najah213.com · نجاح 213

الرياضيات في الثانوية

تمارين نماذج فروض و إختبارات
في محور الدوال المرجعية (الجزء 1)

21 تمرين مرفق بحل مفصل

للسنة أولى ثانوي

كتابة و إعداد :

الأستاذ حنـــاش نبيـــل

ثانوية : زيناي الحاج بلقاسم - عين البيضاء -

Avril 2021

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

الدالة التآلفية :

التمرين رقم 01 :

عين عبارة الدالة التآلفية في كل حالة مما يلي :

1) $f(0)=2$ و $f(3)=-1$

2) $f(-1)=-2$ و $f(2)=1$

3) $f(2)=\sqrt{2}$ و $f(3)=\sqrt{3}$

حل التمرين رقم 01 :

1) نعلم أن دستور دالة تآلفية هو من الشكل :

$f(x)=ax+b$ حيث a و b عددان حقيقيان .

حيث a يحسب بالعلاقة : من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين x_1 و x_2 فإن : $a=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

إذن بصفة خاصة من أجل $x_1=0$ و $x_2=3$ نجد :

$a=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}$ أي $a=\dfrac{-1-2}{3-0}$ و منه

$a=-1$ و بالتالي تصبح عبارة الدالة f من الشكل

$f(x)=-x+b$ بحيث نعلم أن $f(0)=2$ و

منه $2=-0+b$ أي $b=2$.

نتيجة : $f(x)=-x+2$

2) بنفس الطريقة نحسب a :

$a=\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}$ أي $a=\dfrac{1+2}{3}$ أي

$a=1$ و بالتالي تصبح عبارة الدالة f من الشكل

$f(x)=x+b$ بحيث نعلم أن $f(2)=1$ و منه

$1=2+b$ أي $b=-1$.

نتيجة : $f(x)=x-1$

3) بنفس الطريقة نحسب a :

$a=\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}$ أي $a=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}$ أي

$a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ و بالتالي تصبح عبارة الدالة f من الشكل $f(x)=(\sqrt{3}-\sqrt{2})x+b$ بحيث نعلم أن

$f(2)=\sqrt{2}$ و منه $\sqrt{2}=2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+b$

أي $b=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$.

نتيجة :

$f(x)=(\sqrt{3}-\sqrt{2})x+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

التمرين رقم 02 :

g دالة تآلفية معرفة بـ : $g(x)=\alpha x+\beta$ حيث α و β عددان حقيقيان ؛ (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين العددين α و β حتى يشمل المنحنى (C_g) النقطتين $A(2;1)$ و $B(5;2)$.

2) إستنتج إتجاه تغير الدالة g ثم أنشئ (C_g) .

حل التمرين رقم 02 :

1) تعيين العددين α و β حتى يشمل المنحنى (C_g)

النقطتين $A(2;1)$ و $B(5;2)$:

المنحنى (C_g) يشمل النقطتين $A(2;1)$ و

$B(5;2)$ معناه : $g(2)=1$ و $g(5)=2$

بنفس طريقة التمرين السابق نجد :

$\alpha=\dfrac{g(5)-g(2)}{5-2}$ أي $\alpha=\dfrac{2-1}{5-2}$ أي

$\alpha=\frac{1}{3}$ ؛ فينتج إذن : $g(x)=\frac{1}{3}x+\beta$

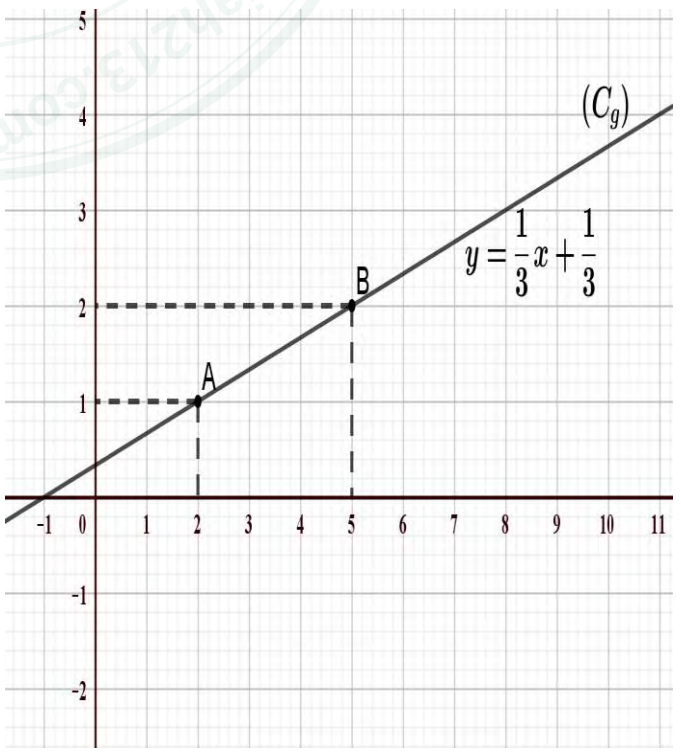
بما أن $g(2)=1$ فإن :

$g(2)=\frac{1}{3}\times 2+\beta=1$ و منه $\beta=\frac{1}{3}$

نتيجة : $g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

2) إستنتاج إتجاه تغير الدالة g ثم إنشاء (C_g) :

بما أن $\alpha=\frac{1}{3}>0$ فإن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.



(C_g) هو المستقيم (AB) الذي يشمل النقطتين

$A(2;1)$ و $B(5;2)$:

التمرين رقم 03 :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x)=x^2-(x+1)^2$.

1) بين أن الدالة f تآلفية .

2) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أنشئ (C_f) .

حل التمرين رقم 03 :

1) نبين أن الدالة f تآلفية :

ننشر المقدار $(x+1)^2$ و هو متطابقة شهيرة فنجد

أي $f(x)=x^2-(x^2+2x+1)$

و منه $f(x)=x^2-x^2-2x-1$

إذن $f(x)=-2x-1$ ؛ f تآلفية .

2) إستنتاج إتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها :

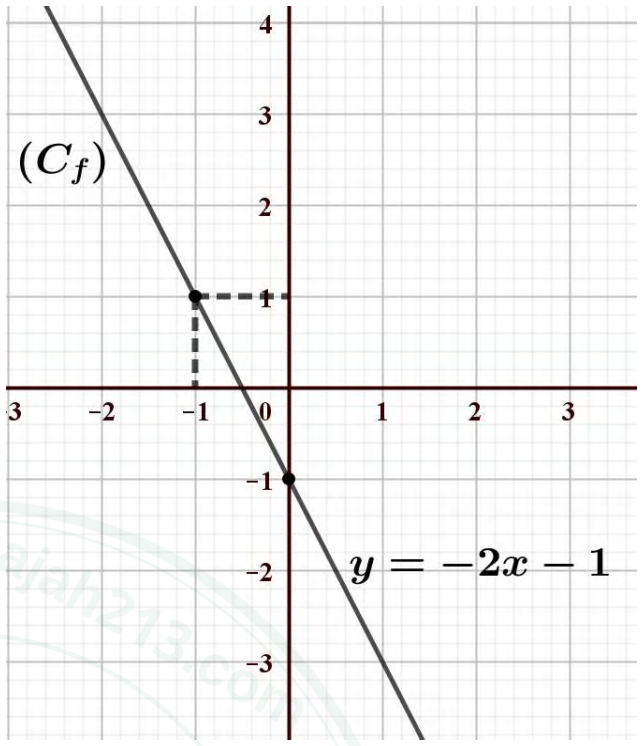
بما أن $a=-2<0$ فإن f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

3) إنشاء (C_f) :

نستعين بجدول مساعد :

x	-1	0
$f(x)$	1	-1

الإنشاء :



التمرين رقم 04 :

لتكن f و g الدالتان التآلفيتان المعرفتان بتمثيليهما البيانيين (C_f) و (C_g) كما في الشكل المقابل :

1) أوجد عبارة كلا من الدالتين f و g .

2) حل المعادلة $f(x)-g(x)=0$ ثم تحقق من النتيجة بيانيا .

نلاحظ مثلا أن (C_f) يشمل النقطتين $(0;1)$ و $(-1;-1)$ ؛ إذن بفرض أن $f(x)=ax+b$ نجد

$a=\dfrac{-1-1}{-1-0}$ أي $a=2$ و بالتالي تكون :

$f(x)=2x+b$ بحيث :

$f(0)=2\times 0+b=1$ و منه نجد $b=1$

نتيجة : $f(x)=2x+1$

نلاحظ مثلا أن (C_g) يشمل النقطتين $(0;4)$ و $(3;1)$ ؛ إذن بفرض أن $g(x)=\alpha x+\beta$ نجد

$\alpha=\dfrac{1-4}{3-0}$ أي $\alpha=-1$ و بالتالي تكون :

$g(x)=-x+\beta$ بحيث :

$g(0)=-0+\beta=4$ و منه نجد $\beta=4$

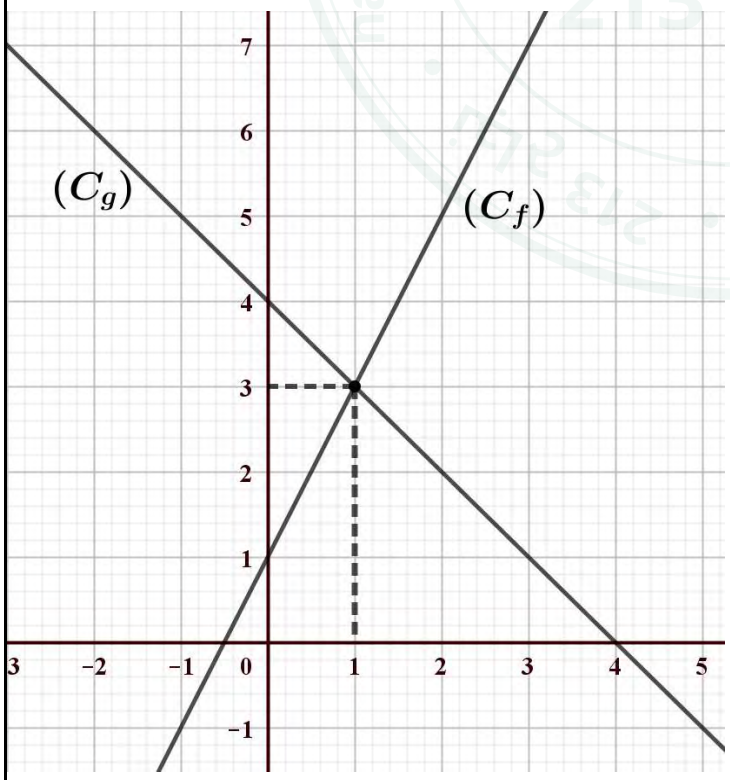
نتيجة : $g(x)=-x+4$

2) حل المعادلة $f(x)-g(x)=0$ ثم التحقق من النتيجة بيانيا :

$f(x)-g(x)=0$ تكافئ :

$(2x+1)-(-x+4)=0$ أي $3x-3=0$ أي

$3x=3$ و منه $x=1$ ؛ إذن : $S=\{1\}$



$f(x)-g(x)=0$ تكافئ $f(x)=g(x)$ و

منه حلول هذه المعادلة بيانيا يمثل فواصل تقاطع

(C_f) مع (C_g) فنجد من الشكل : $S=\{1\}$

دراسة الدوال من الشكل : $x\mapsto(x+a)^2+b$

حيث a و b عددان معلومان .

التمرين رقم 05 :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x)=(x-2)^2-1$ و ليكن (C_f) تمثيلها

البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x)-f(2)\geq 0$ ؛ ماذا تستنتج ؟

3) إشرح كيف يمكن إنشاء (C_f) منحنى الدالة f

إعتمادا على (P) منحنى الدالة " مربع " ثم أنشئ

المنحنى (C_f) .

حل التمرين رقم 05 :

1) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

القيمة 2 التي تعدم المقدار $x-2$ هي التي تقسم

مجموعة التعريف $\mathbb{R}$ إلى المجالين المعتمدين في

الدراسة :

- على المجال $]-\infty,2]$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $x_1<x_2\leq 2$

بإضافة العدد -2 نتحصل على :

$x_1-2<x_2-2\leq 0$

و بما أن الدالة " مربع " متناقصة تماما على $]-\infty,0]$ فإنه ينتج : $(x_1-2)^2>(x_2-2)^2$

إضافة نفس العدد -1 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

أي $(x_1-2)^2-1>(x_2-2)^2-1$

و بالتالي الدالة f متناقصة تماما $f(x_1)>f(x_2)$

على المجال $]-\infty,2]$.

- على المجال $[2,+\infty[$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $2\leq x_1<x_2$

بإضافة العدد -2 نتحصل على :

$0\leq x_1-2<x_2-2$

و بما أن الدالة " مربع " متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

فإنه ينتج : $(x_1-2)^2<(x_2-2)^2$

إضافة نفس العدد -1 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

أي $(x_1-2)^2-1<(x_2-2)^2-1$

و بالتالي الدالة f متزايدة تماما $f(x_1)<f(x_2)$

على المجال $[2,+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-1	↗

2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$f(x)-f(2)\geq 0$:

لدينا : $f(x)=(x-2)^2-1$ و $f(2)=-1$

إذن بالفرق :

$f(x)-f(2)=(x-2)^2-1-(-1)$ أي

$f(x)-f(2)=(x-2)^2\geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x .

بما أن $f(x)-f(2)\geq 0$ فإن $f(x)\geq f(2)$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ؛ إذن نستنتج أن $f(2)=-1$ هي قيمة حدية صغرى للدالة f .

3) شرح كيفية إنشاء (C_f) منحنى الدالة f إعتمادا على (P) منحنى الدالة " مربع " ثم إنشاء المنحنى (C_f) :

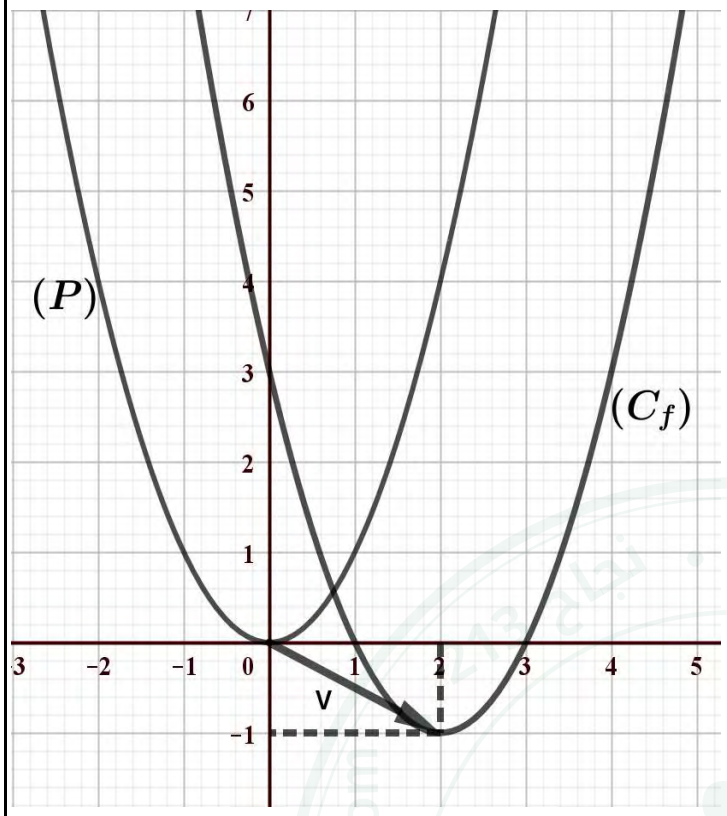
لدينا : $f(x)=(x-2)^2-1$ أي $y=(x-2)^2-1$ و منه نجد :

$y+1=(x-2)^2$ ؛ و بوضع $\begin{cases}x-2=X\\y+1=Y\end{cases}$

نتحصل على $Y=X^2$ ؛ إذن النقطة $M(x-2;y+1)$ تنتمي إلى منحنى الدالة " مربع " و نكتب : $\begin{cases}x=X+2\\y=Y-1\end{cases}$

و بالتالي نمر من المنحنى (P) إلى (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

الإنشاء :



التمرين رقم 06 :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x+3)^2-2$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)\geq f(-3)$ ؛ ماذا تستنتج ؟

3) إشرح كيف يمكن إنشاء (C_f) منحنى الدالة f إعتمادا على (P) منحنى الدالة " مربع " ثم أنشئ المنحنى (C_f) .

