najah213.com · نجاح 213

ثانوية سعدي الصديق تبسة — الأستاذ: قرايدية سمير

تقويم تشخيصي
للسنوات النهائية "الشعب العلمية"

التمرين

نعتبر نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{-x^2+x-1}{x-1}$، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدّالة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3) أ) اثبت أنّ المستقيم $(\Delta): y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب) ادرس الوضع النّسبي للمنحنى (C_f) بالنّسبة للمستقيم (Δ).

4) ارسم المنحنى (C_f).

5) نـاقش بيانيّـا، حسـب قـيم الوسـيط الحقيقـي m، عـدد وإشـارة حلـول المعادلـة ذات المجهـول الحقيقـي x الآتيـة: $x^2+(m-1)x-m+1=0$.

6) اسـتنتج حلـول المعادلـة ذات المجهـول الحقيقـي θ الآتيـة $\sin^2\theta+(m-1)\sin\theta-m+1=0$ حيـث $\theta\in\left]-\pi,\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$.

7) لتكن g دالة معرّفة على $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ بـ $g(x)=\dfrac{-\sin^2 x+\sin x-1}{-1+\sin x}$.

اثبت أنّ الدّالة g متزايدة تماما على $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

حل التمرين

1) لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$.

نستنتج أنّ المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

2) الدّالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ ودالتها المشتقة هي $f'(x)=\dfrac{2x-x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x(2-x)}{(x-1)^2}$.

بما أنّ $(x-1)^2>0$ من أجل كل عدد حقيقي $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ فإنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $2x-x^2$، وهي موضّحة في الجدول الآتي:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

ومنه الدّالة f متزايدة من أجل $x\in\left]0,1\right[\cup\left]1,2\right]$، ومتناقصة من أجل $x\in\left]-\infty,0\right]\cup\left[2,+\infty\right[$، وجدول تغيّراتها هو:

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$

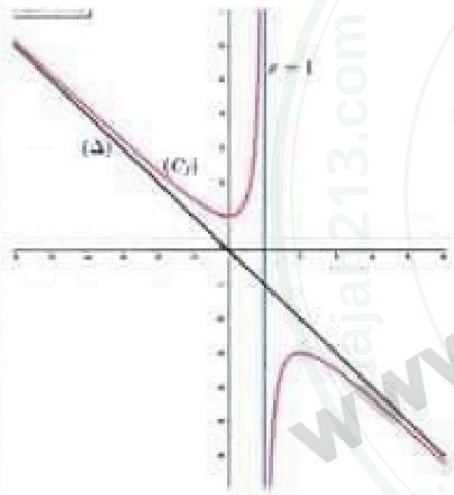
3) لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x+1}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x+1}=0$، وعليه المستقيم $(\Delta): y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب) لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)، ندرس إشارة $f(x)+x=\dfrac{-1}{x+1}$، وهي موضحة في الجدول:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\frac{-1}{x-1}$		$+$	$\|$	$-$	

إذن: (C_f) فوق المستقيم (Δ) من أجل $x<1$، و (C_f) تحت المستقيم (Δ) من أجل $x>1$.

4) التمثيل البياني للدالة f موضح في الرسم



5) لدينا $x^2+(m-1)x-m+1=0$ تكافئ $-x^2+x-1=(x-1)m$

ومنه، من أجل $x\neq 1$، نجد أن $f(x)=m$، وعليه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y=m$، أي:

- إذا كان $m\in\left]-\infty,-3\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين موجبين.
- إذا كان $m=-3$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا.
- إذا كان $m\in\left]-3,1\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.
- إذا كان $m=1$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا معدوما.
- إذا كان $m\in\left]1,+\infty\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين سالبين.

6) بوضع $x=\sin\theta$، نحصل على (من الجواب السابق):

- إذا كان $m\in\left]-\infty,-3\right[$ فإن $x>1$، وعليه المعادلة لا تقبل حلول.

إذا كان $m\in\left]-3,1\right[$ فإن x غير موجود، وعليه المعادلة لا تقبل حلول.

- إذا كان $m\in\left]1,\dfrac{3}{2}\right[$ فإنه يوجد عددان حقيقيان $0<x_1<1$ و $-1<x_2<0$، وعليه المعادلة تقبل أربع حلول θ_1، θ_2، θ_3 و θ_4 حيث $\sin\theta_1=\sin\theta_2=x_1$ و $\sin\theta_3=\sin\theta_4=x_2$.
- إذا كان $m>\dfrac{3}{2}$ فإنه يوجد عدد حقيقي $x_3<1$، وعليه المعادلة تقبل حلين θ_5 و θ_6 حيث $\sin\theta_5=\sin\theta_6=x_3$.

7) بما أن الدالة $x\mapsto\sin x$ متزايدة تماما على $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ والدالة f متزايدة على صورة المجال $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ أي متزايدة تماما على المجال $\left]0,1\right[$ فإن الدالة g (تركيب الدالة $\sin$ متبوعة بالدالة f) متزايدة تماما على $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com