MATH

الأستاذ الكالي خليل



الكالي للرياضيات

2AS

الشعب العلمية

النهايات

- جميع الشعب العلمية
- تمارين متنوعة شاملة
- شرح مبسط
- دروس وتمارين

من اعداد
الأستاذ الكالي خليل

لمتابعتنا عبر صفحتنا على الفيسبوك او على اليوتيوب قومو بالظغط على الروابط الاتية

ELKALI MATH

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

تمرين 01

ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

1) $f(x) = x^2 + x + 1$ / $D_f = \mathbb{R}$
2) $f(x) = x^3 - x + 5$ / $D_f = \mathbb{R}$
3) $f(x) = -3x^2 + 5x$ / $D_f = \mathbb{R}$
4) $f(x) = -3x^3 + 3x + 1$ / $D_f = \mathbb{R}$

تمرين 02

ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

1) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ / $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$
2) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+2}$ / $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$
3) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ / $D_f = \mathbb{R}$
4) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ / $D_f =]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$
5) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ / $D_f = \mathbb{R}$
6) $f(x) = \frac{\sin(x+1)}{x^2+1}$ / $D_f = \mathbb{R}$
7) $f(x) = \frac{\cos(x+3)}{x^2+3}$ / $D_f = \mathbb{R}$

تمرين 03

ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ / $D_f = \mathbb{R}$
2) $f(x) = x^3 + 2x + 1$ / $D_f = \mathbb{R}$
3) $f(x) = \frac{2x^2+5x+10}{2x+4}$ / $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$
4) $f(x) = \frac{x^2+x}{x-2}$ / $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$
5) $f(x) = \frac{x^2+3x+6}{x+2}$ / $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$
6) $f(x) = \frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}$ / $D_f = \mathbb{R} - \{-1,3\}$

ELKALI MATH
الكالي للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

7) $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$ / $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

8) $f(x)=\frac{x^2-8x+19}{x-3}$ / $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

9) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ / $D_f=\mathbb{R}$

10) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ / $D_f=]-\infty;0]\cup[2;+\infty[$

تمرين 04

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ ب: $f(x)=\frac{3x^2+5x+6}{x^2}$

- ادرس نهايات الدالة عند حدود مجموعة تعريفها، مبينا المستقيمات المقاربة ل (C) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم.

تمرين 05

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ ب: $f(x)=x+1+\frac{1}{x-1}$ ،وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ، $-\infty$

2) ادرس وضيفة المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم المقارب المائل (Δ).

تمرين 06

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ ب: $f(x)=\frac{3x+1}{x-2}$

1) عين العددين الحقيقين a و b ،بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x\neq 2$ تكون $f(x)=a+\frac{b}{x-2}$

2) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

3) استنتج المستقيمات المقاربة ل (C) المنحنى الممثل للدالة f

تمرين 07

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ ب: $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x-1}$

1) عين الاعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x\neq 2$ تكون $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$

2) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

3) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل ل (C_f) الممثل للدالة fعند $+\infty$ ، $-\infty$

4) ادرس الوضع النسبي ل (C_f) بالنسبة (D).

ELKALI MATH
الكالي للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

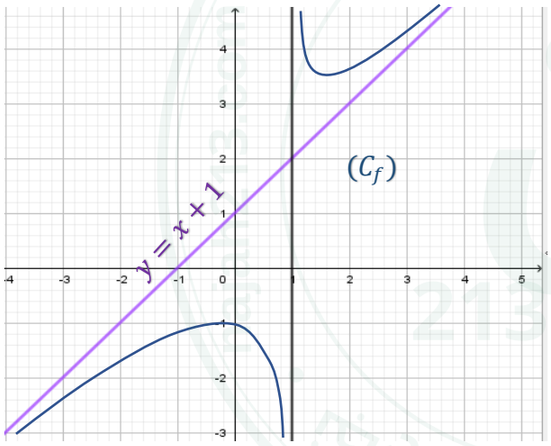
تمرين 08

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2,1\}$ بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$		$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$	
	-3		$-\infty$				1

- عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.
- حدد المستقيمات المقاربة ل (C_f) المنحنى الدالة f

تمرين 09

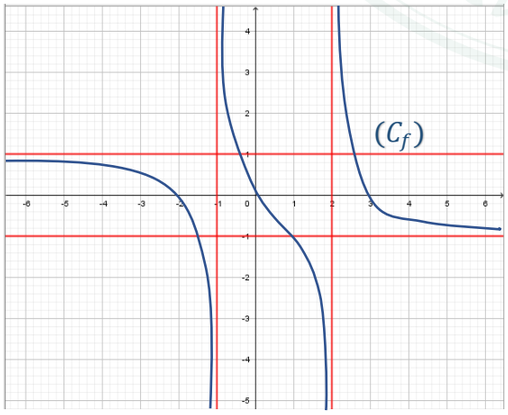


الدالة f تمثيلها البياني (C_f) المبين في الشكل المقابل

بقراءة بيانية :