حل التمرين رقم 06 :

1) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

القيمة -3 التي تعدم المقدار $x+3$ هي التي تقسم مجموعة التعريف $\mathbb{R}$ إلى المجالين المعتمدين في الدراسة :

- على المجال $]-\infty,-3]$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $x_1 < x_2 \leq -3$

بإضافة العدد 3 نتحصل على :

$x_1 + 3 < x_2 + 3 \leq 0$

و بما أن الدالة " مربع " متناقصة تماما على $]-\infty,0]$

فإنه ينتج : $(x_1+3)^2 > (x_2+3)^2$

إضافة نفس العدد -2 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

$(x_1+3)^2 - 2 > (x_2+3)^2 - 2$ أي

$f(x_1) > f(x_2)$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,-3]$.

- على المجال $[-3,+\infty[$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $-3 \leq x_1 < x_2$

بإضافة العدد 3 نتحصل على :

$0 \leq x_1 + 3 < x_2 + 3$

و بما أن الدالة " مربع " متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

فإنه ينتج : $(x_1+3)^2 < (x_2+3)^2$

إضافة نفس العدد -2 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

$(x_1+3)^2 - 2 < (x_2+3)^2 - 2$ أي

$f(x_1) < f(x_2)$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-3,+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ ‌ -3 ‌ $+\infty$
$f(x)$	↘ -2 ↗

2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x) \geq f(-3)$:

لنحسب الفرق $f(x) - f(-3)$:

$f(x) = (x+3)^2 - 2$ و $f(-3) = -2$ إذن

$f(x) - f(-3) = (x+3)^2 - 2 - (-2)$ أي

$f(x) - f(-3) = (x+3)^2 \geq 0$ و منه

$f(x) \geq f(-3)$ من أجل كل عدد حقيقي x .

بما أن $f(x) \geq f(-3)$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ؛

إذن نستنتج أن $f(-3) = -2$ هي قيمة حدية صغرى للدالة f .

3) شرح كيفية إنشاء (C_f) منحنى الدالة f إعتمادا على (P) منحنى الدالة " مربع " ثم إنشاء المنحنى (C_f) :

لدينا : $f(x) = (x+3)^2 - 2$ أي

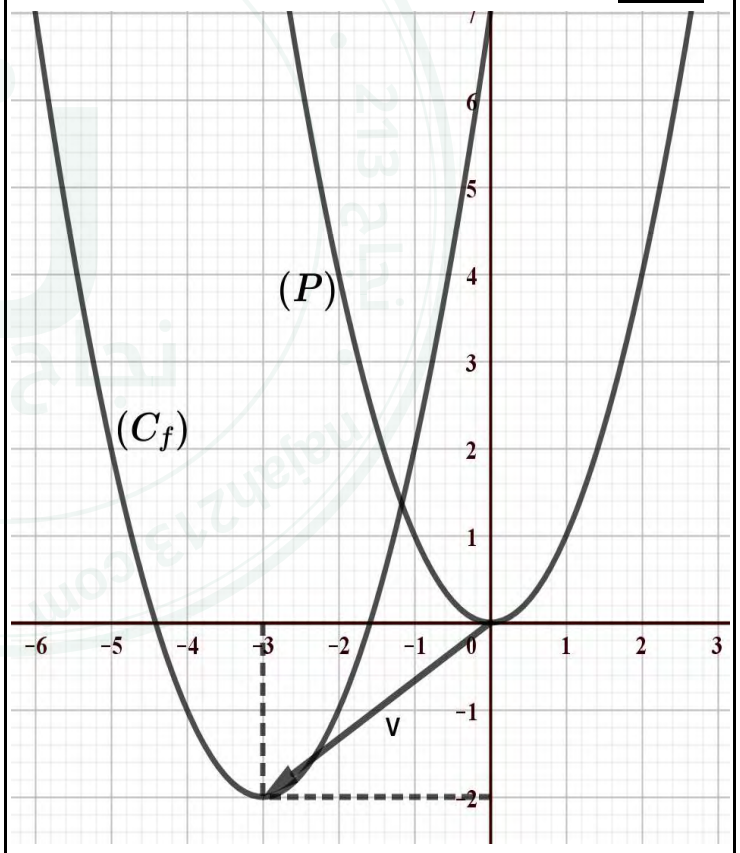
$y = (x+3)^2 - 2$ و منه نجد :

$y+2=(x+3)^2$ ؛ و بوضع $\begin{cases} x+3=X \\ y+2=Y \end{cases}$

نتحصل على $Y=X^2$ ؛ إذن النقطة $M(x+3;y+2)$ تنتمي إلى منحنى الدالة " مربع " و نكتب : $\begin{cases} x=X-3 \\ y=Y-2 \end{cases}$

و بالتالي نمر من المنحنى (P) إلى (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

الإنشاء :



التمرين رقم 07 :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x)=x^2-4x+3$ ؛ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المستوي المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$f(x)=(x+\alpha)^2+\beta$ حيث α و β عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) بين أن (C_f) منحنى الدالة f هو صورة (P) منحنى الدالة " مربع " بإنسحاب يطلب تعيين شعاعه ثم أنشئ المنحنى (C_f) بعناية .

حل التمرين رقم 07 :

1) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$f(x)=(x+\alpha)^2+\beta$ حيث α و β عددان حقيقيان يطلب تعيينهما :

طريقة 1 : ننشر العبارة $(x+\alpha)^2+\beta$ فنجد :

$f(x)=x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta$ ؛ إذن بالمطابقة (حسب الدرجة) مع العبارة $f(x)=x^2-4x+3$

نتحصل على : $\begin{cases} 2\alpha=-4 \\ \alpha^2+\beta=3 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} \alpha=-2 \\ \alpha^2+\beta=3 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} \alpha=-2 \\ 4+\beta=3 \end{cases}$ أي $\begin{cases} \alpha=-2 \\ \beta=-1 \end{cases}$ ؛ إذن من أجل كل عدد حقيقي x نتحصل على : $f(x)=(x-2)^2+3$

طريقة 2 : لدينا $f(x)=x^2-4x+3$ و منه

$f(x)=x^2-2\times 2\times x+4-4+3$ أي

$f(x)=x^2-2\times 2\times x+2^2$ و منه

$f(x)=(x-2)^2-4+3$ أي

$f(x)=(x-2)^2-1$ ؛ إذن : $\begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=-1\end{cases}$

2) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

دائما من أجل دراسة إتجاه التغير نستعمل الشكل

$x\mapsto (x+a)^2+b$:

لاحظ أن القيمة 2 التي تعدم المقدار $x-2$ هي التي تقسم مجموعة التعريف $\mathbb{R}$ إلى المجالين المعتمدين في الدراسة .

- على المجال $]-\infty,2]$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $x_1<x_2\leq 2$

بإضافة العدد -2 نتحصل على :

$x_1-2<x_2-2\leq 0$

و بما أن الدالة " مربع " متناقصة تماما على $]-\infty,0]$

فإنه ينتج : $(x_1-2)^2>(x_2-2)^2$

إضافة نفس العدد -1 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

$(x_1-2)^2-1>(x_2-2)^2-1$ أي

$f(x_1)>f(x_2)$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,2]$.

- على المجال $[2,+\infty[$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $2\leq x_1<x_2$

بإضافة العدد -2 نتحصل على :

$0\leq x_1-2<x_2-2$

و بما أن الدالة " مربع " متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

فإنه ينتج : $(x_1-2)^2<(x_2-2)^2$

إضافة نفس العدد -1 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

$(x_1-2)^2-1<(x_2-2)^2-1$ أي

$f(x_1)<f(x_2)$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[2,+\infty[$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-1	↗

3) نبين أن (C_f) منحنى الدالة f هو صورة (P) منحنى الدالة " مربع " بإنسحاب يطلب تعيين شعاعه ثم إنشاء المنحنى (C_f) بعناية :

لدينا : $f(x)=(x-2)^2-1$ أي

$y=(x-2)^2-1$ و منه نجد :

$y+1=(x-2)^2$ ؛ و بوضع $\begin{cases}x-2=X\\ y+1=Y\end{cases}$

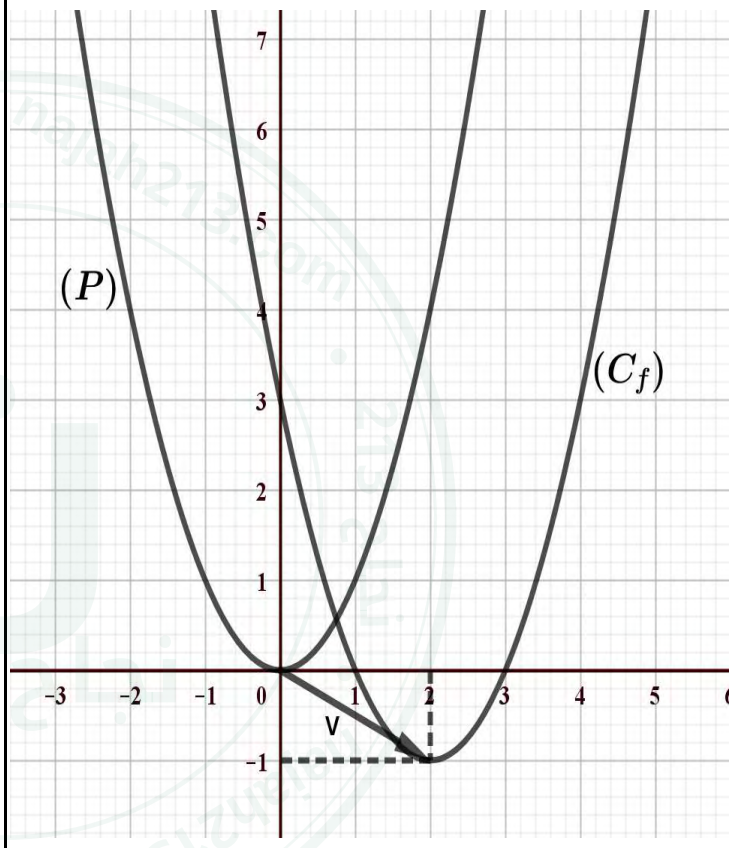
نتحصل على $Y=X^2$ ؛ إذن النقطة

$M(x-2;y+1)$ تنتمي إلى منحنى الدالة " مربع

" و نكتب : $\begin{cases} x = X+2 \\ y = Y-1 \end{cases}$

و بالتالي نمر من المنحنى (P) إلى (C_f) بالإنسحاب

الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.



التمرين رقم 08 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x) = x^2 - ax - b$ حيث a و b عددان

حقيقيان .

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم

المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين العددين a و b إذا علمت أن :

$f(0) = -3$ و $f(-1) = 0$.

2) نضع فيما يلي : $a = 2$ و $b = 3$

أ- أحسب $f(2)$ و $f(-2)$.

ب- ما قولك حول شفعية الدالة f ؟ علل .

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x) = (x-1)^2 - 4$.

4) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

5) (P) التمثيل البياني للدالة مربع في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ- عين مركبتا شعاع الإنسحاب $\vec{u}$ الذي يسمح بإنشاء

المنحنى (C_f) إنطلاقا من (P) .

ب- أنشئ (P) ثم (C_f) .

حل التمرين رقم 08 :

1) تعيين العددين a و b علما أن : $f(0) = -3$

و $f(-1) = 0$.

معناه $\begin{cases} f(0) = -3 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 0^2 - a \times 0 - b = -3 \\ (-1)^2 - a \times (-1) - b = 0 \end{cases}$

و بتعويض الأولى في الثانية نجد $\begin{cases} b = 3 \\ 1 + a - b = 0 \end{cases}$

$a=2$ ؛ إذن ينتج : $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$

نتيجة : $f(x)=x^2-2x-3$

2) أ- حساب $f(2)$ و $f(-2)$:

$f(2)=2^2-2\times 2-3=-3$ و كذلك نجد

$f(-2)=(-2)^2-2\times(-2)-3=5$

ب- شفعية الدالة f :

بما أن $f(-2)\neq f(2)$ فإن f ليست زوجية .

و كذلك : $-f(2)=3$ و منه

$f(-2)\neq -f(2)$ إذن f ليست فردية .

نتيجة : f ليست زوجية و ليست فردية .

3) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x)=(x-1)^2-4$.

طريقة 1 : بالنشر و التبسيط نجد :

$f(x)=(x-1)^2-4=x^2-2x+1-4$ أي

$f(x)=x^2-2x-3$.

طريقة 2 : نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$f(x)=x^2-2x-3$ أي

$f(x)=x^2-2\times 1\times x+1-1-3$ معناه

$f(x)=(x-1)^2-1-3$ و منه نجد :

$f(x)=(x-1)^2-4$ و هو المطلوب .

4) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

لاحظ أن القيمة 1 التي تعدم المقدار $x-1$ هي التي تقسم مجموعة التعريف $\mathbb{R}$ إلى المجالين المعتمدين في الدراسة .

- على المجال $]-\infty,1]$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $x_1<x_2\leq 1$

بإضافة العدد -1 نتحصل على :

$x_1-1<x_2-1\leq 0$

و بما أن الدالة " مربع " متناقصة تماما على $]-\infty,0]$

فإنه ينتج : $(x_1-1)^2>(x_2-1)^2$

إضافة نفس العدد -4 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

أي $(x_1-1)^2-4>(x_2-1)^2-4$

و بالتالي الدالة f متناقصة $f(x_1)>f(x_2)$

تماما على المجال $]-\infty,1]$.

- على المجال $[1,+\infty[$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $1\leq x_1<x_2$

بإضافة العدد -1 نتحصل على :

$0\leq x_1-1<x_2-1$

و بما أن الدالة " مربع " متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

فإنه ينتج : $(x_1-1)^2<(x_2-1)^2$

إضافة نفس العدد -4 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

$4-(x_2-1)^2<4-(x_1-1)^2$ أي

$f(x_2)<f(x_1)$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما

على المجال $[1,+\infty[$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	-4	↗

5) (P) التمثيل البياني للدالة مربع في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ- تعيين مركبتا شعاع الإنسحاب $\vec{u}$ الذي يسمح بإنشاء

المنحنى (C_f) إنطلاقا من (P) :

لدينا : $f(x)=(x-1)^2-4$ أي

$y=(x-1)^2-4$ و منه نجد :

$\begin{cases} x-1=X \\ y+4=Y \end{cases}$ ؛ و بوضع $y+4=(x-1)^2$

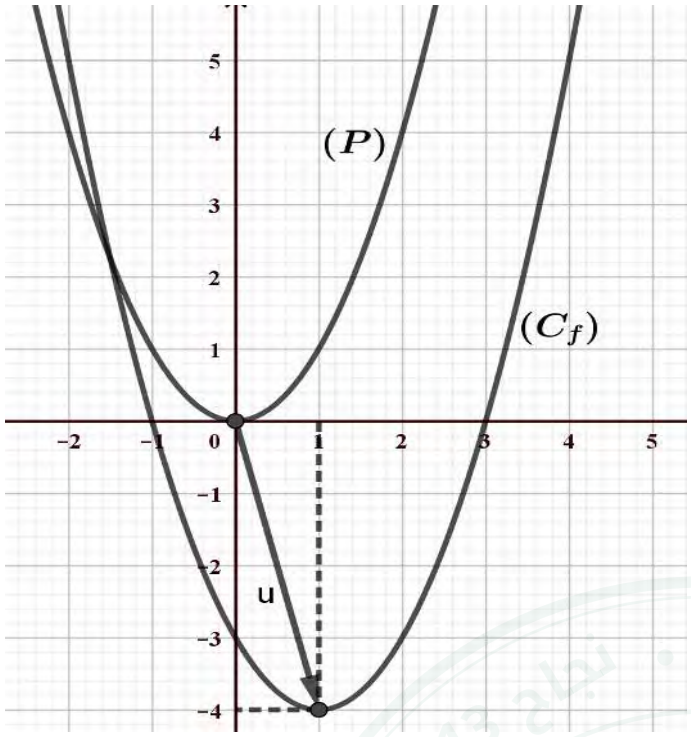
نتحصل على $Y=X^2$ ؛ إذن النقطة

$M(x-1;y+4)$ تنتمي إلى منحنى الدالة " مربع

" و نكتب : $\begin{cases} x=X+1 \\ y=Y-4 \end{cases}$

بالتالي نمر من المنحنى (P) إلى (C_f) بالإنسحاب

الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$.



