najah213.com · نجاح 213



الدوال العددية

reem. engineer

① - اتجاه التغير :

- أولا نحسب المشتقة :

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

$f'(x) = 6x + 2$

$f(x) = u/v$

$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

- ندرس إشارة المشتقة على $\mathbb{R}$:

← $f'(x) \geq 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على هذه المجال ، والعكس .

- ثم نضع جدول التغيرات .

② - معادلة المماس :

$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

- في القراءة البيانية :

f' (قيمة)

القيمة = قيمة حدية ↓ f' (قيمة) $= 0$

القيمة = فاصلة نقطة التماس ، معامل توجيه المماس = f' (قيمة)

③ - مركز و محور التناظر :

المركز . $f(2a - x) + f(x) = 2b$

المحور . $f(2a - x) = f(x)$

④ - وضعية منحنى بالنسبة لمستقيم :

نضع : $f(x) - y$ ندرس إشارة الفرق و على أساسه نبني جدول الوضعية .

⑤ - مبرهنة القيم المتوسطة :

صيغة السؤال : بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $\alpha \in]-1,48 ; -1,47[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

الجواب : الدالة g معرفة و مستمرة و رتيبة على $I =]-1,48 ; -1,47[$:

$g(-1,48) = \sim$ $= -\sim$

$g(-1,47) = \sim$ $= +\sim$

لدينا : $g(-1,48) * g(-1,47) < 0$

إذن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ...

* الإشارة : حسب مبرهنة ق م

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

حسب إشارة g

⑥ - النهايات :

- نهاية كثير حدود : يؤول لحساب نهاية أعلى حد .

- نهاية دالة ناطقة : يؤول لحساب نهاية أعلى على أعلى حد / بقيمة كبرى و صغرى للقيم الممنوعة .

• التفسير الهندسي :

← $x = a$ م م عمودي لـ (C_f) فوار $\pm\infty$

← $y = b$ م م أفقي لـ (C_f) فوار $\pm\infty$

Scanné avec CamScanner

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

• المستقيم المقارب المائل:

- حتى يكون $y = ax+b$ مقارب لـ (C_f) يجب أن يكون:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - y = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - y = 0 \end{cases}$$

حالات ع ت:

وطرق رفعها:

1. طريقة الاختزال: $\frac{0}{0}$

* عند تواجد دالة ناطقة؛ نقسم البسط على المقام ونختزل الحدود المتشابهة؛ ثم نحسب النهاية عند x_0.

2. طريقة العدد المشتق: $\frac{0}{0}$

* عند تواجد دالة كسرية؛

$$f(x) = \frac{g(x) - g(x_0)}{x}$$

نشتق $g(x)$ وما نتحصل عليه نحسب عنده النهاية.

3. طريقة العامل المشترك: $\infty - \infty$

4. طريقة الضرب في المرافق:

نضرب ونقسم على المرافق إذا كان:

$$f(x) = \sqrt{ax+b} \pm ax$$

ونحسب النهاية.

5. طريقة الحصر:

لدينا: $h(x) < f(x) < g(x)$

$$\lim_{x \to \infty} h(x) = b \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = b \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

6. طريقة المقارنة:

$f(x) \geq g(x)$

و $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = +\infty$ إذن:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ مباشرة.

نقطة الانعطاف:

1. إذا انعدمت المشتقة الثانية عند x_0 وغيرت إشارتها فإن $(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف لـ (C_f).

2. إذا كان نقطة (~~انعطاف~~) مركز تناظر هي نقطة من (C_f).

3. إذا انعدمت المشتقة الثانية ولم تغير إشارتها عند النقطة A فإن A ن إ.

4. نقطة التماس هي نقطة انعطاف لـ (C_f) وقطع المنحنى للمماس.

reem. engineer

Scanné avec CamScanner

najah213.com · نجاح 213

الدالة الأسية:

1. خواص الدالة الأسية

- مع التعريف: $D_{e^x} = \mathbb{R}$ و $e^x > 0$
- $f(x) = e^x$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$
- خواص:
  - $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$
  - $e^x / e^y = e^{x-y}$
  - $\sqrt{e^a} = e^{a/2}$
  - $\ln e^a = a$
  - $(e^x)^y = e^{xy}$
  - $e^0 = 1$

