3^{p-2} + ... + 1)$ هو عبارة عن مجموع لمتتالية هندسية أساسها 3 و حدها الأول 1 . و منه : $N_p \equiv \frac{3^p - 1}{3 - 1}[7]$ أي : $N_p \equiv (\frac{3^p - 1)}{2})[7]$ أي : $2N_p \equiv (3^p - 1)[7]$.

- نفرض : $3^p - 1$ يقبل القسمة على 2 و نعلم أن : $3^p - 1$ يقبل القسمة على 2 إذن : $3^p - 1$ يقبل القسمة على 14 أي يكون : $3^p - 1 = 14\alpha$ بالقسمة على 2 نجد : $\frac{3^p - 1)}{2} = 7\alpha$ و منه : $N_p = 7\alpha$. و بالتالي فإن العدد N_p يقبل القسمة على 7 .

- و بالعكس نفرض : N_p يقبل القسمة على 7 أي : $N_p = 7\beta$ أي : $\frac{3^p - 1)}{2} = 7\beta$ و منه : $3^p - 1 = 14\beta$ إذن : العدد $3^p - 1$ يقبل القسمة على 7 .

النتيجة : العدد N_p يقبل القسمة على 7 إذا وافقط إذا كان العدد $3^p - 1$ يقبل القسمة على 7 .

ه) مما سبق لدينا : $N_{2020} \equiv (\frac{(3^{2020} - 1)}{2})[7]$ أي : $2N_{2020} \equiv (3^{2020} - 1)[7]$ و منه : $2N_{2020} \equiv (3^{6k+1} - 1)[7]$

أي : $2N_{2020} \equiv (4 - 1)[7]$ أي : $2N_{2020} \equiv 3[7]$ و منه يكون : $8N_{2020} \equiv 12[7]$ إذن نجد : $N_{2020} \equiv 5[7]$.

و بالتالي باقي قسمة العدد N_{2020} على 7 هو 5 .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

3 أ) لدينا : $3x-7y=4$ ، نلاحظ أن الثنائية $(6,2)$ هي حل خاص للمعادلة أي : $\begin{cases}3x-7y=4\\3(6)-7(2)=4\end{cases}$ بالطرح نجد :

$3(x-6)=7(y-2)$ ، لدينا : 7 يقسم $3(x-6)$ و 7 أولي مع 3 إذن حسب مبرهنة غوص فإن :

7 يقسم $(x-6)$

أي يكون : $x-6=7k$ و منه : $x=7k+6$ بالتعويض نجد : $y=3k+2$.

إذن حلول المعادلة هي : $(x,y)=\{(7k+6,3k+2)$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.

ب) لدينا الجملة : $\begin{cases}a\equiv 1[3]\\2a\equiv 3[7]\end{cases}$ أي : $\begin{cases}a\equiv 1[3]\\8a\equiv 12[7]\end{cases}$ و منه : $\begin{cases}a\equiv 1[3]\\a\equiv 5[7]\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}a=3u+1\\a=7v+5\end{cases}$ أي :

$3u+1=7v+5$.

و بالتالي نجد : $3u-7v=4$ و منه : $u=x=7k+6$ أي : $a=3(7k+6)+1$ إذن : $a=21k+19$ مع $(k\in\mathbb{Z})$

ج) لدينا : $\begin{cases}N_{2020}\equiv 1[3]\\N_{2020}\equiv 5[7]\end{cases}$ و حسب السؤال السابق يكون : $N_{2020}=21k+19$.

إذن باقي قسمة العدد N_{2020} على 21 هو 19 .

لدينا : $M=\overline{abb2a0}$ حيث : $0<a<4$ و $0\le b<4$ إذن : $M=a\times 4^5+b\times 4^4+b\times 4^3+2\times 4^2+a\times 4$

أ) لدينا : $M-4\equiv 0[7]$ أي : $(a\times 4^5+b\times 4^4+b\times 4^3+2\times 4^2+4a)-4\equiv 0[7]$ نعلم أن : $4\equiv -3[7]$

أي يكون : $(a\times(-3)^5+b\times(-3)^4+b\times(-3)^3+2\times(-3)^2+4a)-4\equiv 0[7]$ و منه نجد : $-a\times 5+4b-6b+4+4a-4\equiv 0[7]$

أي : $-a-2b\equiv 0[7]$ أو $a+2b\equiv 0[7]$.