1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f
2) عين نهايات الدالة f ،عند حدود مجموعة تعريفها.
3) عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f)
4) ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$

تمرين 10



الدالة f تمثيلها البياني (C_f) المبين في الشكل المقابل

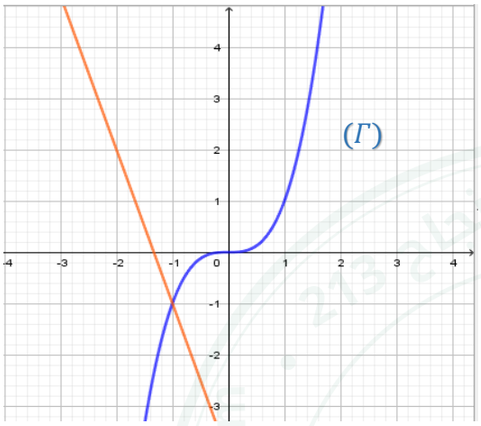
بقراءة بيانية:

1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f
2) عين نهايات الدالة f ،عند حدود مجموعة تعريفها.
3) عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f)

najah213.com · نجاح 213

مسألة 01

I) المستوي منسوب الى المعلم م.م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ في الشكل المرافق,(Γ) المنحنى الممثل للدالة $x \to x^3$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = -3x - 4$



g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = x^3 + 3x + 4$

بقراءة بيانية:

أ) حدد وضعية (Γ) بالنسبة الى (Δ) على $\mathbb{R}$

ب) استنتج إشارة $g(x)$

II) الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \frac{x^3-2}{x^2+1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم م.م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3) أ- بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

4) أنشئ (Δ) و (C_f) (يعطى: $f(1,25) \approx 0$)

5) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة $f(x) = m$

مسألة 02

I) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ب: $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x-1}$, وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم م.م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) احسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ ، $-\infty$ و $2-$

2) عين الاعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$ تكون $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

3) استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعين معادلة له ثم ادرس وضعية(C_f) بالنسبة ل(Δ).

4) ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ELKALI MATH
الكالي للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

5) بين ان النقطة $\omega(1,4)$ هي مركز تناضر للمنحنى (C_f)

6) عين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حاملين المحورين.

7) ارسم كل من (C_f) والمستقيمات المقاربة

8) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة $m^2 + 2x - 1 - mx + m = 0$

II) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ ب: $g(x) = |f(x)|$

أ) اكتب $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

ب) ارسم (C_g) منحنى الدالة g بالاعتماد على (C_f)

III) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ ب: $h(x) = f(|x|)$

أ) اكتب $h(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

ب) ارسم (C_h) منحنى الدالة h بالاعتماد على (C_f)

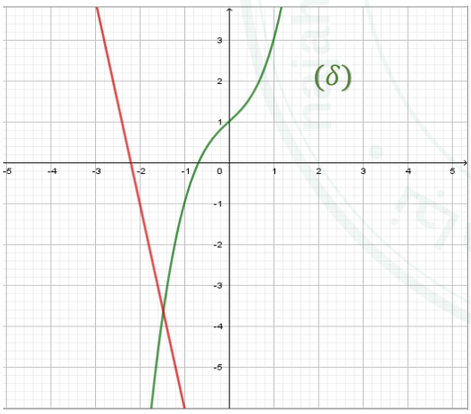
IIII) لتكن الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}^*$ ب: $k(x) = \frac{x^2+4x+2}{x}$

أ) بين من اجل $x \neq 0$ ان: $k(x) = f(x+1)$

ب) استنتج ان (C_h) منحنى الدالة h هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ (C_h).

مسألة 03

المستوي منسوب الى معلم متجانس



I) (δ) التمثيل البياني للدالة $x \to h(x) = x^3 + x + 1$ و (D) التمثيل البياني للمستقيم ذو المعادلة $a, y = -5x - 11$ هي فاصلة تقاطع (D) و (δ).

1) بقراءة بيانية حدد وضعية (δ) بالنسبة الى (Δ) على المجال $\mathbb{R}$

2) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x) = x^3 + 6x + 12$

أ- بين من اجل $x \in \mathbb{R}$ يكون $g(x) = h(x) - y$

ب- استنتج إشارة $g(x)$

ت- تحقق ان $-1.47 < \alpha < -1.48$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \frac{x^3-6}{x^2+2}$

1) عين الاعداد الحقيقية a ، b ، c و d بحيث من اجل كل عدد حقيقي x تكون: $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+2}$

ELKALI MATH
الكالي للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) أ- بين من اجل x عدد حقيقي: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4) أ- بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

5) بين ان $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ،ثم استنتج حصر للعدد $f(\alpha)$

6) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) (يعطى: $f(1{,}81) \approx 0$)

najah213.com • نجاح 213
نجاح 213

حل تمرين 01

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = -\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -3x^2 = -\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -3x^3 = +\infty$

حل تمرين 02

1) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ / $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

x		1	
$x-1$	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 1^{>}} f(x) = \lim_{x\to 1^{>}} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$$

($x+1 \to 2$, $x-1 \to 0^+$)

najah213.com · نجاح 213

$$\lim_{x\to 1^{<}} f(x) = \lim_{x\to 1^{<}} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$$

($x+1 \to 2$, $x-1 \to 0^-$)

2) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+2}$ / $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^{>}} f(x) = \lim_{x\to -2^{>}} \frac{x^2+2x+1}{x+2} = +\infty$$

($x^2+2x+1 \to 1$, $x+2 \to 0^+$)

$$\lim_{x\to -2^{<}} f(x) = \lim_{x\to -2^{<}} \frac{x^2+2x+1}{x+2} = -\infty$$

($x^2+2x+1 \to 1$, $x+2 \to 0^-$)

3) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ / $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

4) $f(x) = \sqrt{x^2+x}$ / $D_f =]-\infty;-1] \cup [0;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 + x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 + x = +\infty$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$$ اذن

5) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ / $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^2 + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

6) $f(x)=\frac{\sin(x+1)}{x^2+1}$ / $D_f=\mathbb{R}$

نعلم ان $-1<\sin(x)<1$

ومنه $\frac{-1}{x^2+1}<\frac{\sin(x)}{x^2+1}<\frac{1}{x^2+1}$

اذن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{-1}{x^2+1}<\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x^2+1}<\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}$ (الحدان الطرفيان: $\mathbf{0}$)

اذن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=0$

7) $f(x)=\frac{\cos(x+3)}{x^2+3}$ / $D_f=\mathbb{R}$

نعلم ان $-1<\cos(x)<1$

ومنه $\frac{-1}{x^2+1}<\frac{\sin(x)}{x^2+1}<\frac{1}{x^2+1}$

اذن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{-1}{x^2+1}<\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x^2+1}<\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}$ (الحدان الطرفيان: $\mathbf{0}$)

اذن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=0$

حل تمرين 03

1) $f(x)=x^2+3x+1$ / $D_f=\mathbb{R}$

النهايات:

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}x^2=+\infty$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}$

$f'(x)=2x+3$

ندرس إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	$\frac{-3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

التغيرات :

⌦ الدالة f متزايدة على المجال $]\frac{-3}{2}, +\infty[$.

⌦ الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty, \frac{-3}{2}[$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$\frac{-3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f\left(\frac{-3}{2}\right)$	$+\infty$

2) $f(x) = x^3 + 2x + 1$ / $D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 2$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	

التغيرات:

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;+\infty[$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	↗	

3) $f(x)=\frac{2x^2+5x+10}{2x+4}$ / $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

النهايات :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$2x+4$	$-$	0	$+$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{2x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-2\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-2\\ <}}\frac{2x^2+5x+10}{2x+4}=-\infty \quad (8 \to,\ 0^-)$$

$$\lim_{\substack{x\to-2\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-2\\ >}}\frac{2x^2+5x+10}{2x+4}=+\infty \quad (8 \to,\ 0^+)$$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;-2[$ والمجال $]-2;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{(4x+5)(2x+1)-(2)(2x^2+5x+10)}{(2x+4)^2}=\frac{4x(x+4)}{(2x+4)^2}$$

ندرس إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ | $-$	0	$+$

تغيرات:

الدالة f متزايدة على المجال $]-4,-\infty[$ والمجال $]0;+\infty[$

الدالة f متناقصة على المجال $]-4;-2[$ والمجال $]-2;0[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-4)$	↘	$+\infty$	↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

4) $f(x)=\frac{x^2+x}{x-2}$ / $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

النهايات :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ <}}\frac{x^2+x}{x-2}=-\infty \quad (6 \to,\ 0^- \searrow)$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ >}}\frac{x^2+x}{x-2}=+\infty \quad (6 \to,\ 0^- \searrow)$$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;2[$ والمجال $]2;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x)}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{6}$		2		$2+\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

تغيرات :

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;2-\sqrt{6}[$ والمجال $]2+\sqrt{6},+\infty[$

الدالة f متناقصة على المجال $]2;2+\sqrt{6}[$ والمجال $]2-\sqrt{6};2[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(2-\sqrt{6})$	↘	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	↘	$f(2+\sqrt{6})$ ↗ $+\infty$

5) $f(x)=\frac{x^2+3x+6}{x+2}$ / $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

النهايات:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-2\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-2\\ <}}\frac{2x^2+3x+6}{x+2}=-\infty \quad (4 \text{ en haut}, 0^- \text{ en bas})$$

$$\lim_{x\to -2^{>}} f(x) = \lim_{x\to -2^{>}} \frac{2x^2+3x+6}{x+2} = +\infty \quad (4 \text{ فوق } ،\ 0^+ \text{ تحت})$$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-2;+\infty[$ والمجال $]-\infty;-2[$