التمرين رقم 09 :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$g(x)=x^2-2x$.

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم

المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

و (P) التمثيل البياني للدالة : $x\mapsto x^2$

1) أدرس شفعية الدالة g .

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$g(x)=(x+\alpha)^2+\beta$ حيث α و β عددان

حقيقيان يطلب تعيينهما .

3) أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

4) أوجد فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_g) مع حامل

محور الفواصل .

5) أنشئ (P) ، إشرح كيف يمكن إنشاء (C_g) إنطلاقا من (P) ثم أنشئه .

6) (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y=-x+2$

- أرسم المستقيم (Δ) .
- بالإعتماد على الرسم ؛ عين نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم (Δ) .

حل التمرين رقم 09 :

1) دراسة شفعية الدالة g :

$D_g=\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0 لأنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن معاكسه $-x\in\mathbb{R}$.

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا :

$g(-x)=(-x)^2-2(-x)$ أي :

$g(-x)=x^2+2x$ ؛ نأخذ مثال مضاد :

$g(1)=1^2-2\times1=-1$ و كذلك :

$g(-1)=(-1)^2-2(-1)=3$

إذن : $g(-1)\neq g(1)$ و منه g ليست زوجية .

و كذلك : $g(-1)\neq -g(1)=1$ و منه

و منه g ليست فردية .

نتيجة : الدالة g ليست زوجية و ليست فردية .

2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$g(x)=(x+\alpha)^2+\beta$ حيث α و β عددان حقيقيان يطلب تعيينهما :

طريقة 1 : بالنشر و التبسيط نجد :

$g(x)=x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta$ ؛ إذن بالمطابقة :

$\begin{cases}2\alpha=-2\\ \alpha^2+\beta=0\end{cases}$ و منه $\begin{cases}\alpha=-1\\ \alpha^2+\beta=0\end{cases}$ و بتعويض

الأولى في الثانية نجد $1+\beta=0$ و منه $\beta=-1$

إذن : $g(x)=(x-1)^2-1$.

طريقة 2 : لدينا $g(x)=x^2-2x$ و منه

$g(x)=x^2-2\times1\times x+1^2-1^2$ معناه

أي $g(x)=(x-1)^2-1^2$

$\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=-1\end{cases}$: $g(x)=(x-1)^2-1$ ؛ إذن :

3) دراسة إتجاه تغير الدالة g :

لاحظ أن القيمة 1 التي تعدم المقدار $x-1$ هي التي تقسم مجموعة التعريف $\mathbb{R}$ إلى المجالين المعتمدين في الدراسة .

- على المجال $]-\infty,1]$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $x_1<x_2\leq1$

بإضافة العدد -1 نتحصل على :

$x_1-1<x_2-1\leq0$

و بما أن الدالة " مربع " متناقصة تماما على $]-\infty,0]$

فإنه ينتج : $(x_1-1)^2>(x_2-1)^2$

إضافة نفس العدد -1 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

$1-(x_2-1)^2<1-(x_1-1)^2$ أي

$g(x_2)<g(x_1)$ و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty,1]$.

- على المجال $[1,+\infty[$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $1\leq x_1<x_2$

بإضافة العدد -1 نتحصل على :

$0\leq x_1-1<x_2-1$

و بما أن الدالة " مربع " متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

فإنه ينتج : $(x_1-1)^2<(x_2-1)^2$

إضافة نفس العدد -1 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

$1-(x_2-1)^2<1-(x_1-1)^2$ أي

$g(x_1)<g(x_2)$ و بالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1,+\infty[$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

4) إيجاد فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_g) مع حامل محور الفواصل :

يكفي حل المعادلة $g(x)=0$:

$g(x)=0$ تكافئ $x^2-2x=0$ تكافئ

$x(x-2)=0$ تكافئ : $x=0$ أو $x-2=0$

تكافئ $x=0$ أو $x=2$ ؛ إذن نجد $S=\{0,2\}$

إذن المنحنى (C_g) يتقاطع مع حامل محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة $x=0$ و عند النقطة ذات الفاصلة $x=2$.

5) إنشاء (P) ، و شرح كيف يمكن إنشاء (C_g) إنطلاقا من (P) ثم أنشاؤه :

لدينا : $g(x)=(x-1)^2-1$ أي

$y=(x-1)^2-1$ و منه نجد :

$y+1=(x-1)^2$ ؛ و بوضع :

$\begin{cases}x-1=X\\y+1=Y\end{cases}$ نتحصل على $Y=X^2$ ؛ إذن النقطة

$M(x-1;y+1)$ تنتمي إلى منحنى الدالة " مربع "

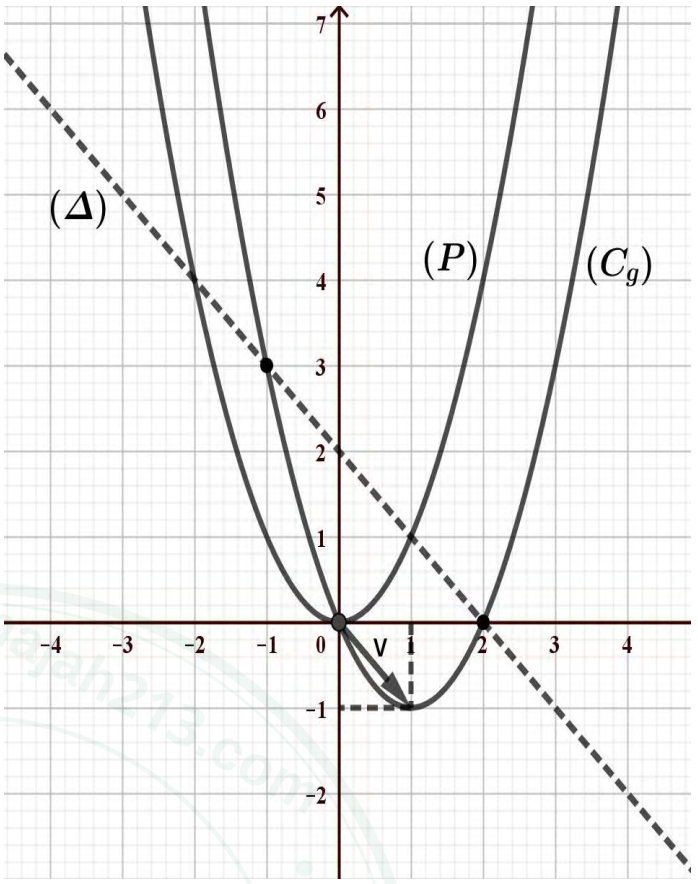
و نكتب : $\begin{cases}x=X+1\\y=Y-1\end{cases}$

و بالتالي نمر من المنحنى (P) إلى (C_g) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

لرسم المستقيم (Δ) نستعين بجدول مساعد :

x	0	1
y	2	1

بالإعتماد على الرسم ؛ تعيين نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم (Δ) :



من ملاحظة الشكل نستنتج أن المنحنى (C_g) يتقاطع مع المستقيم (Δ) في نقطتين إحداثياهما $(2;0)$ و $(-1;3)$.

التمرين رقم 10 :

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2$.

(C_g) المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

(C_g) صورة (C_f) بإنسحاب شعاعه : $\vec{v}=-2\vec{i}-2\vec{j}$.

1) أكتب عبارة $g(x)$ بدلالة x .

2) أنشئ (C_f) و (C_g) .

3) حل جبريا المعادلة $g(x)=0$.

4) أ- حل جبريا المعادلة $g(x)=f(x)$.

ب- فسر النتائج بيانيا .

5) حل بيانيا المتراجحة $g(x)<f(x)$.

5) أ- أرسم المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=-x-2$ ؛ ثم عين من البيان إحداثيي نقط تقاطع (Δ) مع المنحنى (C_g) .

حل التمرين رقم 10 :

1) كتابة عبارة $g(x)$ بدلالة x :

(C_g) صورة (C_f) بإنسحاب شعاعه :

$\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ أي $\vec{v}=-2\vec{i}-2\vec{j}$ بحيث نعلم أن

الدوال من الشكل : $x\mapsto(x+a)^2+b$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس هو صورة (C_f) التمثيل البياني للدالة مربع بإنسحاب شعاعه $\vec{v}=-a\vec{i}+b\vec{j}$ أي $\vec{v}\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$.

إذن من أجل $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ و بالمطابقة نتحصل على :

$\begin{cases}-a=-2\\b=-2\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=2\\b=-2\end{cases}$ و بالتالي عبارة الدالة

g هي : $g(x)=(x+2)^2-2$.

2) إنشاء (C_f) و (C_g) :

3) أ- حل جبريا المعادلة $g(x)=0$:

$g(x)=0$ تكافئ $(x+2)^2-2=0$ تكافئ

$(x+2)^2=2$ تكافئ $|x+2|=\sqrt{2}$ و منه نجد

$x+2=\sqrt{2}$ أو $x+2=-\sqrt{2}$ أي :

$x=-2+\sqrt{2}$ أو $x=-2-\sqrt{2}$

إذن حلول المعادلة $g(x)=0$ هي :

$$S=\left\{-2-\sqrt{2}\,,-2+\sqrt{2}\right\}$$

4) أ- حل جبريا المعادلة $g(x)=f(x)$:

$g(x)=f(x)$ تكافئ $(x+2)^2-2=x^2$

تكافئ $x^2+4x+4-2=x^2$ أي $4x+2=0$

تكافئ $4x=-2$ تكافئ $x=-\frac{1}{2}$

إذن حلول المعادلة $g(x)=f(x)$ هي :

$S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

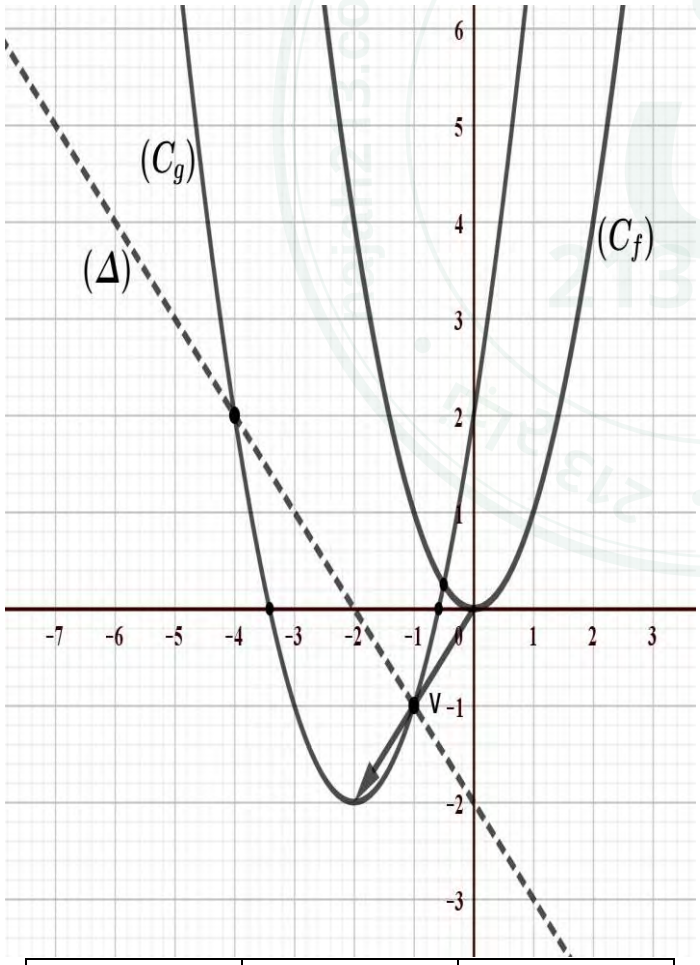
ب- تفسير النتائج بيانيا : حلول المعادلة $g(x)=f(x)$ بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المنحنى (C_g) ؛ و من الرسم أدناه فإن المنحنيين (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها $x=-\frac{1}{2}$.

5) حل بيانيا المتراجحة $g(x)<f(x)$:

حلول المتراجحة $g(x)<f(x)$ بيانيا تمثل فواصل نقط المنحنى (C_g) الواقعة تحت المنحنى (C_f) و من البيان نجد : $S=\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$

5) أ- رسم المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=-x-2$ ؛ ثم تعيين من البيان إحداثيي نقط تقاطع (Δ) مع المنحنى (C_g) :

لرسم المستقيم (Δ) نستعين بجدول مساعد :



x	0	-1
y	-2	-1

من البيان المنحنى (C_g) يتقاطع مع المستقيم (Δ) في نقطتين إحداثياهما $(-4;2)$ و $(-1;-1)$.

التمرين رقم 11 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x)=x^2+2x-1$ ، و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$f(x)=(x+a)^2+b$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty,-1]$ و $[-1,+\infty[$.

3) شكل جدول تغيرات الدالة f ثم إستنتج وجود قيمة حدية للدالة و من أجل أي قيمة للمتغير x تبلغها الدالة .

4) إشرح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_f) بالإعتماد على (P) التمثيل البياني للدالة مربع ثم أنشئه .

5) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$h(x)=|f(x)|$ ، و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ- أكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

ب- إشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) إنطلاقا من (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم السابق .

6) لتكن g الدالة التآلفية حيث : $g(-2)=-1$ و $g(1)=2$.

أ- عين عبارة (دستور) الدالة g .

ب- أرسم المستقيم (D) الممثل للدالة التآلفية g .

جـ- حل بيانيا في $\mathbb{R}$ ما يلي :

$f(x)=g(x)$ ، $f(x)\geq g(x)$

حل التمرين رقم 11 :

1) كتابة $f(x)$ على الشكل :

$f(x)=(x+a)^2+b$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما :

طريقة 1 : بالنشر و التبسيط نجد :

$f(x)=x^2+2ax+a^2+b$ ؛ إذن بالمطابقة :

$\begin{cases}2a=2\\a^2+b=-1\end{cases}$ و منه $\begin{cases}a=1\\a^2+b=-1\end{cases}$ و

بتعويض الأولى في الثانية نجد $1+b=-1$ و منه $b=-2$ ؛ إذن : $f(x)=(x+1)^2-2$.

طريقة 2 : لدينا $f(x)=x^2+2x-1$ و منه

$f(x)=x^2+2\times1\times x+1^2-1^2-1$ معناه

$f(x)=(x+1)^2-1^2-1$ و منه

$\begin{cases}a=2\\b=-2\end{cases}$ أي $f(x)=(x+1)^2-2$

2) دراسة إتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty,-1]$ و $[-1,+\infty[$:

- على المجال $]-\infty,-1]$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $x_1 < x_2 \leq -1$

بإضافة العدد 1 نتحصل على :

$x_1+1 < x_2+1 \leq 0$ ؛ و بما أن الدالة " مربع " متناقصة تماما على $]-\infty,0]$ فإنه ينتج :

$(x_1+1)^2 > (x_2+1)^2$

إضافة نفس العدد -2 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

$(x_1+1)^2-2 > (x_2+1)^2-2$ أي

$f(x_1) > f(x_2)$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,-1]$.