نستعين بالجدول التالي لتعيين قيم a و b :

a \ b	0	1	2	3
1	1	3	5	0

إذن يكون $a+2b\equiv 0[7]$.

إذا كان : $\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$ أو $\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$.

ب) يكون لدينا : $M=\overline{133210}^4$ أو $M=\overline{322230}^4$.

بعد الحساب نجد : $(M=2020$ أو $M=3756$.

التمرين العاشر

1 عين مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث : $4x\equiv 33[5]$.

najah213.com · نجاح 213

2 أ - حل في Z^2 المعادلة ذات المجهول (x,y) التالية : $4x-5y=33.....(E)$.

ب - إستنتج حلول الجملة : $\begin{cases}\lambda\equiv 55[5]\\ \lambda\equiv 22[4]\end{cases}$ مع $(\lambda\in Z)$.

جـ - عين كل الثنائيات (x,y)حلول المعادلة (E) و التي تحقق : $|x+y+3|<27$.

3 أ - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد5^nعلى 11 .

ب - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم nيكون : $10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}\equiv 0[11]$.

جـ - عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة : $\begin{cases}n-5^n\equiv 0[11]\\ n\equiv 2[5]\end{cases}$.

4 نعتبر n عدد طبيعي يكتب $N=\overline{\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha}$ في نظام التعداد ذو الأساس 4 حيث :$\alpha\neq 0$. - عينαوβيحيث يكون N قابلا للقسمة على 33 ، ثم أكتب العددN في النظام العشري .

الحل

1 لدينا : $4x\equiv 33[5]$ و نعلم أن : $4\equiv -1[5]$ و $33\equiv 3[5]$ و منه تصبح : $-x\equiv 3[5]$

أي : $x\equiv -3[5]$ أي : $x\equiv 2[5]$ إذن : $x=5k+2$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.

2 أ) المعادلة : $4x-5y=33$ تكافئ $4x-33=5y$ أي يكون : $4x\equiv 33[5]$ و منه : $x=5k+2$.

بالتعويض نجد : $4(5k+2)-5y=33$ أي : $5y=20k-25$ و منه : $y=4k-5$.

إذن حلول المعادلة هي : $(x,y)=(5k+2,4k-5)$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.

ب) لدينا : $\begin{cases}\lambda\equiv 55[5]\\ \lambda\equiv 22[4]\end{cases}$ أي : $\lambda=5u+55=4v+22$

أي يكون : $5u-4v=-33$ و منه : $4v-5u=33$

ليكن حسب (أ) يكون : $v=5k+2$ و $u=4k-5$.

لدينا : $\lambda=5u+55$ أي : $\lambda=5(4k-5)+55$ و منه : $\lambda=20k+30$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.

ج) الحلول (x,y) لـ بحيث $|x+y+3|<27$:

لدينا : $\begin{cases}x=5k+2\\ y=4k-5\end{cases}$ أي : $|5k+2+4k-5+3|<27$

أي : $|9k|<27$أي :$|k|<3$و منه :$-3<k<3$

إذن : $k\in\{-2,-1,0,1,2\}$

و بالتالي : $(x,y)=(-8,-13),(-3,-9),(2,-5),(7,-1),(12,3)$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

3 أ) بواقي قسمة العدد 5^n على 11 .

نجد : $5^0 \equiv 1[11] 5^1 \equiv 5[11] 5^2 \equiv 3[11] 5^3 \equiv 4[11] 5^4 \equiv 9[11]$ و $5^5 \equiv 1[11]$.

و نلخصها في الجدول التالي :

قيم العدد الطبيعي n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
باقي قسمة العدد 5^n على 11	1	5	3	4	9

ب) لنبرهن أن : $10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{5n+3} + 49^{5n-1} \equiv 0[11]$.

لدينا : $5n-4 = 5n-5+5-4$ أي : $5n-4 = 5(n-1)+1$ و منه : $5n-4 = 5k+1$.

لدينا : $5n-1 = 5n-5+5-1$ أي : $5n-1 = 5(n-1)+4$ و منه : $5n-1 = 5k+4$.

إذن : $10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{5n+3} + 49^{5n-1} \equiv (-1)^{10n} + 5^{5k+1} + 5^{5n+2} + 5^{5n+3} + 5^{5k+4}[11]$

أي : $10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{5n+3} + 49^{5n-1} \equiv 1+5+3+4+9[11]$

أي : .