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x+2)-(x^2+3x+6)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$

ندرس إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$		

تغيرات :

- الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty,-4[$ والمجال $]0;+\infty[$
- الدالة f متناقصة على المجال $]-4;-2[$ والمجال $]-2;0]$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-4)$	↘	$+\infty$	↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

6) $f(x) = \frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}$ / $D_f = \mathbb{R} - \{-1,3\}$

النهايات :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ 0	$+$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} \frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} \frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to3 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-2 \\ >}} \frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to3 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-2 \\ <}} \frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3} = +\infty$$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;-1[$ والمجال $]-1;3[$ والمجال $]3;+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-2x-3)-(2x-2)(x^2-2x-15)}{(x^2-2x-3)^2} = \frac{24x-24}{(x^2-2x-3)^2}$$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$ 0	$+$	$+$	

تغيرات:

- الدالة f متزايدة على المجال $]1;3[$ والمجال $]3;+\infty[$
- الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;-1[$ والمجال $]-1;1[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$		$\|\|$	$+$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$\|\|$ $f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$	1
		$-\infty$							$-\infty$

7) $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$ / $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

النهايات :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$(x-1)^2$	$+$		0	$+$	

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=-\infty$$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ والمجال $]1;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{(3x^2-4x)(x-1)^2-2(x-1)(x^3-2x^2)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(3x^2-4x)(x-1)-2(x^3-2x^2)}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2+4x}{(x-1)^3}=\frac{x(x^2-3x+4)}{(x-1)^3}$$

ندرس إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x	$-$		0	$+$		$+$	
x^2-3x+4	$+$			$+$		$+$	
$(x-1)$	$-$			$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+$		0	$-$		$+$	

تغيرات:

- الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty, 0[$ والمجال $]1; +\infty[$
- الدالة f متناقصة على المجال $]0; 1[$

جدول التغيرات:

ندرس إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(0)$	↘	$-\infty$	↗	$+\infty$

8) $f(x)=\frac{x^2-8x+19}{x-3}$ / $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

النهايات:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$	$-$		0	$+$	

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{x^2-8x+19}{x-3} = +\infty \quad (4 \to 0^+)$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{x^2-8x+19}{x-3} = -\infty \quad (4 \to 0^-)$$

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;3[$ والمجال $]3;+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{(2x-8)(x-3)-(x^2-8x+19)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+3}{(x-3)^2}$$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\vert$	0	$-$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	

تغيرات:

- الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;1[$ والمجال $]5;+\infty[$
- الدالة f متناقصة على المجال $]1;3[$ والمجال $]3;5[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\vert$	0	$-$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(1)$	↘	$+\infty$	↘	$f(3)$	↗	$+\infty$

najah213.com · نجاح 213

9) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ / $D_f = \mathbb{R}$

النهايات:

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 + 1 = +\infty$$

$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$ اذن

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	ϕ	$+$	

تغيرات:

⌦ الدالة f متزايدة على المجال $]0;+\infty[$

⌦ الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;0[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	ϕ	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

10) $f(x) = \sqrt{x^2-2x}$ / $D_f =]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$

النهايات:

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$\lim_{|x|\to+\infty} x^2 - 2x = +\infty$ لأن

ELKALI MATH
الكالي للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الاشتقاق:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]2;+\infty[$ والمجال $]-\infty;0[$

$$f'(x)=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2+2x}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		0		-1		2	$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$		$-$	‖		‖			$+$

تغيرات:

- الدالة f متزايدة على المجال $]2;+\infty[$
- الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;0[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(0)$		$f(2)$	↗ $+\infty$

حل تمرين 04

1) $f(x)=\frac{3x^2+5x+6}{x^2}$ / $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

ELKALI MATH
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2+5x+6}{x^2} = +\infty$$ ($6 \to$ البسط، $0^+ \to$ المقام)

المستقيم ذو المعادلة $y = 3$ مقارب افقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

حل تمرين 05

1) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ / $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) - y = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

اذن المنحنى المقارب (C_f) يقارب (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ عند $+\infty$ و $-\infty$

الوضع النسبي لدينا

$$f(x) - y = \frac{1}{x-1}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	$\|$	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	$\|$	(C_f) فوق (Δ)

حل تمرين 06

$f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ / $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