2. إشتقاق الدالة e^x:

$$(e^{f(x)})' = f'(x)\, e^{f(x)}$$

$$(e^{2x+1})' = 2e^{2x+1}$$

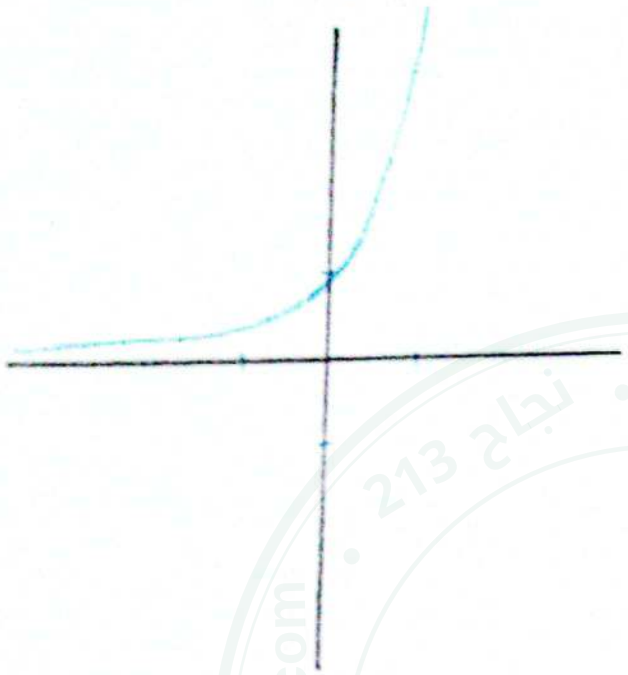
3. النهايات:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي لـ C_f بجوار $-\infty$

4. التمثيل البياني:



- نهاية الدالة $e^{f(x)}$ تؤول لحساب نهاية مركب الدالتين:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \begin{cases} \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \\ \lim_{x \to \ell} e^x = \star \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \star$$

4. النزايد المقارن:

① $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

② $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$

③ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

④ $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$\lim_{x \to 0} (\text{كثير حدود}) e^{\frac{1}{x}} =$ حسب النهايات

$\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}} \pm (\text{كثير حدود}) =$ " "

① $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

② $\lim_{h \to 0} \frac{f(h + x_0) - f(x_0)}{h}$

- ℓ: عدد ← مماس مائل ذو معادلة $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- 0: مماس أفقي ← $y = f(x_0)$
- $\pm\infty$: مماس نصف-وتري معادلته $x = x_0$

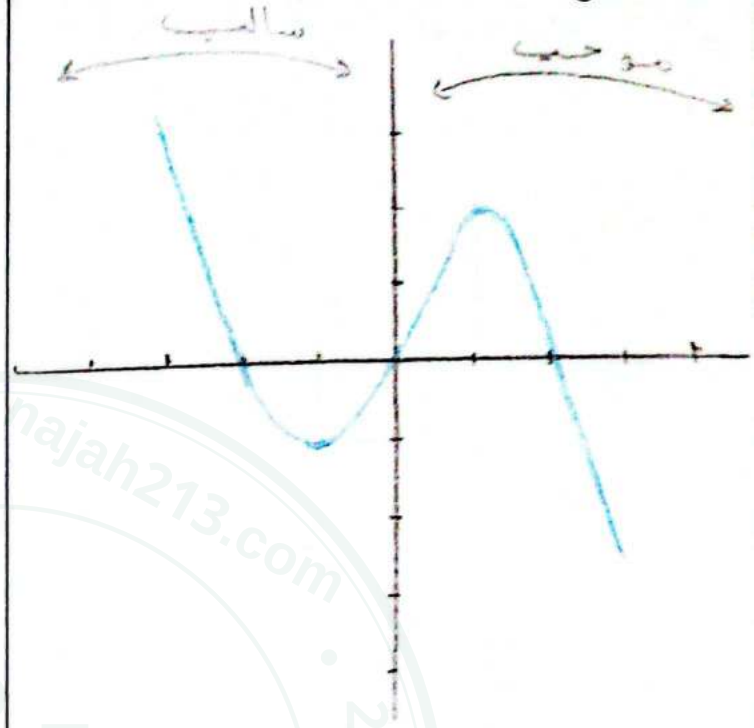
Scanné avec CamScanner

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ملخص المبيانية

الأفقية:

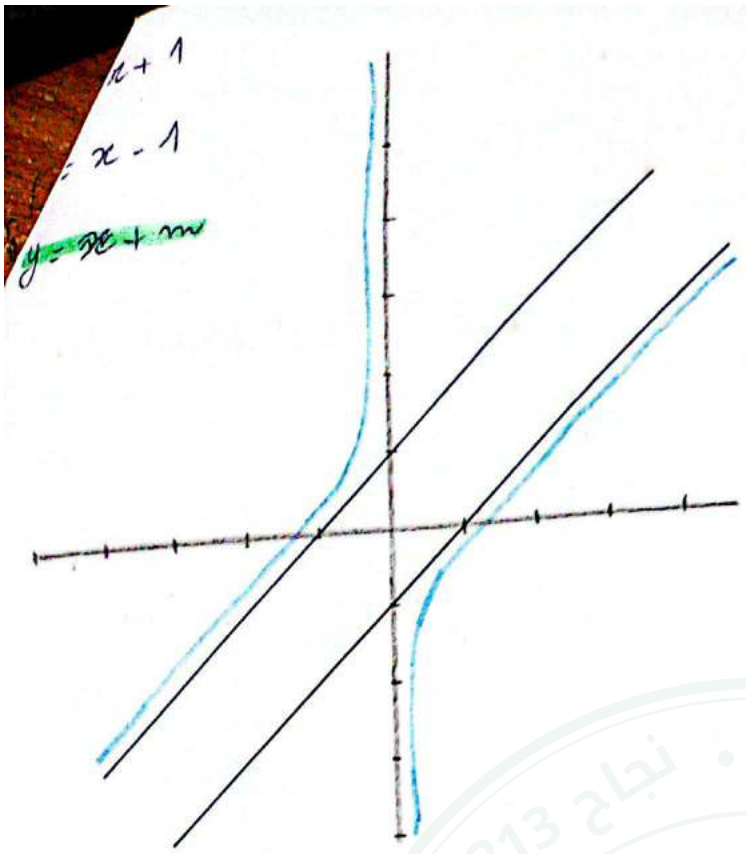


حلول المعادلة $f(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع: $y=m$

- $m<-1$: حل وحيد موجب
- $m=-1$: حلين أحدهما مضاعف وآخر موجب
- $-1<m<0$: حلين سالبين وحل موجب
- $m=0$: 3 حلول معدوم ؛ موجب وسالب
- $0<m<2$: 3 حلول ؛ 2 موجبة و1 سالب
- $m=2$: حل مضاعف $x=2$ وآخر سالب
- $m>2$: حل وحيد سالب

الثالثة:

* حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع $y=x+m$:



- $m\in]-\infty;-1[$: يوجد حل وحيد موجب
- $m\in[-1;1[$: لا يوجد حلول
- $m\in]1;+\infty[$: يوجد حل وحيد سالب

الدورانية:

reem. engineer

Scanné avec CamScanner

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الدالة اللوغاريتمية

1. خواص الدالة اللوغاريتمية :

هي دالة معاكسة للدالة الأسية تحقق :

$$\ln e^a = a$$

نرمز لها بـ $\ln x$ وهي معرفة على $]0;+\infty[$ (المهم أن يكون ما داخل ln موجب)

① - $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$.

② - $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$.

③ - $\ln a^n = n \ln a$.

④ - $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

⑤ - $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$.

2. النهايات :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

3. المشتقة :

$$f(x) = \ln(u(x))$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

4. النهايات المقارنة :

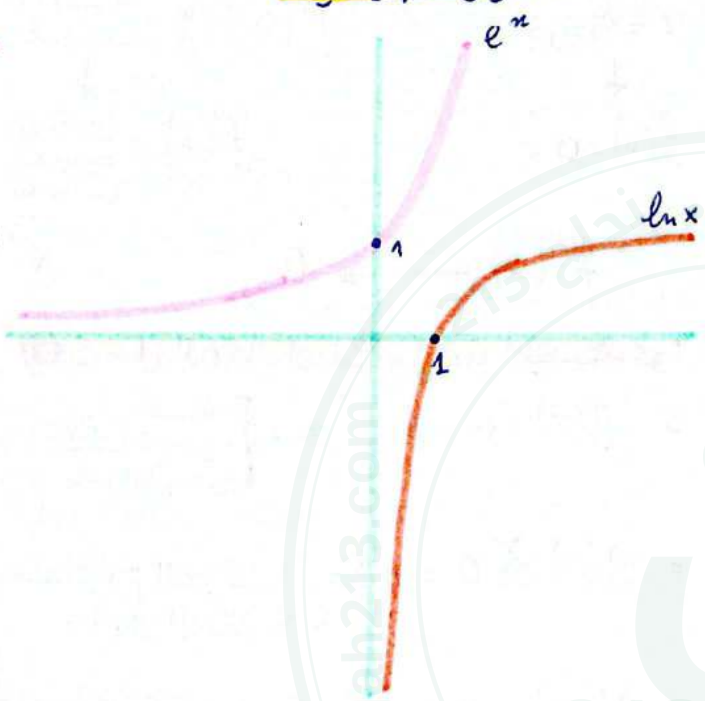
① - $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x - 1}{x - 1} = 1$