- على المجال $[-1,+\infty[$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $-1 \leq x_1 < x_2$

بإضافة العدد 1 نتحصل على :

$0 \leq x_1+1 < x_2+1$ ؛ و بما أن الدالة " مربع " متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ فإنه ينتج :

$(x_1+1)^2 < (x_2+1)^2$

إضافة نفس العدد -2 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

$(x_1+1)^2-2 < (x_2+1)^2-2$ أي

$f(x_1) < f(x_2)$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-1,+\infty[$.

3) تشكيل جدول تغيرات الدالة f ثم إستنتاج وجود قيمة حدية للدالة و من أجل أي قيمة للمتغير x تبلغها الدالة :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↘	-2	↗

من الجدول -2 قيمة حدية صغرى للدالة f تبلغها من أجل $x=-1$.

4) شرح كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_f) بالإعتماد على (P) التمثيل البياني للدالة مربع ثم إنشاؤه :

لدينا : $f(x)=(x+1)^2-2$ أي $y=(x+1)^2-2$ و منه نجد :

$y+2=(x+1)^2$ ؛ و بوضع :

$\begin{cases} x+1=X \\ y+2=Y \end{cases}$ نتحصل على $Y=X^2$ ؛ إذن النقطة $M(x+1;y+2)$ تنتمي إلى منحنى الدالة " مربع " و نكتب :

$\begin{cases} x=X-1 \\ y=Y-2 \end{cases}$

و بالتالي نمر من المنحنى (P) إلى (C_g) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

5) أ- كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

- إذا كان $f(x) \geq 0$ فإن $|f(x)| = f(x)$ و

بالتالي نجد : $h(x)=f(x)$

- إذا كان $f(x)\leq 0$ فإن $|f(x)|=-f(x)$ و

بالتالي نجد : $h(x)=-f(x)$

ب- شرح كيف يمكن إنشاء (C_h) إنطلاقا من (C_f)

ثم إنشاؤه في نفس المعلم السابق :

- إذا كان $f(x)\geq 0$ فإن (C_f) يقع فوق محور الفواصل و في هذه الحالة وجدنا أن $h(x)=f(x)$ و بالتالي (C_h) ينطبق على (C_f) .

- إذا كان $f(x)\leq 0$ فإن (C_f) يقع تحت محور الفواصل و في هذه الحالة وجدنا أن :

$h(x)=-f(x)$ و بالتالي (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل .

6) لتكن g الدالة التآلفية حيث : $g(-2)=-1$ و $g(1)=2$.

أ- تعيين عبارة الدالة g :

بفرض أن : $g(x)=\alpha x+\beta$ نجد :

$$\alpha=\frac{g(1)-g(-2)}{1-(-2)}$$ أي $$\alpha=\frac{2+1}{1+2}$$ و منه

$\alpha=1$ ؛ إذن ينتج $g(x)=x+\beta$ ؛ و بما أن $g(1)=2$ فإن : $1+\beta=2$ أي $\beta=1$.

نتيجة : $g(x)=x+1$

ب- رسم المستقيم (D) الممثل للدالة التآلفية g :

لرسم المستقيم (D) نستعين بجدول مساعد :

x	0	1
y	1	2

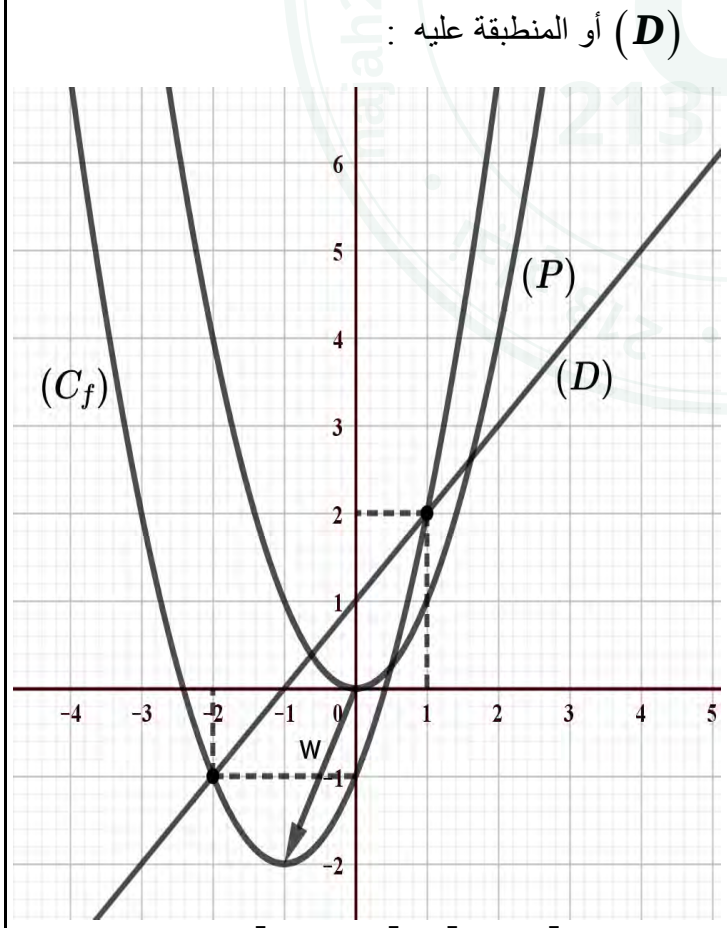
جـ- حل بيانيا في $\mathbb{R}$ ما يلي :

$f(x)=g(x)$ ، $f(x)\geq g(x)$

➢ حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) و (D) :

$$S=\{-2\ ,1\}$$

➢ حلول المتراجحة $f(x)\geq g(x)$ بيانيا تمثل فواصل نقط المنحنى (C_f) الواقعة فوق المستقيم (D) أو المنطبقة عليه :



$$S=]-\infty,-2]\cup[1,+\infty[$$

دراسة الدوال من الشكل :

$x \mapsto m(x+a)^2+b$ حيث a ، b و m

أعداد حقيقية معلومة .

التمرين رقم 12 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x)=-2(x-3)^2+1$ ، و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2) عين إحداثيي نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات .

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$f(x)-f(3)\leq 0$ ؛ ماذا تستنتج ؟

4) بين أن (C_f) صورة منحنى دالة بإنسحاب يطلب تعيين شعاعه $\vec{v}$.

5) حل جبريا المعادلة : $f(x)=1$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

6) حل بيانيا المتراجحة : $f(x)<1$

حل التمرين رقم 12 :

1) دراسة تغيرات الدالة f :

لاحظ أن القيمة 3 التي تعدم المقدار $x-3$ هي التي تقسم $\mathbb{R}$ إلى المجالين المعتمدين في الدراسة .

- على المجال $]-\infty,3]$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $x_1<x_2\leq 3$

بإضافة العدد -3 نتحصل على :

$x_1-3<x_2-3\leq 0$

و بما أن الدالة " مربع " متناقصة تماما على $]-\infty,0]$

فإنه ينتج : $(x_1-3)^2>(x_2-3)^2$ و بضرب طرفي المتباينة في العدد السالب تماما -2 ينتج :

$-2(x_1-3)^2<-2(x_2-3)^2$

إضافة نفس العدد 1 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

$-2(x_1-3)^2+1<-2(x_2-3)^2+1$ أي

$f(x_1)<f(x_2)$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty,3]$.

- على المجال $[3,+\infty[$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $3\leq x_1<x_2$

بإضافة العدد -3 نتحصل على :

$0\leq x_1-3<x_2-3$

و بما أن الدالة " مربع " متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

فإنه ينتج : $(x_1-3)^2<(x_2-3)^2$ و بضرب طرفي المتباينة في العدد السالب تماما -2 ينتج :

$-2(x_1-3)^2>-2(x_2-3)^2$

إضافة نفس العدد 1 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

$-2(x_1-3)^2+1>-2(x_2-3)^2+1$ أي

$f(x_1) > f(x_2)$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]3,+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$		1	

2) تعيين إحداثيي نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات :

- مع حامل محور الفواصل (xx') :

نحل المعادلة $f(x)=0$:

معناه $-2(x-3)^2+1=0$ يكافئ

$-2(x-3)^2=-1$ يكافئ $(x-3)^2=\frac{1}{2}$

يكافئ $|x-3|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و منه $x-3=\frac{\sqrt{2}}{2}$

أو $x-3=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ و منه نجد $x=3+\frac{\sqrt{2}}{2}$

أو $x=3-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ؛ إذن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين إحداثياهما

$\left(3+\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$ و $\left(3-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$.

- مع حامل محور التراتيب (yy') :

نضع $x=0$ و نحسب $f(0)$:

$f(0)=-2(0-3)^2+1$ أي $f(0)=-17$

إذن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور التراتيب في النقطة التي إحداثياها $(0;-17)$.

3) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$f(x)-f(3)\le 0$:

لدينا $f(x)=-2(x-3)^2+1$ و $f(3)=1$ ؛

إذن : $f(x)-f(3)=-2(x-3)^2+1-1$

أي $f(x)-f(3)=-2(x-3)^2\le 0$ لأن

$-2<0$ و $(x-3)^2\ge 0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

الإستنتاج : بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x)-f(3)\le 0$ فإن $f(x)\le f(3)$

إذن القيمة $f(3)=1$ هي قيمة حدية عظمى للدالة f و تبلغها الدالة f من أجل $x=3$.

4) نبين أن (C_f) صورة منحنى دالة بإنسحاب يطلب تعيين شعاعه $\vec{v}$:

لدينا : $f(x)=-2(x-3)^2+1$ أي

$y=-2(x-3)^2+1$ و منه نجد :

$y-1=-2(x-3)^2$ ؛ و بوضع :

$\begin{cases}x-3=X\\y-1=Y\end{cases}$ نتحصل على $Y=-2X^2$ ؛ إذن

النقطة $M(x-3;y-1)$ تنتمي إلى منحنى الدالة :

$\begin{cases} x = X + 3 \\ y = Y + 1 \end{cases}$ ؛ و نكتب : $k : x \mapsto -2x^2$

و بالتالي نمر من المنحنى (C_k) إلى (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5) حل جبريا المعادلة : $f(x) = 1$

$f(x) = 1$ تكافئ $-2(x-3)^2 + 1 = 1$ تكافئ

$-2(x-3)^2 = 0$ تكافئ $(x-3)^2 = 0$ تكافئ

$x - 3 = 0$ تكافئ $x = 3$.

التفسير البياني : المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ (أفقي) في النقطة التي فاصلتها 3 .

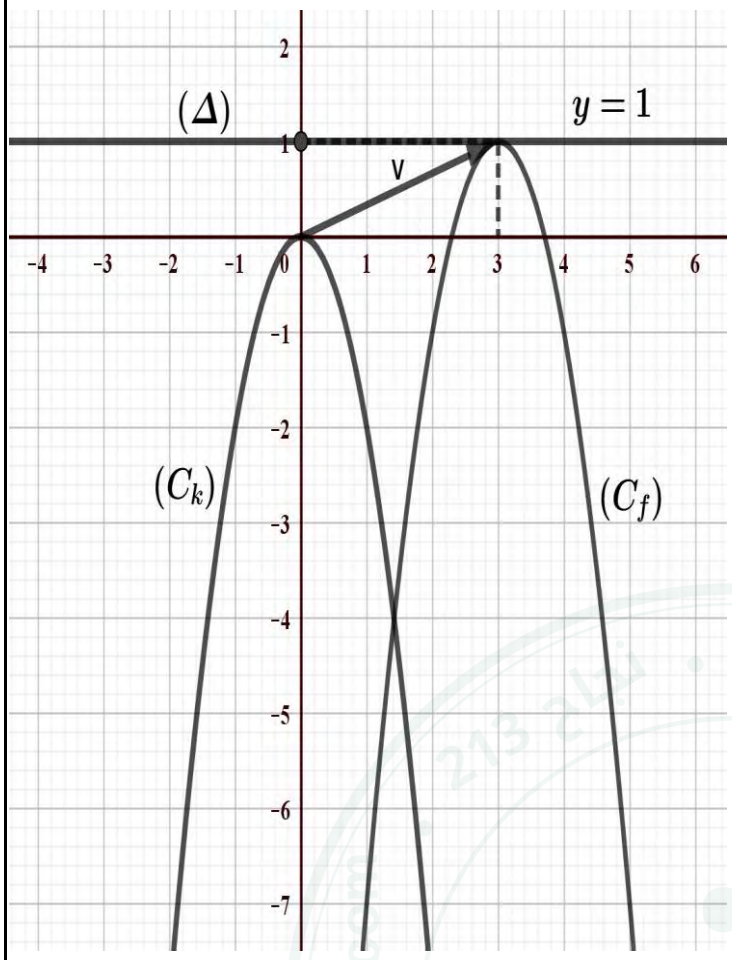
6) حلول المتراجحة $f(x) < 1$ بيانيا تمثل فواصل نقط المنحني (C_f) الواقعة فوق المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 1$ ؛ و بما أن 1 قيمة حدية عظمى للدالة f تبلغها فقط من أجل القيمة 3 للمتغير x ؛ إذن :

$S = \mathbb{R} - \{3\}$ أي $S =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$.

الإنشاء :

ملاحظة : لإنشاء المنحنى (C_k) يمكن الإستعانة بجدول قيم كما يلي :

x	-2	-1	0	1	2
$k(x)$	-8	-2	0	-2	-8



مسألة إدماجية :

I- (P) هو التمثيل البياني للدالة " مربع " و (C_f) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$ و $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$ ثم شكل جدول تغيراتها .

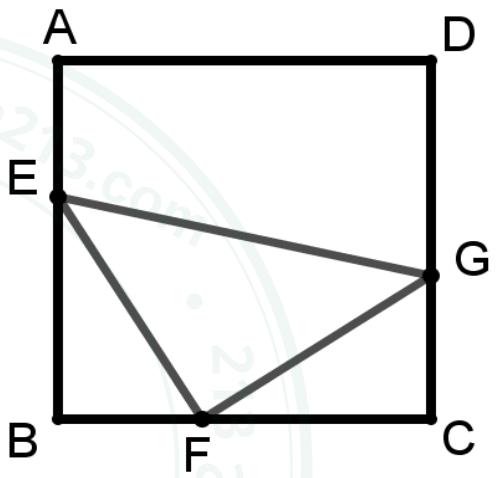
3) بين أنه يمكن الإنتقال من (P) إلى (C_f) بتحويل

نقطي بسيط يطلب تعيينه .

4) أنشئ (P) و (C_f) .

II- $ABCD$ مربع طول ضلعه $3cm$ ؛ النقط E ، F و G تنتمي إلى $[AB]$ ، $[BC]$ و $[CD]$ على الترتيب حيث :

$$AE = BF = CG = x$$



1) إلى أي مجال ينتمي x ؟

2) أحسب مساحة المثلث EFG بدلالة x ؛ ماذا تلاحظ ؟

3) إستنتج قيمة x حتى تكون مساحة المثلث EFG أصغر ما يمكن .

4) عين قيمة x حتى تكون مساحة المثلث EFG تساوي نصف مساحة المربع $ABCD$.

حل مقترح :

1) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

طريقة 1 : بالنشر و التبسيط نجد :

أي $f(x) = x^2 - 2 \times x \times \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$

أي $f(x) = x^2 - 3x + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}$

أي $f(x) = x^2 - 3x + \frac{18}{4}$:

$$f(x) = x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

طريقة 2 : لدينا $f(x) = x^2 - 3x + \frac{9}{2}$ و منه

$$f(x) = x^2 - 2 \times \frac{3}{2} \times x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$$

أي $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$ و منه

أي $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{9 \times 2}{2 \times 2}$

$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$ و هو المطلوب .