1) تعين a و b

$$f(x) = a + \frac{b}{x-2} = \frac{ax-2a+b}{x-2}$$

بالمطابقة نجد

$$\begin{cases} a = 3 \\ -2a + b = 1 \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} a = 3 \\ -2(3) + b = 1 \end{cases}$$ ومنه $$\begin{cases} a = 3 \\ b = 7 \end{cases}$$

najah213.com · نجاح 213

اذن $f(x) = 3 + \frac{7}{x-2}$

2) حساب النهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{\substack{x\to 2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ >}} \frac{3x+1}{x-2} = +\infty \quad (7 \to 0^+)$$

$$\lim_{\substack{x\to 2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ <}} \frac{3x+1}{x-2} = -\infty \quad (7 \to 0^-)$$

المستقيم ذو المعادلة $y = 3$ مقارب افقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

حل تمرين 07

1) تعين a ، b و c

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

$x^2 + 3x + 2$	$x - 1$
$-x^2 + x$	$x + 4$
$4x + 2$	
$-4x + 4$	
6	

ومنه $f(x) = \frac{(x-1)(x+4)+6}{x-1} = x + 4 + \frac{6}{x-1}$

اذن $f(x) = x + 4 + \frac{6}{x-1}$

أي $a = 1$ $b = 4$ $c = 6$

طريقة 02

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2-ax+bx-b+c}{x-1}$$

ELKALI MATH
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$= \frac{ax^2-ax+bx-b+c}{x-1}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a-1=0 \\ b-a=3 \\ -b+c=2 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} a=1 \\ b-1=3 \\ -b+c=2 \end{cases} \quad \text{وعليه} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ -4+c=2 \end{cases}$$

اذن

$$\begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ -4+c=2 \end{cases}$$

ومنه $f(x)=x+4+\frac{6}{x-1}$

2) حساب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x+2}{x+2} = +\infty \quad (7 \to 0^+)$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x+2}{x+2} = -\infty \quad (7 \to 0^-)$$

3) تبيان ان (Δ) ذو المعادلة $y=x+4$ مقارب ل (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-y = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{x-1} = 0$$

اذن (Δ) ذو المعادلة $y=x+4$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

najah213.com · نجاح 213

4) دراسة الوضعية :

لدينا $f(x) - 6 = \frac{6}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$		$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

حل تمرين 08

1) تعين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = +\infty$

2) تحديد المستقيمات المقاربة ل (C_f) من الدالة f

- المستقيم ذو المعادلة $x = e$ مقارب عمودي ل (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.
- المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي ل (C_f) عند $+\infty$.
- المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب افقي ل (C_f) عند $+\infty$
- المستقيم ذو المعادلة $y = -3$ مقارب افقي ل (C_f) عند $-\infty$

حل تمرين 09

1) مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R} - \{1\}$
2) تعين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ELKALI MATH
الكالي للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$

3) تعين معادلات المستقيمات المقاربة ل المنحنى (C_f)
- المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي ل (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.
- المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل ل (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$..

4) الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

حل تمرين 10

1) مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R} - \{-1,2\}$
2) تعين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = -\infty$

3) تحديد المستقيمات المقاربة ل (C_f) من الدالة f
- المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي ل (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.
- المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ مقارب عمودي ل (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$..
- المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب افقي ل (C_f) عند $-\infty$
- المستقيم ذو المعادلة $y = -1$ مقارب افقي ل (C_f) عند $+\infty$

ELKALI MATH
الكالي للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

حل المسألة 01

1)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضعية	(C_f) فوق (D)		(C_f) يقطع (D) في النقطة $A(-1;-1)$		(C_f) تحت (D)

ب – إشارة $g(x)$

$$g(x) = x^3 + 3x + 4 = x^3 - (-3x - 4)$$

ومنه

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II)

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$$

1)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

2) أ- تبيان من أجل $x \in \mathbb{R}$ يكون: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3-2)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^3+3x^2+4x}{(x^2+1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$$

وهو المطلوب.

ب- تغيرات:

ندرس إشارة $f'(x)$

ELKALI MATH
الكالي للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g(x)$	$-$	$\|$	0	$+$		$+$	
x	$-$			$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+$	0		$-$	0	$+$	

⌫ الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;-1[$ والمجال $]0;+\infty[$

⌫ الدالة f متناقصة على المجال $]-1;0[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-1)$	↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

3) أ- تبيان ان (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-y=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^3-2}{x^2+1}-x=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^3-2-x(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2-x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$$

وهو المطلوب.