② - $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

③ - $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

④ - $\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$

⑤ . التمثيل البياني :



reem.enginneer

Scanné avec CamScanner

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

القراءة البيانية

① - مجموعة التعريف: نقرأ من المنحنى وإذا كانت هناك قيمة ممنوعة نذكرها.

② - إيجاد الصور:

$f'(x)$

- x = نقطة تماس ← $f'(x)$ = معامل توجيه المماس
- x = ذروة ← $f'(x)=0$

$f''(0) \longrightarrow 0$

③ - حل المعادلات والمتراجحات:

- $g(x)=0 \Rightarrow x=$ { نقط التقاطع مع محور الفواصل }
- $g(x) \gtrless 0 \Rightarrow$ نستخرج المجالات من جدول الإشارة.
- $g'(x)=0 \Rightarrow x=$ الذروات
- $g'(x) \gtrless 0 \Rightarrow$ نعتمد على جدول إشارته الذي يكون معتمداً على تزايد أو تناقص الدالة.

④ - مبرهنة القيم المتوسطة:

"..."

$g(A) \gtrless 0 \leftarrow$ القيم مع البيان $\rightarrow g(B) \gtrless 0$

$g(A) \cdot g(B) < 0$

"..."

⑤ - تعيين الثوابت a و b و c:

إذا كانت $(\mathcal{C}_f)$ تقبل في النقطة $A(x_0;y_0)$ مماسا يوازي محور الفواصل:

$$\begin{cases} f(x_0)=y_0 \\ f'(x_0)=0 \end{cases}$$ نحل الجملة ..... ①

- إذا كانت $(\mathcal{C}_f)$ تقبل في النقطة ذات الفاصلة x_0 مماسا يوازي المستقيم ذو المعادلة: $y=mx+k$

$$\begin{cases} f(x_0)=mx_0+k \\ f'(x_0)=m \end{cases}$$ نحل الجملة ..... ②

- إذا كانت $(\mathcal{C}_f)$ تقبل في $A(x_0;y_0)$ مماسا يشمل $B(x_1;y_1)$:

$$\begin{cases} f(x_0)=y_0 \\ f'(x_0)=\dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1} \end{cases}$$ ..... ③

من ① و ② و ③ ← نستخرج العلاقة ونجد الثوابت a و b و c.

reem. enginneer

Scanné avec CamScanner

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

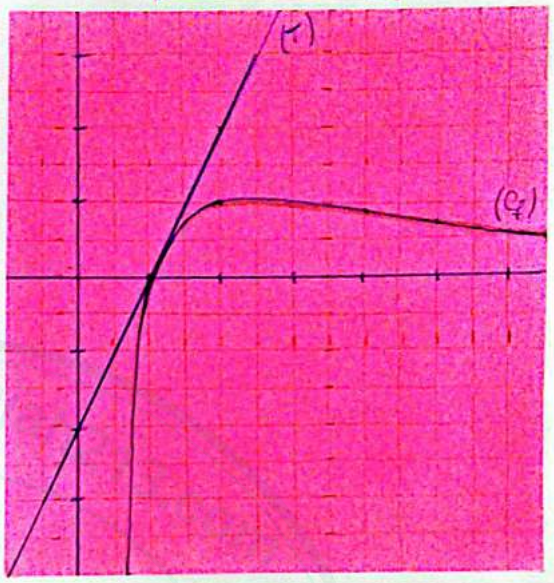
najah213.com · نجاح 213

المناقشة البيانية

بالتفصيل

① - المناقشة الأفقية :

$f(x) = |m|$



• حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = |m|$ ؛ حيث $m \geq 0$:

• $|m| = 0 \Leftarrow$ للمعادلة حل وحيد ؛

• $0 < |m| < 1$ أي $0 < m < 1$ و منه $-1 < m < 0$ للمعادلة حلان .