2) دراسة إتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$ و $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$:

- على المجال $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $x_1 < x_2 \leq \frac{3}{2}$

بإضافة العدد $-\frac{3}{2}$ نتحصل على :

$$x_1 - \frac{3}{2} < x_2 - \frac{3}{2} \leq 0$$

و بما أن الدالة " مربع " متناقصة تماما على $]-\infty, 0]$

فإنه ينتج : $\left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 > \left(x_2 - \frac{3}{2}\right)^2$

إضافة نفس العدد $\frac{9}{4}$ للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

أي $\left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} > \left(x_2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$

و بالتالي الدالة f متناقصة $f(x_1) > f(x_2)$

تماما على المجال $]-\infty, \frac{3}{2}]$.

- على المجال $[\frac{3}{2}, +\infty[$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $\frac{3}{2} \leq x_1 < x_2$

بإضافة العدد $-\frac{3}{2}$ نتحصل على :

$$0 \leq x_1 - \frac{3}{2} < x_2 - \frac{3}{2}$$

و بما أن الدالة " مربع " متزايدة تماما على $[0, +\infty[$

فإنه ينتج : $\left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 < \left(x_2 - \frac{3}{2}\right)^2$

إضافة نفس العدد $\frac{9}{4}$ للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

أي $\left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} < \left(x_2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$

و بالتالي الدالة f متزايدة تماما $f(x_1) < f(x_2)$

على المجال $[\frac{3}{2}, +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$\frac{3}{2}$	
		$+\infty$
$f(x)$		
	$\frac{9}{4}$	
		$-\infty$

3) نبين أنه يمكن الإنتقال من (P) إلى (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه :

لدينا : $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$ أي

و منه نجد : $y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$

$$y - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

نضع :
$$\begin{cases} x - \frac{3}{2} = X \\ y - \frac{9}{4} = Y \end{cases}$$

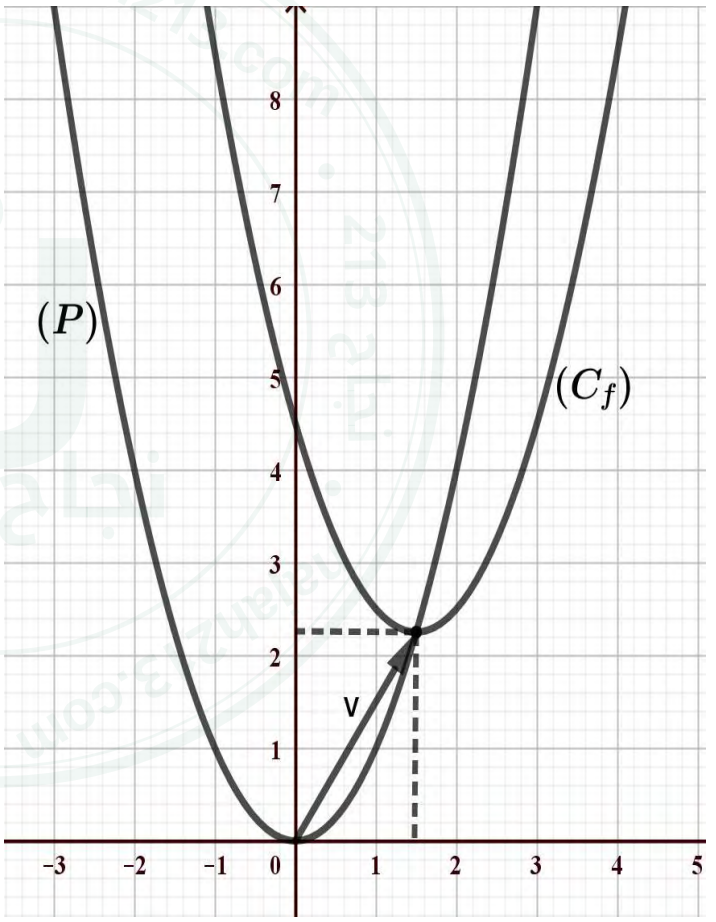
فنتحصل على $Y = X^2$ ؛ إذن النقطة $M\left(x - \frac{3}{2}; y - \frac{9}{4}\right)$ تنتمي إلى منحنى الدالة مربع

و نكتب :

$$\begin{cases} x = X + \frac{3}{2} \\ y = Y + \frac{9}{4} \end{cases}$$

و بالتالي نمر من المنحنى (P) إلى (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 9/4 \end{pmatrix}$.

4) إنشاء (P) و (C_f) :



II- 1) بما أن كل طول ضلع من المربع هو 3 و النقط E ، F و G تنتمي إلى $[AB]$ ، $[BC]$ و $[CD]$ على الترتيب حيث :

$$AE = BF = CG = x$$

أي أن x مقدار موجب فإن : $x \in [0,3]$

2) حساب مساحة المثلث EFG بدلالة x :

$$S_{EFG} = \frac{EF \times FG}{2}$$

في المثلث القائم BEF نطبق نظرية فيثاغورس :

أي $BE^2 + BF^2 = EF^2$

و منه نجد : $(3-x)^2 + x^2 = EF^2$

$$EF = \sqrt{(3-x)^2 + x^2}$$

في المثلث القائم CGF نطبق نظرية فيثاغورس :

أي $CF^2 + CG^2 = FG^2$

و منه نجد : $(3-x)^2 + x^2 = FG^2$

$$FG = \sqrt{(3-x)^2 + x^2}$$

و منه ينتج :

$$S_{EFG} = \frac{\sqrt{(3-x)^2 + x^2} \times \sqrt{(3-x)^2 + x^2}}{2}$$

أي $S_{EFG} = \frac{(3-x)^2 + x^2}{2}$ و بالنشر و التبسيط :

معناه : $S_{EFG} = \frac{2x^2 - 6x + 9}{2}$

و منه نستنتج أن : $S_{EFG} = x^2 - 3x + \frac{9}{2}$

$$\boxed{S_{EFG} = f(x)}$$

3) إستنتاج قيمة x حتى تكون مساحة المثلث EFG أصغر ما يمكن :

تكون مساحة المثلث EFG أصغر ما يمكن لما تكون $f(x)$ أصغر ما يمكن أي **القيمة الحدية الصغرى** للدالة f ؛ إذن من جدول التغيرات أو من التمثيل البياني نستنتج أن قيمة x المطلوبة هي $x=\frac{3}{2}$.

4) تعيين قيمة x حتى تكون مساحة المثلث EFG تساوي نصف مساحة المربع $ABCD$.

مسحة المربع $ABCD$ هي $S_{ABCD}=3^2=9$ ؛

و منه تكون مساحة المثلث EFG تساوي نصف مساحة المربع $ABCD$ أي $S_{EFG}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$ إذا و فقط إذا كان : $f(x)=\frac{9}{2}$

يكافئ $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$ أي :

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}-\frac{9}{4}$ أي :

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ و منه $\left|x-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}$ ؛ إذن :

$x-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ أو $x-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$

أي : $x=3$ أو $x=0$

ملاحظة : من أجل $x=0$ فإن النقطة E تنطبق على A و النقطة F تنطبق على D و النقطة G تنطبق على C فيصبح بذلك المثلث EFG هو نفسه المثلث ADC و مساحته تساوي نصف مساحة المربع $ABCD$.

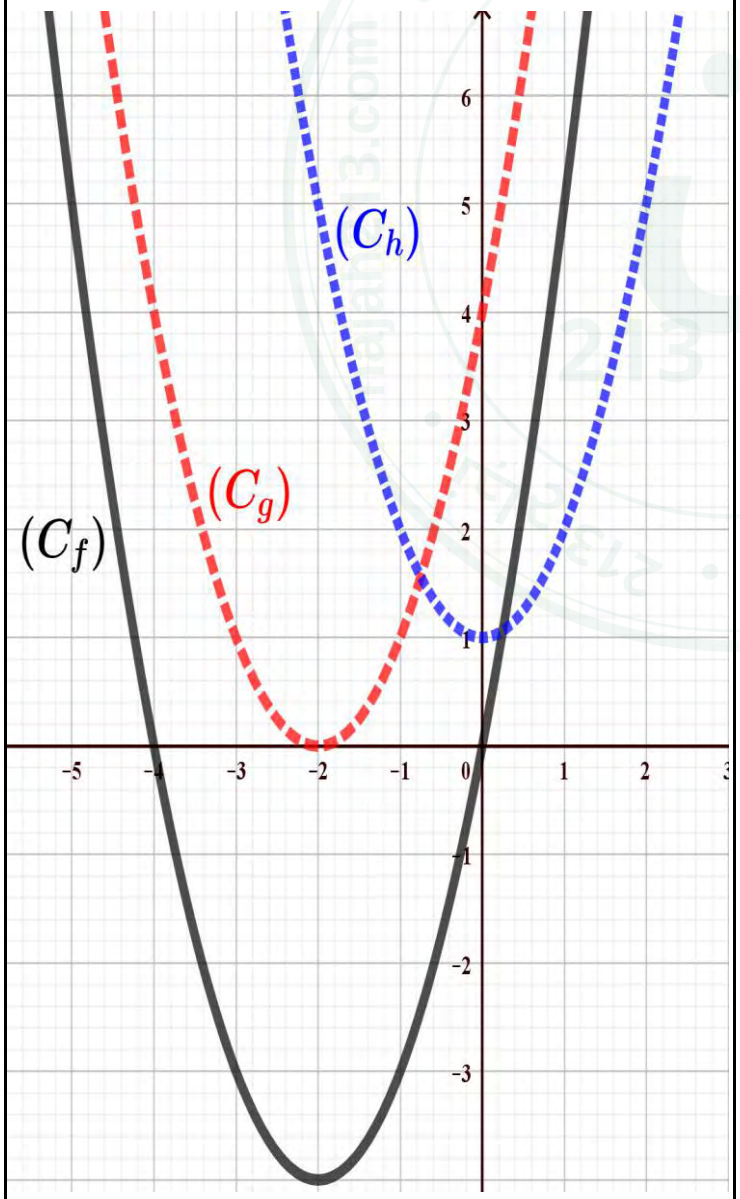
و من أجل $x=3$ فإن النقطة E تنطبق على D و النقطة F تنطبق على C و النقطة G تنطبق على B فيصبح بذلك المثلث EFG هو نفسه المثلث DCB و مساحته تساوي نصف مساحة المربع $ABCD$.

التمرين رقم 14 :

(C_f) ، (C_g) و (C_h) صور لمنحنى الدالة مربع بإنسحاب شعاعه $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ على الترتيب كما هو موضح في الشكل أدناه .

1) عين مركبتا كل من الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$.

2) عين دستور كل من الدوال f ، g و h .



حل التمرين رقم 14 :

1) تعيين مركبتا الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$:

مركبتا كل شعاع من هاته الأشعة تساوي إلى إحداثيي ذروة كل منحنى من المنحنيات البيانية (C_f) ، (C_g) و (C_h) :

- المنحنى (C_f) يقبل ذروة عند النقطة التي إحداثياها $(-2;-4)$ ؛ إذن شعاع الإنسحاب هو $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$.
- المنحنى (C_g) يقبل ذروة عند النقطة التي إحداثياها $(-2;0)$ ؛ إذن شعاع الإنسحاب هو $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$.
- المنحنى (C_h) يقبل ذروة عند النقطة التي إحداثياها $(0;1)$ ؛ إذن شعاع الإنسحاب هو $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

2) تعيين $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$:

- دستور الدالة f يكتب على الشكل :

$f(x)=(x+a)^2+b$ حيث a و b عددان حقيقيان ثابتان و (C_f) صورة (P) منحنى الدالة مربع بإنسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$ ؛ إذن بالمساواة مع $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ نتحصل على : $\begin{cases}-a=-2\\b=-4\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=2\\b=-4\end{cases}$ و منه ينتج : $\boxed{f(x)=(x+2)^2-4}$

- دستور الدالة g يكتب على الشكل :

$g(x)=(x+\alpha)^2+\beta$ حيث α و β عددان حقيقيان ثابتان و (C_g) صورة (P) منحنى الدالة مربع بإنسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ ؛ إذن بالمساواة مع $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ نتحصل على : $\begin{cases}-\alpha=-2\\\beta=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}\alpha=2\\\beta=0\end{cases}$ و منه ينتج : $\boxed{g(x)=(x+2)^2}$

- دستور الدالة h يكتب على الشكل :

$h(x)=(x+\gamma)^2+\lambda$ حيث γ و λ عددان حقيقيان ثابتان و (C_h) صورة (P) منحنى الدالة مربع بإنسحاب شعاعه $\vec{w}\begin{pmatrix}-\gamma\\\lambda\end{pmatrix}$ ؛ إذن بالمساواة مع $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ نتحصل على : $\begin{cases}-\gamma=0\\\lambda=1\end{cases}$ أي $\begin{cases}\gamma=0\\\lambda=1\end{cases}$

و منه ينتج : $h(x)=(x+0)^2+1$ أي $\boxed{h(x)=x^2+1}$.

التمرين رقم 15 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(H) هو القطع الزائد الممثل للدالة مقلوب .

1) أحسب $f(-1)$ ، $f(0)$ و $f(2)$.

2) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد x يختلف عن 1 :

$$f(x)=a+\frac{b}{x-1}$$

3) أدرس إتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها .

4) أدرس إشارة الدالة f .

5) بين أنه يمكن إستنتاج (C_f) إنطلاقا من (H) بإنسحاب يطلب تعيين شعاعه ثم أنشئه .

حل التمرين رقم 15 :

1) حساب $f(-1)$ ، $f(0)$ و $f(2)$:

$$f(-1)=\frac{2(-1)-1}{-1-1}=\frac{3}{2} \quad ، \quad f(0)=\frac{2\times0-1}{0-1}=1 \quad ، \quad f(2)=\frac{2\times2-1}{2-1}=3$$

2) تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد x يختلف عن 1 :

$$f(x)=a+\frac{b}{x-1}$$

طريقة 1 : بتوحيد المقامات نتحصل على : $f(x)=\dfrac{ax-a+b}{x-1}$ و منه بالمطابقة مع الدستور

نجد : $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$ $\begin{cases}a=2\\-a+b=-1\end{cases}$ و بتعويض الأولى في الثانية ينتج $\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$

إذن من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ فإن : $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x-1}$.

<u>طريقة 2</u> : من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ لدينا : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$ أي $f(x) = \dfrac{2x-1-2+2}{x-1}$ أي

$f(x) = \dfrac{2(x-1)-1+2}{x-1}$ أي $f(x) = \dfrac{2(x-1)+1}{x-1}$ و منه $f(x) = \dfrac{2(x-1)}{x-1} + \dfrac{1}{x-1}$ ؛

إذن من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ فإنه ينتج : $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x-1}$ و منه $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$.

3) دراسة إتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty, 1[$ و $]1, +\infty[$:

- على المجال $]-\infty, 1[$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $x_1 < x_2 < 1$

بإضافة العدد -1 نتحصل على : $x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0$ ؛ و بما أن الدالة " مقلوب "

متناقصة تماما على $]-\infty, 0[$ فإنه ينتج : $\dfrac{1}{x_1 - 1} > \dfrac{1}{x_2 - 1}$

إضافة نفس العدد 2 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

$2 + \dfrac{1}{x_1 - 1} > 2 + \dfrac{1}{x_2 - 1}$ أي $f(x_1) > f(x_2)$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty, 1[$.