و منه : $10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{(5n+3)} + 49^{(5n-1)} \equiv 0[11]$ هو المطلوب .

ج) لدينا : أي :

و منه : $5k+2-5^{5k+2} \equiv 0[11]$ أي : $5k+2-3 \equiv 0[11]$

أي : $5k \equiv 1[11]$ و منه : $10k \equiv 2[11]$ أي : $-k \equiv 2[11]$ أي : $k \equiv -2[11]$ و منه : $k \equiv 9[11]$

إذن : $k = 11\alpha + 9$ و نعلم أن : $n = 5k+2$ أي : $n = 5(11\alpha+9)+2$ إذن : $n = 55\alpha + 47$.

4 4) لدينا : $N = \overline{\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha}^4$

أي : $(0 < \alpha < 4)$ و $(0 \leq \beta < 4)$.

لدينا : $N = \alpha \times 4^5 + \beta \times 4^4 + \beta \times 4^3 + \alpha \times 4^2 + \beta \times 4 + \alpha$ و نعلم أن : $4 \equiv 1[3]$

و منه : $N \equiv \alpha + \beta + \beta + \alpha + \beta + \alpha[3]$ أي : $N \equiv 3\alpha + 3\beta[3]$ و منه : $N \equiv 0[3]$. .

إذن : N يقبل القسمة على 3 مهما كان α و β و بالتالي يقبل القسمة على 33 إذا قبل القسمة على 11 .

- بواقي قسمة العدد 4^n على 11 : $4^0 \equiv 1[11]$ ، $4^1 \equiv 4[11]$ ، $4^2 \equiv 5[11]$] ، $4^3 \equiv 9[11]$ ، $4^4 \equiv 3[11]$ ، $4^5 \equiv 1[11]$.

إذن : $N \equiv \alpha \times 1 + \beta \times 3 + \beta \times 9 + \alpha \times 5 + \beta \times 4 + \alpha[11]$ أي : $N \equiv 7\alpha + 16\beta[11]$ أي : $N \equiv 7\alpha + 5\beta[11]$.

أي : $N \equiv -4\alpha - 6\beta[11]$ لأن : $\begin{cases} 7 \equiv -4[11] \\ 5 \equiv -6[11] \end{cases}$.

إذن : $N \equiv 0[11]$ معناه : $-4\alpha - 6\beta \equiv 0[11]$ أي : $-4\alpha \equiv 6\beta[11]$ أي : $-2\alpha \equiv 3\beta[11]$

و منه : $2\alpha \equiv 8\beta[11]$ أي : $\alpha \equiv 4\beta[11]$ أي يكون : $\alpha - 4\beta \equiv 0[11]$. بواقي القسمة على

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

إذن يكون : $\alpha - 4\beta \equiv 0[11]$ إذا كان : $\alpha = 1$ و $\beta = 3$. و منه بالتعويض نجد أن :
$N = 2013$.

التمرين الحادي عشر

1 حل في Z^2 المعادلة : $(E) : 3x - 8y = 5$.

2 n ، x و y أعداد صحيحة حيث : $n = 3x + 2$ و $n = 8y + 7$.

- بيّن أنّ الثنائية (x, y) حل للمعادلة (E) .
- نعتبر الجملة : $(S) : \begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$. بيّن أنّ : $n \equiv 23[24]$.

3 m عدد طبيعي :

- عيّن باقي قسمة 2^2m على 3 ، و باقي قسمة 7^2m على 8 .
- تحقّق أنّ العدد 1439 حل للجملة (S) .
- ما هو باقي قسمة : 1439^{2018} على 24 ؟ .

الحل

1 المعادلة : $(E) : 3x - 8y = 5$ ، الثّنائية $(-1;-1)$ هي حل ظاهر للمعادلة (E) .

x°	0	1	2	3	4	5	6

الآن نبحث عن كل الحلول : لدينا : $\begin{cases} 3x - 8y = 5 \ldots\ldots (1) \\ 3(-1) - 8(-1) = 5 \ldots\ldots (2) \end{cases}$ بطرح $(1)-(2)$ نجد :

$3(x+1) - 8(y+1) = 0$ أي : $3(x+1) = 8(y+1)$ ، العدد 8 يقسم $3(x+1)$ و 8 أوّلي مع 3 ، إذن حسب مبرهنة غوص : 8 يقسم $(x+1)$ أي : $x + 1 = 8k$ ، ومنه : $x = 8k - 1$. نعوّض قيمة x في $3(x+1) = 8(y+1)$ أي $3(8k) = 8(y+1)$ أي $3k = y + 1$ ومنه: $y = 3k - 1$ إذن حلول المعادلة (E) هي: $(x;y) = (8k-1;3k-1)$ حيث : $k \in \mathbb{Z}$.