• $|m| = 1$ أي $m = 1$ أو $m = -1$ للمعادلة حل مضاعف .

• $|m| > 1$ أي $m \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ و يوجد حلول للمعادلة ؛

$f(x) = |m - 1|$

• حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع $y = |m - 1|$: حيث : $|m - 1| \geq 0$:

• $|m - 1| = 0$ أي : $m = 1$ للمعادلة حل وحيد ؛

• $0 < |m - 1| < 1$ أي : $(m - 1) \in]-1 ; 0[\cup]0 ; 1[$ ؛ ومنه : $m \in]0 ; 1[\cup]1 ; 2[$. للمعادلة حلان .

• $|m - 1| = 1$ أي $m = 2$ أو $m = 0$ للمعادلة حل مضاعف ؛

• $|m - 1| > 1$ أي : $(m - 1) \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ ؛

ومنه : $m \in]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[$ لا يوجد حلول للمعادلة ؛

$f(x) = -m$

• $-m \leq 0$ و منه $m \geq 0$: للمعادلة حل وحيد ؛

• $0 < -m < 1$ و منه $0 > m > -1$: للمعادلة حلان ؛

• $-m = 1$ و منه $m = -1$: للمعادلة حل مضاعف ؛

• $-m > 1$ و منه $m < -1$: لا يوجد حلول ؛

$f(x) = m^2$

$m \geq 0$

• $m^2 = 0$ أي $m = 0$ للمعادلة حل وحيد ؛

• $0 < m^2 < 1$ أي $m \in]-1 ; 0[\cup]0 ; 1[$ للمعادلة حلان .

• $m^2 = 1$ أي $m = -1$ أو $m = 1$ للمعادلة حل مضاعف ؛ $x = 2$

• $m^2 > 1$ أي $m \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ لا يوجد حلول للمعادلة ؛

$f(x) = \sqrt{m}$

$m \geq 0$

• $\sqrt{m} = 0$ أي $m = 0$ للمعادلة حل وحيد ؛

• $0 < \sqrt{m} < 1$ أي $0 < m < 1$ للمعادلة حلان

• $\sqrt{m} = 1$ أي $m = 1$ للمعادلة حل مضاعف ؛ $x = 2$

• $\sqrt{m} > 1$ أي $m > 1$ لا يوجد حلول للمعادلة ؛

good luck

Scanné avec CamScanner

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

reem. enginneer

$f(x) = e^m - 1$

- $e^m - 1 \leq 0$ أي $m \leq 0$ للمعادلة حلا وحيدا.
- $0 < e^m - 1 < 1$ أي $0 < m < \ln 2$ للمعادلة حلان.
- $e^m - 1 = 1$ أي $m = \ln 2$ للمعادلة حل مضاعف $x = 2$.
- $e^m - 1 > 1$ أي $m > \ln 2$ لا يوجد حلول للمعادلة.

$f(x) = \ln m$ $\quad m > 0$

- $\ln m \leq 0$ أي $m \leq 1$ للمعادلة حل.
- $0 < \ln m < 1$ أي $1 < m < e$ للمعادلة حلان.
- $\ln m = 1$ أي $m = e$ للمعادلة: حل مضاعف $x = 2$.
- $\ln m > 1$ أي $m > 1$ لا يوجد حل.

$f(x) = f(m)$

لدينا النقطة مجموعة النقط من (C_f) حيث $M_m(m; f(m))$

- $f(m) \leq 0$ أي: $m \in]0; 1]$ للمعادلة حل وحيد.
- $0 < f(m) < 1$: أي $m \in]1; 2[\cup]2; +\infty[$ للمعادلة حلين.
- $f(m) = 1$ أي $m = 2$: للمعادلة حل مضاعف.
- $f(m) > 1$: لا يوجد حلول.

$|m| > b$
$\Rightarrow m \in]-\infty; -b[\cup]b; +\infty[$.

$|m| < b$ { $|m| = b$; $m = b$; $m = -b$
$\Rightarrow -b < m < b$

$f(x) = f(m)$

ج1: نقوم بإدخال قيمة k وفق $f(x) = k$.
ج2: نعمل جدول تغيرات f و $f(m)$.
ج3: نعمل إسقاط من جدول f على المحور لإيجاد m.

Scanné avec CamScanner

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com