- على المجال $]1, +\infty[$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $1 < x_1 < x_2$

بإضافة العدد -1 نتحصل على : $0 < x_1 - 1 < x_2 - 1$ ؛ و بما أن الدالة " مقلوب "

متناقصة تماما على $]0, +\infty[$ فإنه ينتج : $\dfrac{1}{x_1 - 1} > \dfrac{1}{x_2 - 1}$

إضافة نفس العدد 2 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

$2+\frac{1}{x_1-1}>2+\frac{1}{x_2-1}$ أي $f(x_1)>f(x_2)$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على $]1,+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	‖	↘	

4) دراسة إشارة الدالة f :

نبحث أولا عن القيم التي تعدم $f(x)$: $f(x)=0$ تكافئ $\frac{2x-1}{x-1}=0$ تكافئ $2x-1=0$ و $x-1\neq 0$

تكافئ $2x=1$ و $x\neq 1$ ؛ إذن $f(x)=0$ إذا و فقط إذا كان $x=\frac{1}{2}$ ؛ نلخص إشارة حاصل القسمة $\frac{2x-1}{x-1}$ في جدول كما يلي :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

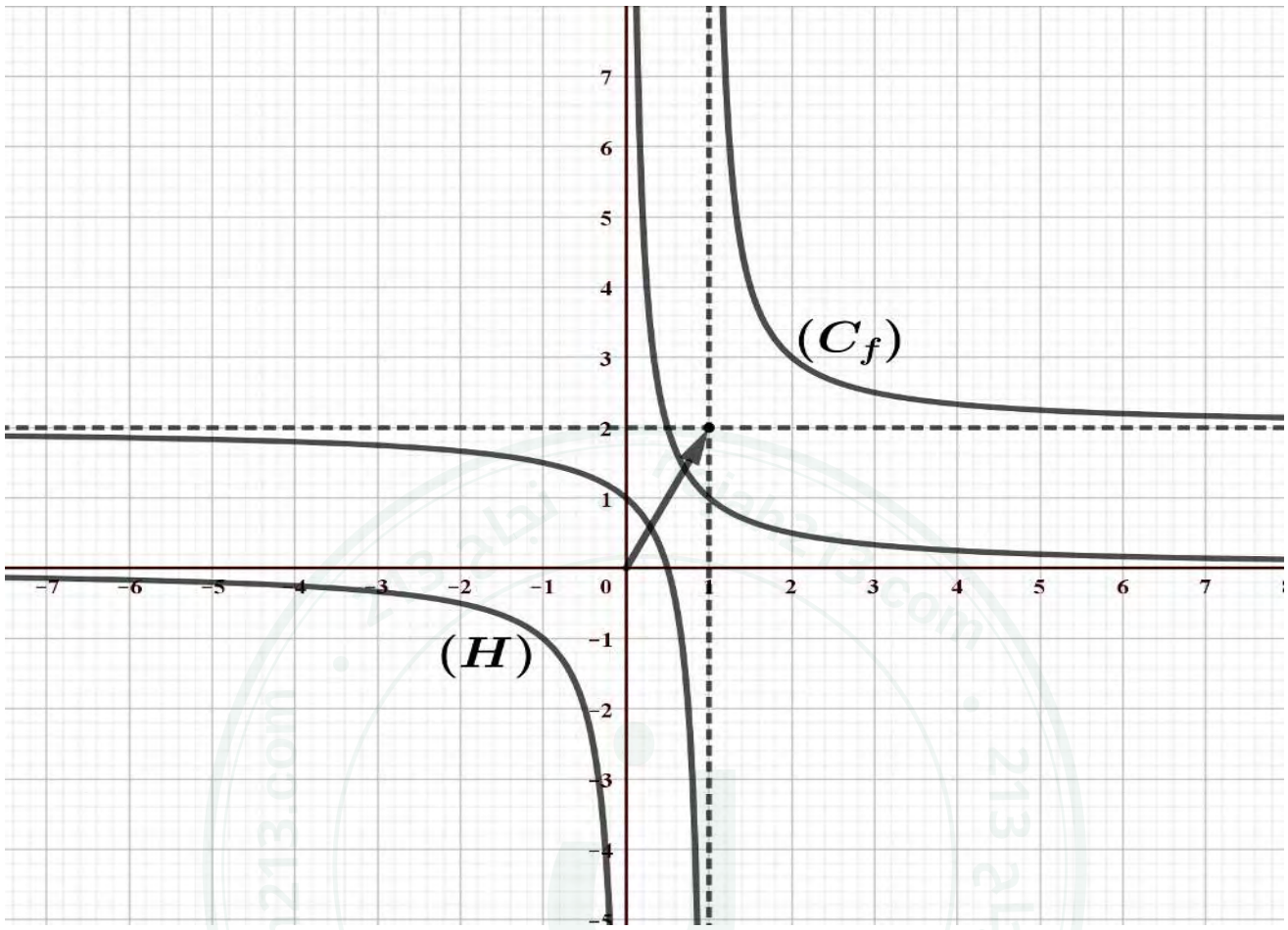
5) نبين أنه يمكن إستنتاج (C_f) إنطلاقا من (H) بإنسحاب يطلب تعيين شعاعه ثم إنشاؤه :

لدينا : $f(x)=2+\frac{1}{x-1}$ أي $y=2+\frac{1}{x-1}$ و منه نجد :

$y-2=\frac{1}{x-1}$ ؛ و بوضع $\begin{cases} x-1=X \\ y-2=Y \end{cases}$

نتحصل على $Y=\frac{1}{X}$ ؛ إذن النقطة $M(x-1;y-2)$ تنتمي إلى منحنى الدالة " مقلوب " و نكتب :

$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$ و بالتالي نمر من المنحنى (H) إلى (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.



التمرين رقم 16 :

لتكن f و g الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}-\{-1\}$ على الترتيب كما يلي :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{-2x-1}{x+1}$$

(C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $f(0)$ ، $f(2)$ ، $g(0)$.

2) جد السوابق الممكنة للعدد 3 بالدالة f .

3) بين أن : $f(x) = (x-1)^2 + 2$

4) بين أنه من أجل كل $x \neq -1$ فإن : $g(x) = -2 + \dfrac{1}{x+1}$

5) أدرس تغيرات الدالة f على كل من $]-\infty,1]$ و $[1,+\infty[$ ثم أدرس تغيرات الدالة g على كل من $]-\infty,-1[$ و $]-1,+\infty[$.

6) شكل جدول تغيرات كل من الدالتين f و g .

7) لخص إشارة $g(x)$ في جدول .

8) أنشئ (C_f) و (C_g) إعتمادا على (P) منحنى الدالة مربع و (H) منحنى الدالة مقلوب على الترتيب .

9) حل بيانيا في المجال $]-1,+\infty[$: $f(x) = g(x)$ ، $f(x) > g(x)$

حل التمرين رقم 16 :

1) حساب $f(0)$ ، $f(2)$ ، $g(0)$:

$f(0) = 0^2 - 2(0) + 3 = 3$ ، $f(2) = 2^2 - 2(2) + 3 = 3$ ، $g(0) = \dfrac{-2(0)-1}{0+1} = -1$

2) إيجاد السوابق الممكنة للعدد 3 بالدالة f :

نحل المعادلة $f(x) = 3$: $f(x) = 3$ تكافئ $x^2 - 2x + 3 = 3$ تكافئ $x^2 - 2x = 0$

تكافئ $x(x-2) = 0$ تكافئ $x = 0$ أو $x - 2 = 0$ ؛ إذن :

$f(x) = 3$ إذا و فقط إذا كان $x = 0$ أو $x = 2$ و منه للعدد 3 سابقتان بالدالة f هما 0 و 2 .

3) نبين أن : $f(x) = (x-1)^2 + 2$

لدينا $f(x) = x^2 - 2x + 3$ معناه $f(x) = x^2 - 2\times 1\times x + 1^2 - 1^2 + 3$ أي

$f(x) = (x-1)^2 - 1^2 + 3$ و منه $f(x) = (x-1)^2 + 2$ و هو المطلوب .

4) نبين أنه من أجل كل $x \neq -1$ فإن : $g(x) = -2 + \dfrac{1}{x+1}$

لدينا $g(x)=\dfrac{-2x-1}{x+1}$ معناه $g(x)=\dfrac{-2x-2+2-1}{x+1}$ أي $g(x)=\dfrac{-2(x+1)+2-1}{x+1}$ أي

$g(x)=\dfrac{-2(x+1)+1}{x+1}$ أي $g(x)=\dfrac{-2(x+1)}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}$ و بما أن $x\neq -1$ نتحصل على :

$g(x)=-2+\dfrac{1}{x+1}$ و هو المطلوب .

5) دراسة تغيرات الدالة f على كل من $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$:

- على المجال $]-\infty,1[$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $x_1<x_2\leq 1$

بإضافة العدد -1 نتحصل على : $x_1-1<x_2-1\leq 0$ ؛ و بما أن الدالة " مربع " متناقصة تماما على $]-\infty,0[$

فإنه ينتج : $(x_1-1)^2>(x_2-1)^2$ ؛ إضافة نفس العدد 2 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

$(x_1-1)^2+2>(x_2-1)^2+2$ أي $f(x_1)>f(x_2)$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty,1[$.

- على المجال $]1,+\infty[$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $1\leq x_1<x_2$

بإضافة العدد -1 نتحصل على : $0\leq x_1-1<x_2-1$ ؛ و بما أن الدالة " مربع " متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

فإنه ينتج : $(x_1-1)^2<(x_2-1)^2$ ؛ إضافة نفس العدد 2 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

$(x_1-1)^2+2<(x_2-1)^2+2$ أي $f(x_1)<f(x_2)$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]1,+\infty[$.

دراسة تغيرات الدالة g على كل من $]-\infty,-1[$ و $]-1,+\infty[$:

- على المجال $]-\infty,-1[$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $x_1<x_2<-1$

بإضافة العدد 1 نتحصل على : $x_1+1<x_2+1<0$ ؛ و بما أن الدالة " مقلوب " متناقصة تماما على $]-\infty,0[$

فإنه ينتج :

$\frac{1}{x_1+1} > \frac{1}{x_2+1}$ ؛ إضافة نفس العدد -2 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

$-2+\frac{1}{x_1+1} > -2+\frac{1}{x_2+1}$ أي $g(x_1) > g(x_2)$ و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty,-1[$.

- على المجال $]-1,+\infty[$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $-1 < x_1 < x_2$

بإضافة العدد 1 نتحصل على : $0 < x_1+1 < x_2+1$ ؛ و بما أن الدالة " مقلوب " متناقصة تماما على $]0,+\infty[$

فإنه ينتج : $\frac{1}{x_1+1} > \frac{1}{x_2+1}$ ؛ إضافة نفس العدد -2 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

$-2+\frac{1}{x_1+1} > -2+\frac{1}{x_2+1}$ أي $g(x_1) > g(x_2)$ و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على $]-1,+\infty[$.

6) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	2	↗	

تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$		↘	‖	↘	

7) تعيين إشارة $g(x)$ في جدول :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x-1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

8) إنشاء (C_f) و (C_g) إعتمادا على (P) منحنى الدالة مربع و (H) منحنى الدالة مقلوب على الترتيب :

لدينا : $f(x)=(x-1)^2+2$ أي $y=(x-1)^2+2$ و منه نجد :

$y-2=(x-1)^2$ ؛ و بوضع $\begin{cases} x-1=X \\ y-2=Y \end{cases}$

نتحصل على $Y=X^2$ ؛ إذن النقطة $M(x-1;y-2)$ تنتمي إلى منحنى الدالة " مربع " و نكتب :

(C_f) صورة (P) منحنى الدالة مربع بإنسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. ؛ إذن $\begin{cases} x=X+1 \\ y=Y+2 \end{cases}$

✓ لدينا : $g(x)=-2+\dfrac{1}{x+1}$ و بالتالي $y=-2+\dfrac{1}{x+1}$ أي $y+2=\dfrac{1}{x+1}$

و بوضع $\begin{cases} x+1=X \\ y+2=Y \end{cases}$ نتحصل على $Y=\dfrac{1}{X}$ ؛ إذن النقطة $M(x+1;y+2)$ تنتمي إلى منحنى الدالة

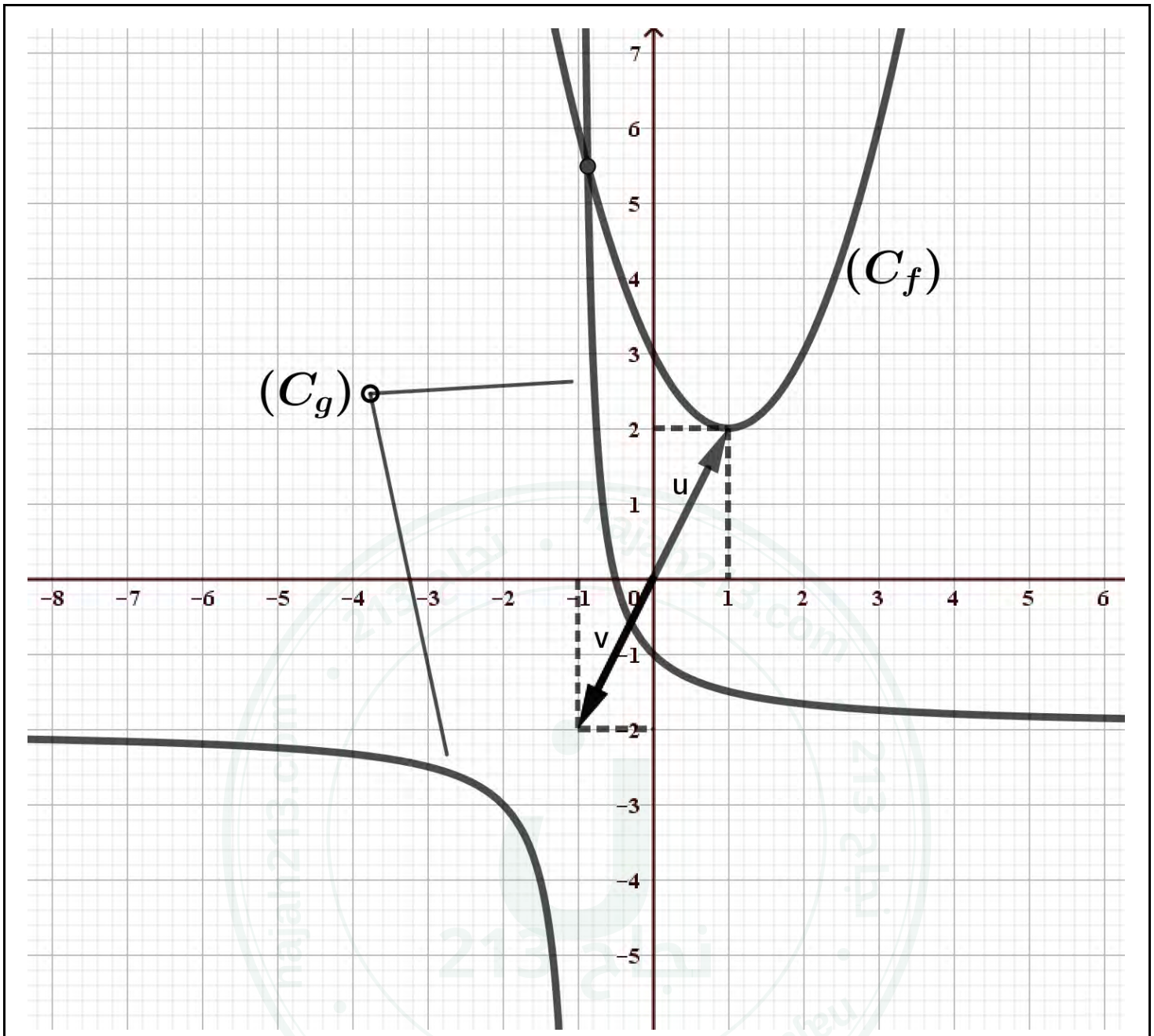
" مقلوب " و نكتب : $\begin{cases} x=X-1 \\ y=Y-2 \end{cases}$ ؛ إذن (C_g) صورة (H) منحنى الدالة مقلوب بإنسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

9) حل بيانيا في المجال $]-1,+\infty[$: $f(x)=g(x)$ ، $f(x)>g(x)$

حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ بيانيا في المجال $]-1,+\infty[$ تمثل فواصل نقط تقاطع (C_f) و (C_g) و من التمثيلات البيانية نلاحظ أن المنحنيين يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها $-0,87$ و منه $S=\{-0,87\}$.