2 أ) لدينا : $n = 3x + 2$ و $n = 8y + 7$ ، أي : $3x + 2 = 8y + 7$ ، ومنه : $3x - 8y = 5$.
إذن الثّنائية $(x;y)$ هي حل للمعادلة (E) .

ب) لدينا الجملة: $(S) : \begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$ ، إذن : $n = 3\alpha + 2$ و $n = 8\beta + 7$ ومنه: $3\alpha + 2 = 8\beta + 7$
أي : $3\alpha - 8\beta = 5$ ، إذن الثّنائية $(\alpha;\beta)$ هي حل للمعادلة (E) ،

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ومنه : $\begin{cases} \alpha = 8k-1 \\ \beta = 3k-1 \end{cases}$

ولدينا $n = 3x+2$ بالتعويض نجد : $n = 3(8k-1)+2$ أي $n = 24k-1$ أي : $n \equiv -1[24]$، ومنه : $n \equiv 23[24]$ ، وهو المطلوب .

3 أ) تعيّن باقي القسمة 2^2m على 3 ، و باقي قسمة 7^2m على 8 :

لدينا : $2^2m = (2^2)^m = 4^m$ ، ونعلم أنّ : $4 \equiv 1[3]$ أي : $4^m \equiv 1[3]$ ومنه : $2^2m \equiv 1[3]$.

لدينا : $7 \equiv -1[8]$ أي : $7^2 \equiv 1[8]$ ، أي : $(7^2)^m \equiv 1[8]$ ومنه : $7^2m \equiv 1[8]$.

ب) بقسمة 1439 على كلّ من 3 و8 نجد : $\begin{cases} 1439 \equiv 2[3] \\ 1439 \equiv 7[8] \end{cases}$ ومنه 1439 حل للجملة (S) .

ج) لدينا: $\begin{cases} 1439 \equiv 2[3] \\ 1439 \equiv 7[8] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 1439^{2018} \equiv 2^{2018}[3] \\ 1439^{2018} \equiv 7^{2018}[8] \end{cases}$

، و من السؤال (أ) سيكون لدينا : $2^{2018} \equiv 1[3]$ و $7^{2018} \equiv 1[8]$ ، إذن : $\begin{cases} 1439^{2018} \equiv 1[3] \\ 1439^{2018} \equiv 1[8] \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} 1439^{2018} - 1 \equiv 0[3] \\ 1439^{2018} - 1 \equiv 0[8] \end{cases}$. و بما أنّ3 و 8 أوّليان فيما بينهما إذن : $1439^{2018} - 1 \equiv 0[24]$ و منه : $1439^{2018} \equiv 1[24]$. إذن باقي قسمة 1439^{2018} على 24 هو 1 .

التمرين الثاني عشر

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نفرض الأعداد : $a_n = 4 \times 10^n - 1$ ، $b_n = 2 \times 10^n - 1$ ، $c_n = 2 \times 10^n + 1$.

1 أ) أحسب a_n ، b_n و c_n من أجل n يساوي 1 ، 2 و 3 .

ب) ما هو عدد أرقام العددين a_n و c_n؟ .

بيّن أنّ العددين a_n و c_n يقبلان القسمة على 3 .

ج) بيّن أنّ العدد b_3 أوّلي .

د) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $b_n \times c_n = a_2n$.

• إستنتج تحليلا إلى عوامل أوّلية للعدد a_6 .

ه) بيّن أنّ : $PGCD(b_n; c_n) = PGCD(c_n; 2)$. ثمّ إستنتج أنّ b_n و c_n أوّليان فيما بينهما .

2 نعتبر في Z^2 المعادلة : $b_3x + c_3y = 1 \ldots\ldots (1)$.

أ) برّر أنّ المعادلة (1) تقبل على الأقل حلاّ .

ب) طبّق خوارزمية إقليدس على b_3 و c_3 لإيجاد حلا خاصا للمعادلة (1) .