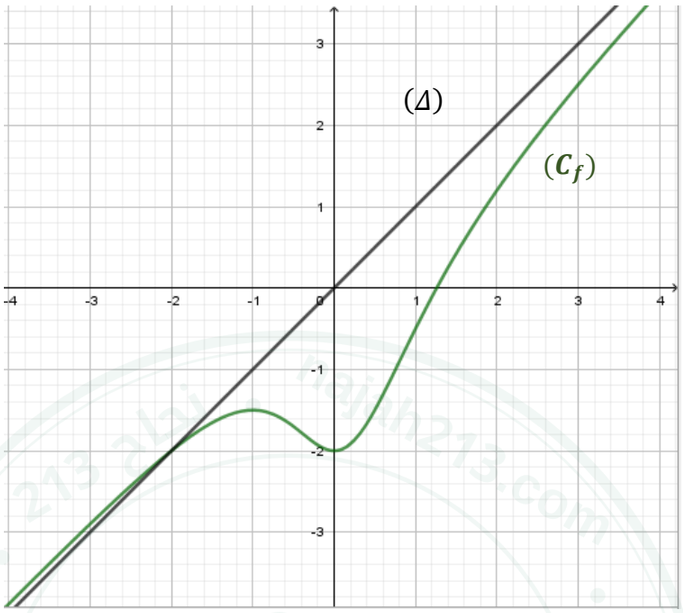
ب- الوضع النسبي :

لدينا $f(x)-y=\frac{-2-x}{x^2+1}$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	$\|$	0	$-$	
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $B(-2;-2)$		(C_f) تحت (Δ)

najah213.com · نجاح 213

4) الرسم البياني:



5) المناقشة البيانية
لدينا $f(x) = m$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات التي معادلاتها من الشكل $y = m$

$m \in]-\infty; -2[$ للمعادلة حل واحد سالب تماما.

$m = -2$ للمعادلة حل معدوم واخر سالب تماما.

$m \in]-2; \frac{-3}{2}[$ للمعادلة حل موجب تماما وحلان سالبان تماما.

$m = \frac{-3}{2}$ حل سالب تماما وآخر موجب تماما.

$m \in]\frac{-3}{2}; +\infty[$ للمعادلة حل واحد موجب تماما.

حل مسألة 02

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$$

1) حساب النهايات للدالة f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

ELKALI MATH
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\ >}} \frac{x^2+2x-1}{x-1} = +\infty \quad (2 \to, \ x-1 \to 0^+)$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\ <}} \frac{x^2+2x-1}{x-1} = -\infty \quad (7 \to, \ x-1 \to 0^-)$$

2) تعين a ، b و c

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x-1 & x-1 \\ \hline -x^2+x & x+3 \\ \hline 3x-1 & \\ -3x+3 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

اذن $f(x) = \frac{(x-1)(x+3)+2}{x-1} = x+3+\frac{2}{x-1}$

ومنه $f(x) = x+3+\frac{2}{x-1}$

أي $a=1$ ، $b=3$ ، $c=2$

3) استنتاج ان (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{2}{x-1} = 0$$

اذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x+3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

الوضع النسبي:

لدينا $f(x) = \frac{3}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$\|$	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	$\|$	(C_f) فوق (Δ)

ELKALI MATH
الكالي للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

4) الاشتقاق:
الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ والمجال $]1;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x-1)-(x^2+2x-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x^2-2x+2x-2-x^2-2x+1}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$		

تغيرات:

⌫ الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty,1-\sqrt{2}[$ والمجال $]1+\sqrt{2},+\infty[$
⌫ الدالة f متناقصة على المجال $]1-\sqrt{2},1[$ والمجال $]1,1+\sqrt{2}[$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(1-\sqrt{2})$	↘	$+\infty$	↘	$f(1+\sqrt{2})$	↗	$+\infty$

5) تبيان أن $\Omega(1,4)$ مركز تناظر
أي تبيان من أجل $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases}2(1)-x\in\mathbb{R}-\{1\}\\ f(2(1)-x)+f(x)=2(4)\end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases}2-x\in\mathbb{R}-\{1\}\\ f(2-x)+f(x)=8\end{cases}$$

أولا:

$x \in \mathbb{R} - \{1\}$ يكافئ $x \neq 1$

يكافئ $-x \neq -1$

يكافئ $2 - x \neq 1$

يكافئ $2 - x \in \mathbb{R} - \{1\}$

ثانيا:

$$f(2-x) + f(x) = (2-x) + 3 + \frac{2}{2-x-1} + x + 3 + \frac{2}{x-1}$$

$$= 2 - x + 3 + \frac{2}{1-x} + x + 3 + \frac{2}{x-1}$$

$$= 8 + \frac{2}{-(x-1)} + \frac{2}{x-1}$$

$$= 8$$

وهو المطلوب.