حلول المتراجحة $f(x)>g(x)$ بيانيا في المجال $]-1,+\infty[$ تمثل فواصل نقط المنحنى (C_f) الواقعة فوق المنحنى (C_g) و من التمثيلات البيانية نتحصل على : $S=]-0,87\ ,+\infty[$.

الإنشاء :


(C_f)
(C_g)
u
v

دراسة دوال من الشكل $x \mapsto a+\sqrt{x+b}$ **حيث** a **و** b **عددان حقيقيان معلومان .**

التمرين رقم 17 :

f الدالة المعرفة على $[1,+\infty[$ كما يلي :

$f(x)=-2+\sqrt{x-1}$ ؛ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب صور الأعداد 1 ، 2 و 17 بالدالة f .

2) حل في المجال $[1,+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

3) أدرس تغيرات الدالة على المجال $[1,+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها .

4) بين أن (C_f) صورة (C) منحنى دالة الجذر التربيعي بإنسحاب يطلب تعيين شعاعه ثم أنشئه .

5) إنطلاقا من (C_f) أوجد حصرا لـ $f(x)$ علما أن $1\le x\le 5$.

حل التمرين رقم 17 :

1) حساب صور الأعداد 1 ، 2 و 17 بالدالة f :

$f(1)=-2+\sqrt{1-1}=-2$ ،

$f(2)=-2+\sqrt{2-1}=-1$ ،

$f(17)=-2+\sqrt{17-1}=2$.

2) حل في المجال $[1,+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$:

$f(x)=0$ تكافئ $-2+\sqrt{x-1}=0$ تكافئ

$\sqrt{x-1}=2$ تكافئ $x-1=4$ (لأن $x-1\ge 0$)

تكافئ $x=5$: $S=\{5\}$

التفسير الهندسي :

حلول المعادلة $f(x)=0$ بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل ؛ إذن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل (xx') في النقطة ذات الفاصلة 5 .

3) دراسة تغيرات الدالة على المجال $[1,+\infty[$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث $1\le x_1<x_2$

إضافة نفس العدد -1 لا يغير إتجاه المتباينة :

$0\le x_1-1<x_2-1$ ؛ و بما دالة الجذر التربيعي متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ فإنه ينتج :

$\sqrt{x_1-1}<\sqrt{x_2-1}$ ؛ إضافة نفس العدد -2 لا يغير إتجاه المتباينة :

$-2+\sqrt{x_1-1}<-2+\sqrt{x_2-1}$ أي

$f(x_1)<f(x_2)$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على $[1,+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

مما سبق $f(1)=-2+\sqrt{1-1}=-2$

x	1	$+\infty$
$f(x)$	-2 ↗	

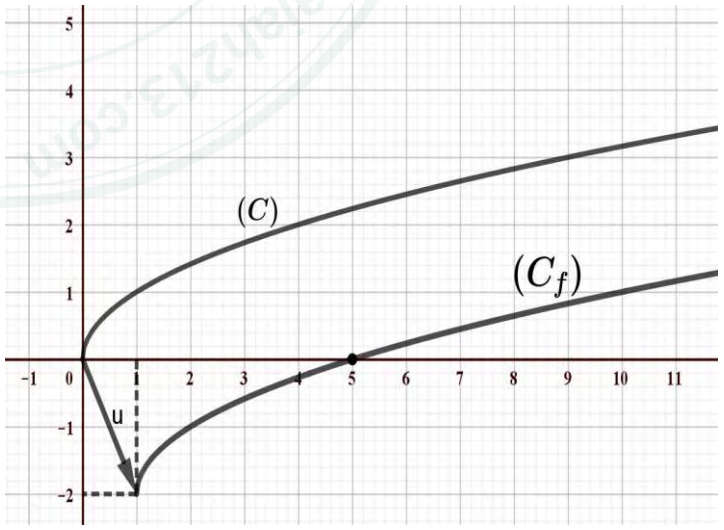
4) تبيان أن (C_f) صورة (C) منحنى دالة الجذر التربيعي بإنسحاب يطلب تعيين شعاعه ثم إنشاؤه :

لدينا : $f(x)=-2+\sqrt{x-1}$ أي $y=-2+\sqrt{x-1}$ و منه $y+2=\sqrt{x-1}$

بوضع : $\begin{cases} x-1=X \\ y+2=Y \end{cases}$ ينتج : $Y=\sqrt{X}$

إذن النقطة $M(x-1;y+2)$ تنتمي إلى (C) منحنى دالة الجذر التربيعي و نكتب $\begin{cases} x=X+1 \\ y=Y-2 \end{cases}$

إذن (C_f) صورة (C) منحنى دالة الجذر التربيعي بإنسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.



5) إنطلاقا من (C_f) إيجاد حصرا لـ $f(x)$ علما أن : $1\le x\le 5$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1,+\infty[$ و بما أن $[1,5]\subset[1,+\infty[$ فإن الدالة متزايدة تماما على $[1,5]$ ؛ إذن ينتج : $f(1)\le f(x)\le f(5)$ أي $\boxed{-2\le f(x)\le 0}$.

التمرين رقم 18 :

f و g الدالتان المعرفتان كمايلي :

$f(x)=\dfrac{-2x-3}{x+2}$ و $g(x)=\sqrt{x+2}-2$

ليكن (C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين D_f و D_g .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in D_f$ ؛

$$f(x)=-2+\frac{1}{x+2}$$

3) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4) إشرح كيفية إنشاء (C_f) إنطلاقا من (H) منحنى الدالة " مقلوب " ثم أنشئه .

5) بين أن (C_g) صورة منحنى دالة مرجعية بإنسحاب يطلب تعيين شعاعه ثم أنشئه في نفس الرسم السابق .

6) شكل جدول إشارة $g(x)$.

7) حل بيانيا المعادلات و المتراجحات التالية :

$f(x)=g(x)$ ، $f(x)\le g(x)$ ،

$g(x) \leq 1$.

حل التمرين رقم 18 :

1) تعيين D_f و D_g :

تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x+2 \neq 0$

معناه $x \neq -2$ و بالتالي نجد : $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

تكون الدالة g معرفة إذا و فقط إذا كان $x+2 \geq 0$

معناه $x \geq -2$ و بالتالي نجد : $D_g = [-2, +\infty[$

2) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$ ؛

$$f(x) = -2 + \frac{1}{x+2}$$

طريقة 1 : بتوحيد المقامات نتحصل على :

$$f(x) = -2 + \frac{1}{x+2} = \frac{-2(x+2)+1}{x+2}$$ أي

$$f(x) = \frac{-2x-4+1}{x+2}$$ و منه من أجل كل عدد

حقيقي $x \neq -2$ ؛ $f(x) = \frac{-2x-3}{x+2}$.

طريقة 2 : $f(x) = \frac{-2x-3}{x+2}$ معناه

$$f(x) = \frac{-2x-3-1+1}{x+2}$$ أي

$$f(x) = \frac{-2x-4+1}{x+2}$$ أي

$$f(x) = \frac{-2(x+2)+1}{x+2}$$ أي

$$f(x) = \frac{-2(x+2)}{x+2} + \frac{1}{x+2}$$ و منه من أجل

$$\boxed{f(x) = -2 + \frac{1}{x+2}}$$ كل عدد $x \neq -2$ ؛

3) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

- على المجال $]-\infty, -2[$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $x_1 < x_2 < -2$

إضافة نفس العدد 2 لا يغير إتجاه المتباينة :

$x_1 + 2 < x_2 + 2 < 0$ ؛ و بما أن الدالة " مقلوب " متناقصة تماما على $]-\infty, 0[$ فإنه ينتج :

$$\frac{1}{x_1+2} > \frac{1}{x_2+2}$$

إضافة نفس العدد -2 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

$$-2 + \frac{1}{x_1+2} > -2 + \frac{1}{x_2+2}$$ أي

$f(x_1) > f(x_2)$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty, -2[$.

- على المجال $]-2, +\infty[$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث : $-2 < x_1 < x_2$

إضافة نفس العدد 2 لا يغير إتجاه المتباينة :

$0 < x_1 + 2 < x_2 + 2$ ؛ و بما أن الدالة " مقلوب "

متناقصة تماما على $]0,+\infty[$ فإنه ينتج :

$$\frac{1}{x_1+2} > \frac{1}{x_2+2}$$

إضافة نفس العدد -2 للطرفين لا يغير إتجاه المتباينة :

$$-2+\frac{1}{x_1+2} > -2+\frac{1}{x_2+2}$$ أي

$f(x_1) > f(x_2)$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما

على $]-2,+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	↘	||	↘

4) شرح كيفية إنشاء (C_f) إنطلاقا من (H) منحنى الدالة " مقلوب " ثم إنشاؤه :

لدينا : $f(x) = -2+\frac{1}{x+2}$ أي

$y = -2+\frac{1}{x+2}$ و منه $y+2 = \frac{1}{x+2}$

بوضع : $\begin{cases} x+2 = X \\ y+2 = Y \end{cases}$ ينتج : $Y = \frac{1}{X}$

إذن النقطة $M(x+2;y+2)$ تنتمي إلى (H)

منحنى الدالة " مقلوب " و نكتب $\begin{cases} x = X-2 \\ y = Y-2 \end{cases}$

إذن (C_f) صورة (H) منحنى الدالة " مقلوب "

بإنسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$.

5) نبين أن (C_g) صورة منحنى دالة مرجعية

بإنسحاب يطلب تعيين شعاعه :

لدينا : $g(x) = \sqrt{x+2}-2$ أي

$y = \sqrt{x+2}-2$ و منه $y+2 = \sqrt{x+2}$

بوضع : $\begin{cases} x+2 = X \\ y+2 = Y \end{cases}$ ينتج : $Y = \sqrt{X}$

إذن النقطة $M(x+2;y+2)$ تنتمي إلى (C)

منحنى دالة الجذر التربيعي و نكتب $\begin{cases} x = X-2 \\ y = Y-2 \end{cases}$

إذن (C_g) صورة (C) منحنى دالة الجذر التربيعي

بإنسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$.

6) تشكيل جدول إشارة $g(x)$:

نحل أولا المعادلة $g(x)=0$:

$g(x)=0$ تكافئ $-2+\sqrt{x+2}=0$ تكافئ

$\sqrt{x+2}=2$ تكافئ $x+2=4$ لأن $x+2 \geq 0$

تكافئ $2-x=4$ و منه نجد $x=2$.

x	-2		2		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$-$	0	$+$	

7) حل بيانيا المعادلات و المتراجحات التالية :

$f(x)=g(x)$: حلول المعادلة بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحى (C_f) مع المنحنى (C_g) ؛ إذن

$$S=\{-1\}$$

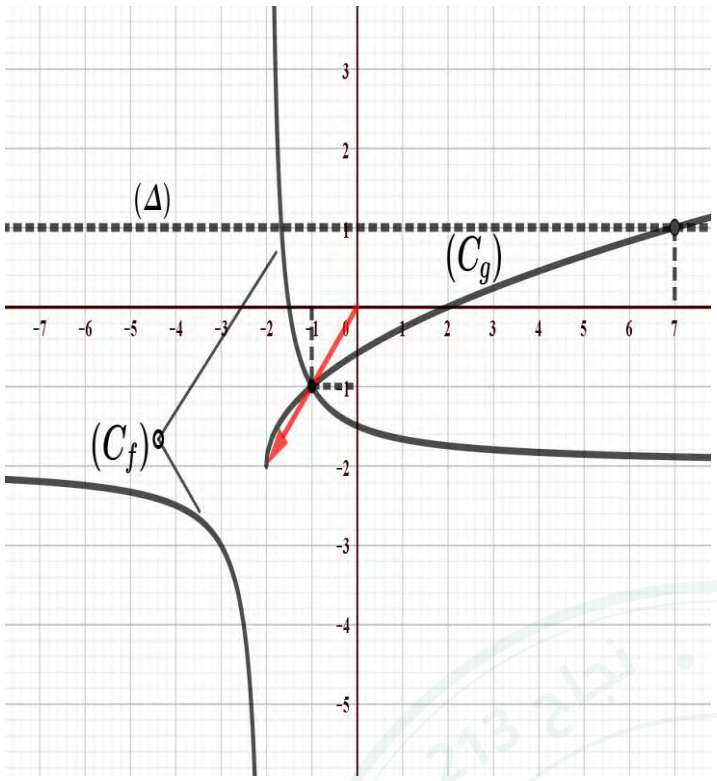
$f(x)\leq g(x)$: حلول المتراجحة بيانيا تمثل فواصل نقط المنحى (C_f) الواقعة تحت المنحنى (C_g) أو المنطبقة عليه ؛ إذن :

$$S=]-\infty,-2[\cup[-1,+\infty[$$

$g(x)\leq 1$: حلول المتراجحة بيانيا تمثل فواصل نقط المنحى (C_g) الواقعة تحت المستقيم الأفقي (Δ) ذو المعادلة $y=1$ أو المنطبقة عليه ؛ إذن :

$$S=[-2,7]$$

الإنشاء :



دراسة دوال من الشكل $x\mapsto|x+a|+b$ حيث a و b عددان حقيقيان معلومان .

التمرين رقم 19 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=|x-2|+3$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

2) أدرس تغيرات الدالة f على المجالين $]-\infty,2]$ و $[2,+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أحسب $f(0)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$f(x)-f(2)\geq 0$ ؛ ماذا تستنتج ؟

5) إشرح كيف يمكن إنشاء (C_f) إنطلاقا من (C) منحنى دالة " القيمة المطلقة " ثم أنشئه .

حل التمرين رقم 19 :

1) كتابة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

نلخص إشارة المقدار $x-2$ في جدول :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$\lvert x-2\rvert =$		$2-x$	0	$x-2$	

إذن : - إذا كان $x\in]-\infty,2]$ فإن

$\lvert x-2\rvert = 2-x$ و منه نتحصل على :

$f(x)=2-x+3$ أي $f(x)=-x+5$.

- إذا كان $x\in [2,+\infty[$ فإن $\lvert x-2\rvert = x-2$ و منه نتحصل على :

$f(x)=x-2+3$ أي $f(x)=x+1$.

نتيجة : $f(x)=\begin{cases}-x+5 & si\ \ x\leq 2\\ x+1 & si\ \ x>2\end{cases}$

2) دراسة تغيرات الدالة f على المجالين $]-\infty,2]$ و $[2,+\infty[$ ثم تشكيل جدول تغيراتها :

- على المجال $]-\infty,2]$: من السؤال السابق ؛

$f(x)=-x+5$ و هي عبارة دالة تآلفية متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ و بالأخص على المجال $]-\infty,2]$ لأن $a=-1<0$.

- على المجال $[2,+\infty[$: من السؤال السابق ؛

$f(x)=x+1$ و هي عبارة دالة تآلفية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و بالأخص على المجال $[2,+\infty[$ لأن $a=1>0$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	3	↗

3) حساب $f(0)$ ثم تفسير النتيجة بيانيا :

$f(0)=\lvert 0-2\rvert+3$ أي $f(0)=5$.

منحنى الدالة f يقطع حامل محور التراتيب في النقطة ذات الترتيب 5 .

4) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$f(x)-f(2)\geq 0$:

بما أن $f(2)=3$ فإنه ينتج :

$f(x)-f(2)=\lvert x-2\rvert+3-3$ أي

$f(x)-f(2)=\lvert x-2\rvert\geq 0$ لأن القيمة المطلقة لعدد حقيقي مقدار موجب و منه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f(x)\geq f(2)$ ؛ إذن منحنى الدالة f يقبل **قيمة حدية صغرى** هي $f(2)=3$ من أجل $x=2$

5) إنشاء (C_f) :

طريقة 1 : لدينا $f(x)=|x-2|+3$ و منه

$y=|x-2|+3$ و منه $y-3=|x-2|$

بوضع : $\begin{cases} x-2=X \\ y-3=Y \end{cases}$ نتحصل على :

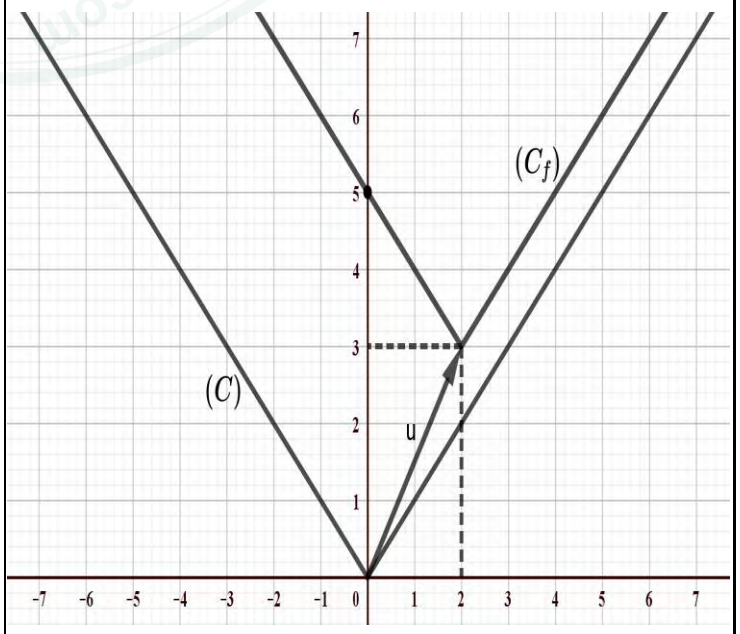
$Y=|X|$ و منه النقطة $M(x-2;y-3)$ تنتمي إلى (C) منحنى دالة " القيمة المطلقة " و نكتب :

إذن (C_f) صورة (C) منحنى دالة $\begin{cases} x=X+2 \\ y=Y+3 \end{cases}$

" القيمة المطلقة " بإنسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

طريقة 2 : $f(x)=\begin{cases} -x+5 & si \quad x\le 2 \\ x+1 & si \quad x>2 \end{cases}$

إذن على المجال $]-\infty,2]$ نرسم **نصف المستقيم** ذي المعادلة $y=-x+5$ وعلى المجال $[2,+\infty[$ نرسم **نصف المستقيم** ذي المعادلة $y=x+1$ (إستعمل جدولين مساعدين) .



التمرين رقم 20 :

f دالة معرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أثبت أن $f(x)=\sqrt{x+\alpha}+\beta$ حيث α و β عددان حقيقيان يطلب تعيينهما ؛ ثم عين D_f .

2) جد إحداثيي نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات .

3) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4) إشرح كيفية إنشاء (C_f) إعتمادا على منحنى دالة " الجذر التربيعي " ثم أنشئه .

5) أوجد جبريا حصرا للعدد $f(x)$ على المجال $]-1,3[$.

6) ليكن $\gamma\in\mathbb{R}^*$ ؛ جد قيمة γ حتى تنتمي النقطة $(\gamma^2+2\gamma;0)$ إلى (C_f) .

حل التمرين رقم 20 :

1) إيجاد العددين α و β حيث :

$$f(x)=\sqrt{x+\alpha}+\beta$$

نضرب كلا من البسط و المقام في العدد $\sqrt{x+1}-1$ (يسمى مرافق العدد $\sqrt{x+1}+1$)

فيكون من أجل كل $x\ge -1$:

و منه $f(x)=\dfrac{x\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}$

و منه نجد $f(x)=\dfrac{x\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{\sqrt{x+1}^{2}-1^{2}}$

؛ إذن من أجل $x\neq 0$ $f(x)=\dfrac{x\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x+1-1}$

؛ إذن بالمطابقة مع الشكل : $\boxed{f(x)=\sqrt{x+1}-1}$

نتحصل على : $f(x)=\sqrt{x+\alpha}+\beta$

$\alpha=1$ و $\beta=-1$.

تعيين D_f : تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان

$x+1\geq 0$ يكافئ $x\geq -1$ و منه نجد :

$D_f=[-1,+\infty[$

2) إيجاد إحداثيي نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات :

- مع حامل محور الفواصل (xx') :

نضع $f(x)=0$ و نبحث عن قيم x :

$f(x)=0$ تكافئ $\sqrt{x+1}-1=0$ تكافئ

$\sqrt{x+1}=1$ و بتربيع الطرفين $x+1=1$ لأن $x\geq -1$ و منه نجد $x=0$.

و منه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الإحداثيات $(0;0)$ (مبدأ المعلم) .

- مع حامل محور التراتيب (yy') :

نضع $x=0$ و نحسب $f(0)$:

$f(0)=\sqrt{0+1}-1=0$ و بالتالي (C_f) يقطع حامل محور التراتيب في النقطة ذات الإحداثيات $(0;0)$ (مبدأ المعلم) .

3) دراسة تغيرات الدالة f :

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث $-1\leq x_1<x_2$

إضافة نفس العدد 1 لا يغير إتجاه المتباينة :

$0\leq x_1+1<x_2+1$ ؛ و بما دالة الجذر التربيعي متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ فإنه ينتج :

$\sqrt{x_1+1}<\sqrt{x_2+1}$ ؛ إضافة نفس العدد -1 لا يغير إتجاه المتباينة :

$\sqrt{x_1+1}-1<\sqrt{x_2+1}-1$ أي :

$f(x_1)<f(x_2)$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على $[-1,+\infty[$.

x	-1	$+\infty$
$f(x)$	-1 ↗	

4) شرح كيفية إنشاء (C_f) إعتمادا على منحنى دالة " الجذر التربيعي " ثم إنشاؤه :

لدينا : $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ أي

$y=\sqrt{x+1}-1$ و منه $y+1=\sqrt{x+1}$

بوضع : $\begin{cases} x+1=X \\ y+1=Y \end{cases}$ ينتج : $Y=\sqrt{X}$

إذن النقطة $M(x+1;y+1)$ تنتمي إلى (C)

منحنى دالة الجذر التربيعي و نكتب $\begin{cases} x=X-1 \\ y=Y-1 \end{cases}$

إذن (C_f) صورة (C) منحنى دالة الجذر التربيعي

بإنسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.

5) إيجاد جبريا حصرا للعدد $f(x)$ على المجال $]-1,3[$:

$x\in]-1,3[$ معناه $-1<x<3$ ؛ إضافة نفس العدد 1 لا يغير إتجاه المتباينة $0<x+1<4$

و بما أن دالة الجذر التربيعي متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ فإنه ينتج : $0<\sqrt{x+1}<2$ ؛ إضافة نفس العدد -1 لا يغير إتجاه المتباينة

$-1<\sqrt{x+1}-1<1$ أي $\boxed{-1<f(x)<1}$.

6) ليكن $\gamma\in\mathbb{R}^*$ ؛ إيجاد قيمة γ حتى تنتمي النقطة $(\gamma^2+2\gamma;0)$ إلى (C_f) :

$(\gamma^2+2\gamma;0)\in(C_f)$ إذا و فقط إذا كانت

إحداثياها تحقق معادلة المنحنى (C_f) أي إذا و فقط إذا كان $\sqrt{\gamma^2+2\gamma+1}-1=0$ ؛ فنجد :

$\sqrt{\gamma^2+2\gamma+1}=1$ و بتربيع الطرفين نجد

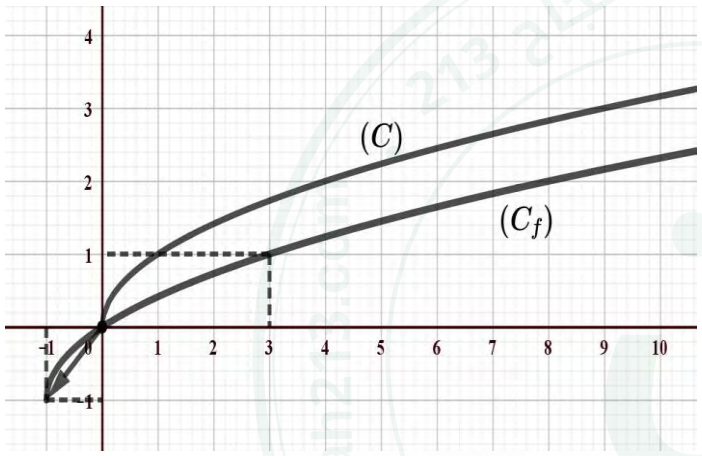
$\gamma^2+2\gamma+1=1$ أي $\gamma^2+2\gamma=0$ أي

$\gamma(\gamma+2)=0$ و منه نجد $\gamma=0$ أو $\gamma+2=0$

أي $\gamma=0$ مرفوض لأن $\gamma\in\mathbb{R}^*$ أو $\boxed{\gamma=-2}$ و

بالتالي النقطة $((-2)^2+2(-2);0)\in(C_f)$ أي

$(0;0)\in(C_f)$



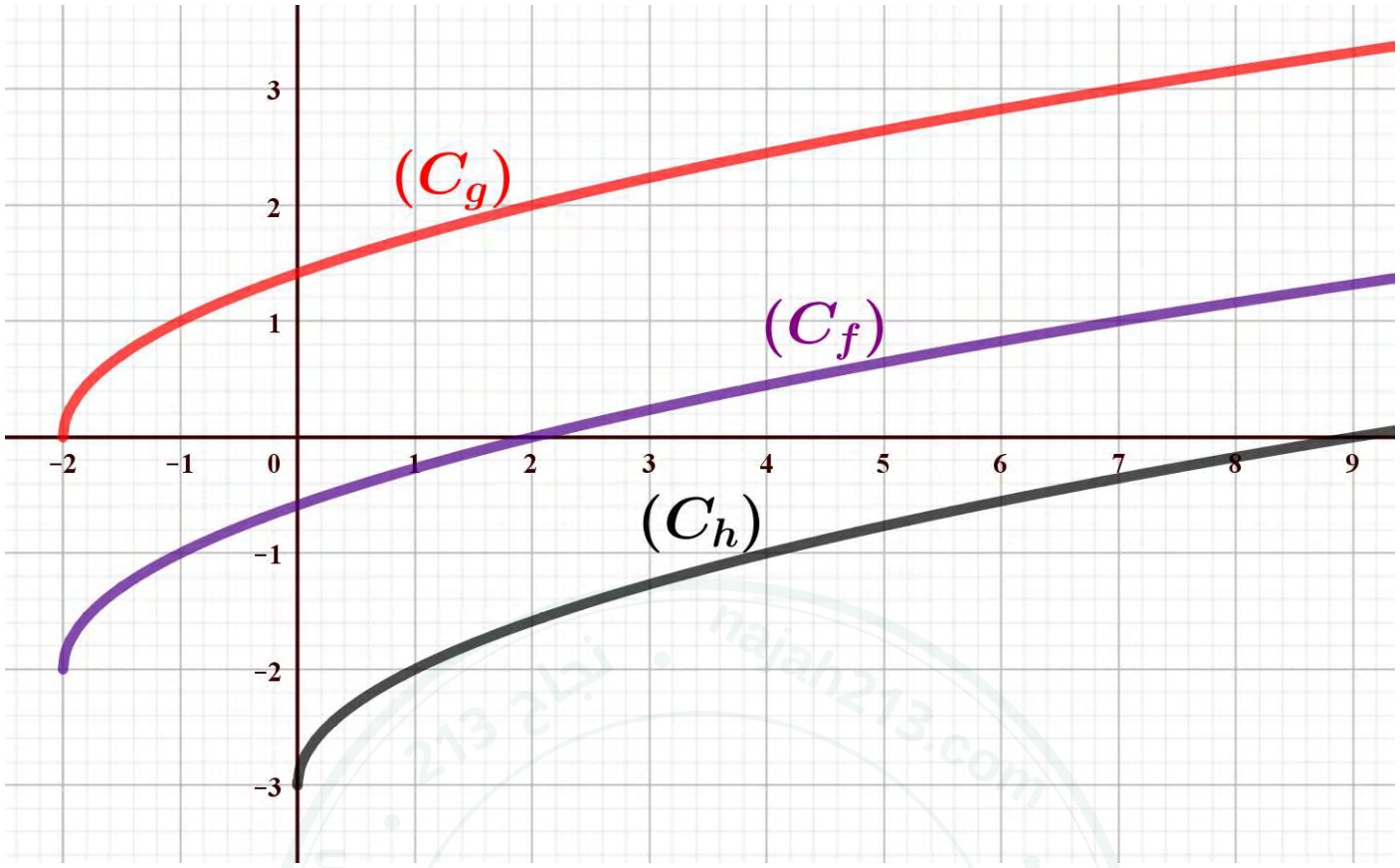
التمرين رقم 21 و الأخير :

(C_f) ، (C_g) و (C_h) صور لمنحنى دالة " الجذر التربيعي " بإنسحاب شعاعه $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ على الترتيب كما هو موضح في الشكل أدناه .

1) عين مركبتا الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$.

2) عين دستور كل من الدوال f ، g و h .

الشكل المرفق :



<u>حل التمرين رقم 21 و الأخير</u> :

1) تعيين مركبتا الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$:

مركبتا كل شعاع من هاته الأشعة تساوي إلى إحداثيي القيمة الحدية لكل دالة المعرفة بتمثيلها البياني (C_f) ، (C_g) و (C_h) :

- المنحنى (C_f) يقبل قيمة حدية صغرى عند النقطة التي إحداثياها $(-2;-2)$ ؛ إذن شعاع الإنسحاب هو $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$.
- المنحنى (C_g) يقبل قيمة حدية صغرى عند النقطة التي إحداثياها $(-2;0)$ ؛ إذن شعاع الإنسحاب هو $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$
- المنحنى (C_h) يقبل قيمة حدية صغرى عند النقطة التي إحداثياها $(0;-3)$ ؛ إذن شعاع الإنسحاب هو $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$

2) تعيين $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$:

- دستور الدالة f يكتب على الشكل :

$f(x)=\sqrt{x+a}+b$ حيث a و b عددان حقيقيان ثابتان و (C_f) صورة (C) منحنى دالة الجذر التربيعي

بإنسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$ ؛ إذن بالمساواة مع $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ نتحصل على : $\begin{cases}-a=-2\\b=-2\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=2\\b=-2\end{cases}$

و منه ينتج : $\boxed{f(x)=\sqrt{x+2}-2}$.

- دستور الدالة g يكتب على الشكل :

$g(x)=\sqrt{x+\alpha}+\beta$ حيث α و β عددان حقيقيان ثابتان و (C_g) صورة (C) منحنى دالة الجذر التربيعي

بإنسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ ؛ إذن بالمساواة مع $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ نتحصل على : $\begin{cases}-\alpha=-2\\\beta=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}\alpha=2\\\beta=0\end{cases}$

و منه ينتج : $\boxed{g(x)=\sqrt{x+2}}$.

- دستور الدالة h يكتب على الشكل :

$h(x)=\sqrt{x+\gamma}+\lambda$ حيث γ و λ عددان حقيقيان ثابتان و (C_h) صورة (C) منحنى دالة الجذر التربيعي

بإنسحاب شعاعه $\vec{w}\begin{pmatrix}-\gamma\\\lambda\end{pmatrix}$ ؛ إذن بالمساواة مع $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$ نتحصل على : $\begin{cases}-\gamma=0\\\lambda=-3\end{cases}$ أي $\begin{cases}\gamma=0\\\lambda=-3\end{cases}$

و منه ينتج : $h(x)=\sqrt{x+0}-3$ أي $\boxed{h(x)=\sqrt{x}-3}$.