ج) حل في Z^2 المعادلة (1) .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الحل

1 أ)

$$\begin{cases} a_1 = 39 \\ b_1 = 19 \\ c_1 = 21 \end{cases} \cdot \begin{cases} a_2 = 399 \\ b_2 = 199 \\ c_2 = 201 \end{cases} \cdot \begin{cases} a_3 = 3999 \\ b_3 = 1999 \\ c_3 = 2001 \end{cases}$$

ب) عدد أرقام a_n و b_n هو : $n+1$.

بما أنّ : $10 \equiv 1[3]$ إذن : $10^n \equiv 1[3]$ ، ومنه : $4 \times 10^n \equiv 4[3]$ ، أي : $4 \times 10^n \equiv 1[3]$ ، أي : $4 \times 10^n - 1 \equiv 0[3]$ ، ومنه : $a_n \equiv 0[3]$. و أيضا بنفس الطريقة : $c_n \equiv 0[3]$.

ج) $b_3 = 1999$ ، $\sqrt{1999} 44,71$ ، b_3 لا يقبل القسمة على كل الأعداد الأوّلية الأصغر من 44,71 ، إذن هو أوّلي

د) $b_n \times c_n = (2 \times 10^n - 1)(2 \times 10^n + 1)$ ، أي : $b_n \times c_n = (2 \times 10^n)^2 - 1$ ، أي : $b_n \times c_n = 4 \times 10^2 n - 1$ ، و منه : $b_n \times c_n = a_2 n$ ، و هو المطلوب .

إستنتاج تحليلا للعدد a_6 : $a_6 = b_3 \times c_3$ ، أي : $a_6 = 1999 \times 2001$ ، و منه : $a_6 = 1999 \times 3 \times 23 \times 29$.

ه) نعلم أنّ : $PGCD(a;b) = PGCD(a;a-b)$ ، إذن : $PGCD(b_n;c_n) = PGCD(c_n;c_n - b_n)$ ، أي : $PGCD(b_n;c_n) = PGCD(c_n;2)$ ، لكن العدد c_n فردي ، إذن : $PGCD(c_n;2) = 1$ ، و منه : $PGCD(b_n;c_n) = 1$.

و منه فإنّ : b_n و c_n أوّليان فيما بينهما .

2 2) لدينا المعادلة : $b_3 x + c_3 y = 1 \ldots\ldots (1)$

أ) بما أنّ b_3 و c_3 أوّليان فيما بينهما ، إذن حسب مبرهنة بيزو المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا .

ب) لدينا : $\begin{cases} 2001 = 1999 \times 1 + 2 \\ 1999 = 999 \times 2 + 1 \end{cases}$ ، إذن : $1999 - 2 \times 999 = 1$ ، أي : $1999 - (2001 - 1999) \times 999 = 1$ ، أي : $1999 - 999 \times 2001 + 999 \times 1999 = 1$ ، و منه : $1000 \times 1999 - 999 \times 2001 = 1$.

إذن : $(1000;-999)$ حل خاص للمعادلة (1) .

ج) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) : $1999x + 2001y = 1$ ، و لدينا : $1999(1000) + 2001(-999) = 1$ ، بالطرح نجد : $1999(x-1000) + 2001(y+999) = 0$ ، $1999(x-1000) = -2001(y+999)$.

حسب غـــوص : $\begin{cases} x = 2001k + 1000 \\ y = -1999k - 999 \end{cases}$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

التمرين الثالث عشر

المتتالية (u_n) معرفة بحدها الأول u_0 حيث : $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n + 6$.

1 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n = 9 \times 2^n - 6$.

الدكتور : السكي داود - dr.daoud.sekki :

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

2 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : u_n يقبل القسمة على 6 .

3 نعرف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = \frac{u_n}{6}$.

نعتبر التصريح التالي : " من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : v_n عدد أولي " .

- اذكر إذا كان هذا التصريح صحيحا أو خاطئا ، مبررا إجابتك .

4 أ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $v_{n+1} - 2v_n = 1$.

ب - ماذا تستنتج بالنسبة للعددين v_n و v_{n+1} ؟ .

جـ - استنتج من أجل كل $n \geq 1$: $PGCD(u_n, u_{n+1})$.

الحل

1 1) نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ الخاصية $P(n)$ حيث : $u_n = 9 \times 2^n - 6 : P(n)$. نتحقق من صحة $P(n)$ من أجل $n = 0$ أي : $u_0 = 9 - 6$ و منه : $u_0 = 3$ (محققة) .