6) تقاطع (C_f) مع (yy')

$$f(0) = \frac{0^2+2(0)-1}{0-1} = 1$$

اذن (C_f) يقطع (yy') في النقطة $A(0,1)$

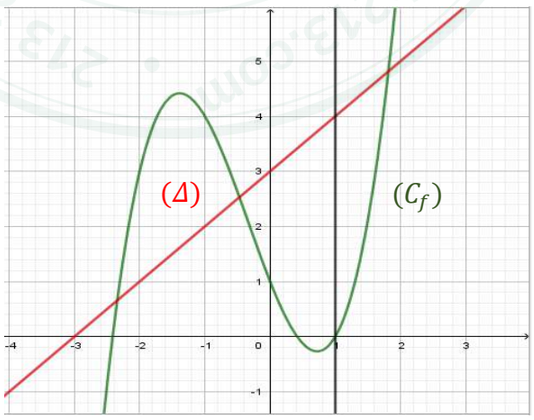
تقاطع (C_f) مع (xx')

$f(x) = 0$ يكافئ $x^2 + 2x - 1 = 0$

يكافئ $x = -1 + \sqrt{2}$ او $x = -1 - \sqrt{2}$

اذن (C_f) يقطع (xx) في النقطة $A(-1+\sqrt{2}, 0)$ والنقطة $C(-1-\sqrt{2}, 0)$

7) الرسم



najah213.com · نجاح 213

8) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m.

لدينا $m^2 + 2x - 1 - mx + m = 0$

$$m^2 + 2x - 1 = mx - m$$

$$m^2 + 2x - 1 = m(x - 1)$$

$$\frac{x^2+2x-1}{x-1} = m$$

$$f(x) = m$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات التي معادلتها من الشكل $y = m$.

إذا كان:

$m \in]-\infty; 1[$ يوجد حل سالب تماما واخر موجب تماما.

$m = 1$ يوجد حل معدوم وأخر سالب تماما

$m \in]1; f(1-\sqrt{2})[$ يوجد حلان سالبان تماما.

$m = f(1-\sqrt{2})$ يوجد حل سالب تماما.

$m \in]f(1-\sqrt{2}); f(1+\sqrt{2})[$ لا يوجد حل.

$m = f(1+\sqrt{2})$ يوجد حل موجب تماما.

$m \in]f(1+\sqrt{2}); +\infty[$ يوجد حلان موجبان تماما.

II) $g(x) = |f(x)|$ / $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

أ) كتابة $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	ϕ	$-$	ϕ	$-$	$\|$	$+$		

$$\begin{cases} f(x) & ; \quad x \in [-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}\,] \cup]1; +\infty[\\ -f(x) & ; \quad x \in [-\infty; -1-\sqrt{2}\,[\cup]-1+\sqrt{2}; 1[\end{cases}$$

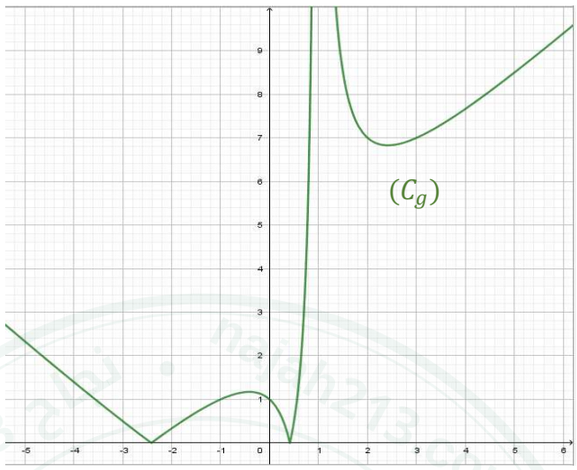
ب) تفسير:

المنحنى (C_g) ينطبق على (C_f) إذا كان $x \in [-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}\,] \cup]1; +\infty[$

المنحنى (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل إذا كان $x \in]-\infty; -1-\sqrt{2}\,[\cup]-1+\sqrt{2}; 1[$

ELKALI MATH
الكالي للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

الرسم البياني:



$$h(x) = f(|x|) \ / \ \ D_h = \mathbb{R} - \{-1,1\}$$

أ- كتابة $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; \ x \in [0;1\,[\cup]1;+\infty[\\ f(-x) & ; \ x \in [-\infty;-1\,[\cup]-1;0[\end{cases}$$

ب- أولا تبيان ان h زوجية.

$x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$ يكافئ $x \neq 1$ $x \neq -1$

يكافئ $-x \neq -1$ وَ $-x \neq 1$

يكافئ $-x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$

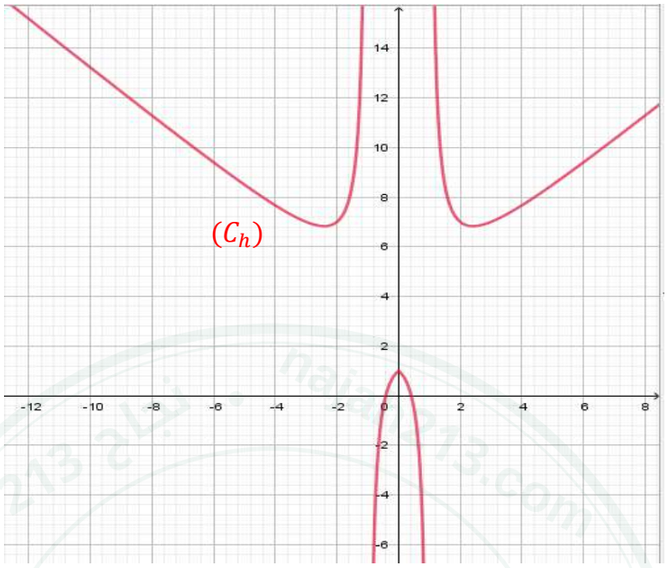
$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

اذن h زوجية.