نفرض صحة $P(n)$ من أجل n كيفي أي : $u_n = 9 \times 2^n - 6$ ، ثم نثبت صحتها من أجل $n+1$ أي : $u_{n+1} = 9 \times 2^{n+1} - 6$.

لدينا : $u_{n+1} = 2u_n + 6$ و لدينا فرضا : $u_n = 9 \times 2^n - 6$ أي : $u_{n+1} = 2(9 \times 2^n - 6) + 6$ أي : $u_{n+1} = 9 \times 2^{n+1} - 12 + 6$

و منه : $u_{n+1} = 9 \times 2^{n+1} - 6$. إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n = 9 \times 2^n - 6$.

2 حسب ما سبق لدينا : $u_n = 9 \times 2^n - 6$ أي : $u_n = 9 \times 2 \times 2^{n-1} - 6$ أي : $u_n = 18 \times 2^{n-1} - 6$ و منه : $u_n = 6(3 \times 2^{n-1} - 1)$.

إذن : العدد u_n يقبل القسمة على 6 و ذلك من أجل كل $n \geq 1$.

3 3) لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \frac{u_n}{6}$ أي : $v_n = \frac{6(3 \times 2^{n-1} - 1)}{6}$ و منه : $v_n = 3 \times 2^{n-1} - 1$.

- نلاحظ أنه من أجل القيم : 5,4,3,1 لـ n يكون v_n أولي لكن لما : $n = 6$ يصبح : $v_n = 95$ هذا الأخير غير أولي

إذن : التصريح خـاطئ .

4 أ - من أجل كل $n \geq 1$ لدينا : $v_{n+1} - 2v_n = 3 \times 2^{(n+1)-1} - 1 - 2(3 \times 2^n - 1)$ أي : $v_{n+1} - 2v_n = 3 \times 2^n - 1 - 3 \times 2^n + 2$

و منه : $v_{n+1} - 2v_n = 1$ هو المطلوب .

ب - نستنتج حسب مبرهنة بيزو أن العددين : v_n و v_{n+1} أوليان فيما بينهما .

جـ - من أجل كل $n \geq 1$ لدينا : $v_n = \frac{u_n}{6}$ أي : $u_n = 6v_n$ و $u_{n+1} = 6v_{n+1}$ ، و بما أن العددين v_n و v_{n+1} أوليان فيما بينهما فإن : $PGCD(u_n, u_{n+1}) = 6$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين الرابع عشر

ليكن P عددا أوليا أكبر من أو يساوي 7 .

نريد في هذا التمرين البرهنة على أن العدد $n = P^4 - 1$ يقبل القسمة على 240 .

1 أ) بين أن : $P \equiv 1[3]$ أو $P \equiv -1[3]$.

ب) إستنتج أن العدد n يقبل القسمة على 3 .

2 أ) بملاحظة أن P عدد فردي بين أنه يوجد عدد طبيعي k حيث : $P^2 - 1 = 4k(k+1)$.

ب) إستنتج أن العدد n يقبل القسمة على 16 .

3 بين أن 5 قاسم للعدد n .

4 نعتبر a، b وcأعداد طبيعية .

أ) برهن أنه إذا كان c قابلا للقسمة على a وbمع هذين الأخيرين أوليان فيما بينهما فإنc يقبل القسمة على$a \times b$.

ب) إستنتج مما سبق أن العدد n يقبل القسمة على 240 .

5 5) هل توجد أعداد أولية : P_1 ، P_2 ..... ، P_15 كلها أكبر من أو تساوي 7 بحيث يكون العدد :

$A = P_1^4 + P_2^4 + ... + P_15^4$ أولياً ؟ .

الحل

1 أ) بما أن P عدد أولي أكبر من أو يساوي 7 إذن P لا يقبل القسمة على 3 أي أن باقي قسمة P على 3 هو : 1 أو 2 أي يكون : $P \equiv 1[3]$ أو $P \equiv 2[3]$ و منه : $P \equiv -1[3]$ هو المطلوب .

ب) بما أن : $P \equiv 1[3]$ أو $P \equiv -1[3]$ فإن : $P^4 \equiv 1[3]$ و منه : $P^4 - 1 \equiv 0[3]$ أي : $n \equiv 0[3]$.

إذن :nيقبل القسمة على 3 .

2 أ) بما أن P عدد فردي فإن : $P = 2k+1$ مع $(k \in \mathbb{N})$ أي : $P^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ و منه يكون : $P^2 - 1 = 4k^2 + 4k$ إذن نجد : $P^2 - 1 = 4k(k+1)$ هو المطلوب .

ب) نعلم أن الجداء $k(k+1)$ زوجي إذن : $k(k+1) = 2\alpha$ أي : $P^2 - 1 = 4 \times 2\alpha$ و منه : $P^2 = 8\alpha + 1$.

- لنحسب P^4 : $P^4 = (8\alpha+1)^2 = 64\alpha^2 + 16\alpha + 1$ أي : $P^4 - 1 = 64\alpha^2 + 16$ α و منه : $n = 16(4\alpha^2 + \alpha)$.

إذن :n يقبل القسمة على 16 .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

3) نعلم أن العدد P لا يقبل القسمة على 5 إذن : $P \equiv 1[5]$ أو $P \equiv 2[5]$

أي : $P^4 \equiv 1[5]$ أو $P^4 \equiv 16[5]$

أي : $P^4 \equiv 1[5]$ و منه : $P^4 - 1 \equiv 0[5]$ أي : $n \equiv 0[5]$ و بالتالي فإن 5 قاسم للعدد n .

3 أ) نفرض c يقبل القسمة على كل من a و b أي يكون : c=k.a و $c = k'.b$ و منه : $k.a = k'.b$.

لكن : a و b أوليان فيما بينهما ، إذن : نستخدم مبرهنة غوص .

لدينا : b يقسم $k.a$ و b أولي مع a، إذن : b يقسم k و بالتالي : $k = \alpha \times b$.

لدينا : $c = k.a$ أي : $c = \alpha \times b \times a$ و منه : c يقبل القسمة على الجداء $a \times b$.

ب) لدينا : nيقبل القسمة على 3 و على 5 و هما أوليان فيما بينهما ، إذن : n يقبل القسمة على 5×3أي على 15

و من جهة أخرى لدينا : nيقبل القسمة على 16 الذي هو أولي مع 15 و بالتالي فإن : nيقبل القسمة على 16×15 ، إذن : n يقبل القسمة على 240 .

4 بما أن الأعداد : $P_1 P_2 ..... P_15$ أولية و أكبر من أو تساوي 7 إذن يكون :

$$\begin{cases} P_1^4 - 1 \equiv 0[240] \\ P_2^4 - 1 \equiv 0[240] \\ \vdots \\ P_{15}^4 - 1 \equiv 0[240] \end{cases}$$

بالجمع نجد : $P_1^4 + P_2^4 + ... + P_15^4 - 15 \equiv 0[240]$.

أي : $A - 15 \equiv 0[240]$ أي : $A - 15 = 240\beta$ و منه : $A = 240\beta + 15$ أي : $A = 15(16\beta + 1))$.

إذن : العددAليس أوليا و بالتالي لا توجد الأعداد P_1 ، P_2 ، ..... P_15 .

التمرين الخامس عشر

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E) : 2019x - 2018y = 5$.

1 بين أن الثنائيات (x, y) هي حل للمعادلة (E)إذا كان : $\begin{cases} x = 5 + 2018k \\ y = 5 + 2019k \end{cases}$ مع $(k \in \mathbb{Z})$.

2 n عدد طبيعي غير معدوم ، نضع :

$a_n = 5 + 2018^{n+1}$ و $b_n = 5 + 2019 \times 2018^n$.

أ - بين أن كل قاسم مشترك لـ a_n و b_n هو قاسم لـ 5 .

ب - استنتج أن : $PGCD(a_n, b_n) = 1$.

جـ - نقبل أن : $a_n^4 \equiv 1[5]$ و $b_n^4 \equiv 1[5]$ ، استنتج عندئذ أن 25 يقسم $(a_n^4 - 1)(b_n^4 - 1)$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

د - عين رقمي الآحاد و العشرات للجداء $(a_n^4-1)(b_n^4-1)$.

3 نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة $(F): z^{2015} \equiv 101[2019]$ و ليكن z هو حل للمعادلة (F) .

أ - بين أن : $PGCD(z,2019)=1$ ، ثم استنتج أن : $z^{2016} \equiv 1[2019]$ (لاحظ أن : $2019 = 3 \times 673$) .

ب - بين أن : $101z \equiv 1[2019]$.