تفسير:

المنحنى (C_h) ينطبق على (C_f) إذا كان $x \in [0;1\,[\cup]1;+\infty[$

ولرسم بقية المنحنى نعتمد على الخواص الهندسية للدالة الزوجية أي منحنى الدالة h متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب.



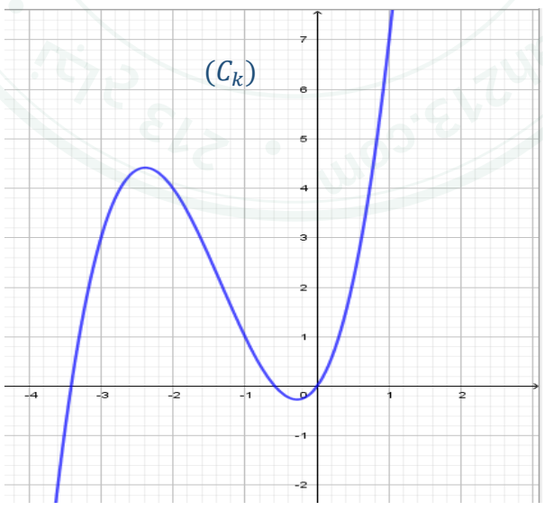
(III $k(x) = \frac{x^2+4x+2}{x}$ / $D_k = \mathbb{R}^*$

أ) تبيان ان من أجل $x \neq 0$ $k(x) = f(x+1)$

$$f(x+1) = \frac{(x+1)^2+2(x+1)-1}{(x+1)-1} = \frac{x^2+2x+1+2x+2-1}{x} = \frac{x^2+4x+2}{x}$$

اذن $f(x+1) = k(x)$

وهو المطلوب.



حل المسألة 03

I)

1) الوضع النسبي:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
الوضعية	(δ) تحت (D)	(δ) يقطع (D) في النقطة $A(\alpha;\alpha-11)$	(δ) فوق (D)

2) أ- تبيان من أجل $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = h(x) - y$

$$h(x) - y = x^3 + x + 1 - (-5x - 11)$$
$$= x^3 + x + 1 + 5x + 11$$
$$= x^3 + 6 + 12$$
$$= g(x)$$

وهو المطلوب.

ب) استنتاج إشارة $g(\alpha)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

ج) تحقق من أن $-1{,}48 < \alpha < -1{,}47$

$$g(-1{,}48) \approx -0{,}12$$
$$g(-1{,}47) \approx 0{,}003$$
$$g(-1{,}48) \times g(-1{,}47) < 0$$

اذن $-1{,}48 < \alpha < -1{,}47$

3) تعين a ، b ، c و d

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6 & x^2 + 2 \\ \hline -x^3 + 2x & x \\ \hline -2x - 6 & \end{array}$$

اذن $f(x)=\frac{x(x^2+2)-2x-6}{x^2+2}=x+\frac{-2x-6}{x^2+2}$

ومنه $f(x)=x+\frac{-2x-6}{x^2+2}$

أي $a=1\ ،\ b=0\ ،\ c=-2\ ،\ d=-6$

4) حساب النهايات للدالة f عند أطراف حدود مجموعة تعريفها.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

5) أ- تبيان من اجل $x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+2)-2x(x^3-6)}{(x^2+2)^2}=\frac{x^4+6x^2+12x}{(x^2+2)}=\frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

ب) تغيرات وجدول تغيرات:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$	$-$		$-$	0	$+$		
x	$-$	0	$+$		$+$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		

تغيرات:

- الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty,0[$ والمجال $]\alpha,+\infty[$
- الدالة f متناقصة على المجال $]0,\alpha[$

5) أ) تبيان ان (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-y=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{-2x-6}{x^2+1}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{-2}{x}=0$$

وهو المطلوب.

ب) دراسة الوضع النسبي :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(-3;-3)$	(C_f) تحت (Δ)

6) تبيان ان $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$ أي تبيان ان $f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=0$

$$f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha=\frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}-\frac{3}{2}\alpha=\frac{2(\alpha^3-6)-3\alpha(\alpha^2+2)}{\alpha^2+2}$$

$$\frac{\alpha^3-6\alpha-12}{\alpha^2+2}=\frac{-g(\alpha)}{\alpha^2+2}=0$$

اذن $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$

حصر $f(\alpha)$

لدينا

$$-1{,}48<\alpha<-1{,}47$$

$$-\frac{48}{25}<f(\alpha)<-\frac{441}{200}$$

وهو المطلوب.

7) رسم المنحنى