جـ - عين مجموعة حلول المعادلة (E) .

الحل

لدينا : $(E): 2019x - 2018y = 5$.

1 الثنائيات (x,y) حل للمعادلة (E) تكافئ : $2019x-2018y=5$ تكافئ : $2019x-2018y=5(2019-2018)$

تكافئ : $2019x-2018y=5\times2019-5\times2018$ تكافئ : $2019(x-5)=2018(y-5)$.

إذن : 2019 يقسم $2018(y-5)$ ، 2019 و 2018 اوليان فيما بينهما ، حسب مبرهنة غوص فإن :

2019 يقسم $(y-5)$ أي : $y-5=2019k$ و منه : $y=2019k+5$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.

بالتعويض نجد : 2019 $(x-5)=2018(2019k+5-5)$ أي : $x-5=2018k$.

و منه : $x=2018k+5$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (E)هي : $S=\{(2018k+5,2019k+5)\}$.

2 لدينا من أجل $n\in\mathbb{N}^*$: $a_n=5+2018^{n+1}$ و $b_n=5+2019\times2018^n$.

أ - نضع $PGCD(a_n,b_n)=d$ إذن : d/a_n و d/b_n إذن : $d/2019a_n-2018b_n$ و منه : $d/5$.

ب - حسب ما سبق وجدنا أن كل قاسم مشترك للعددين a_nو b_n هو قاسم لـ 5 إذن قيم dهي : 1 و 5 .

لدينا : 5 أولي و 5 لا يقسم 2018 إذن : 5 يقسم 5 و لا يقسم 2018^{n+1}.

و منه : 5 لا يقسم $(5+2018^{n+1})$

إذن : 5 ليس قاسما لـ a_n أي أن : $PGCD(a_n,b_n)\neq5$ و بالتالي فإن : $PGCD(a_n,b_n)=1$.

جـ - لدينا : $\begin{cases} a_n^4\equiv1[5] \\ b_n^4\equiv1[5] \end{cases}$ أي : $\begin{cases} a_n^4-1\equiv0[5] \\ b_n^4-1\equiv0[5] \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} a_n^4-1=5k;k\in\mathbb{Z} \\ b_n^4-1=5k';k'\in\mathbb{Z} \end{cases}$

إذن : $(a_n^4-1)(b_n^4-1)=25kk'$

و بالتالي فإن : 25 يقسم $(a_n^4-1)(b_n^4-1)$.

د - لدينا : $(a_n^4-1)=(a_n^2-1)(a_n^2+1)=(a_n-1)(a_n+1)(a_n^2+1)$.

نعلم أن : $a_n=5+2018^{n+1}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

أي أن : a_n فردي و بالتالي فإن : (a_n-1) و (a_n+1) زوجيان و منه :

$$\begin{cases} a_n-1=2p, p\in\mathbb{Z} \\ a_n+1=2p', p\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

أي : $(a_n-1)(a_n+1)=4pp'$ أي : $(a_n-1)(a_n+1)(a_n^2+1)=4pp'(a_n^2+1)$ إذن : (a_n^4-1) مضاعف لـ 4 .

و بالتالي فإن : $(a_n^4-1)(b_n^4-1)$ مضاعف لـ 4 أي أن : $(a_n^4-1)(b_n^4-1)\equiv 0[4]$.

لدينا : $\begin{cases} (a_n^4-1)(b_n^4-1)\equiv 0[4] \\ (a_n^4-1)(b_n^4-1)\equiv 0[25] \end{cases}$ مع 4 و 25 اوليان فيما بينهما ،

إذن : $(a_n^4-1)(b_n^4-1)\equiv 0[100]$.

و منه : رقمي الآحاد و العشرات للعدد $(a_n^4-1)(b_n^4-1)$ هما 0 .

3 لدينا : $(F): z^{2015}\equiv 101[2019]$.

أ - نضع : $PGCD(z,2019)=d$ ، لدينا : $z^{2015}\equiv 101[2019]$

معناه : $z^{2015}=2019k+101$ أي : $z^{2015}-2019k=101$

نعلم أن : d/z و $d/2019$ و بالتالي : $d/(z^{2015}-2019k)$ إذن : $d/101$ و منه : $d\in\{1,101\}$. نعلم أن 101 (أولي) ليس قاسما لـ 2019 أي أن : $PGCD(z,2019)\neq 101$ و بالتالي : $PGCD(z,2019)=1$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com