najah213.com · نجاح 213

المجاهد الحاج خيري الخير –مقرة–

السنة الدراسية : 2022 – 2023

الفرض الأول للثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

المستوى : ثالثة علوم تجريبية

المدة : ساعة

التمرين الأول:

f ، g ، h و k دوال معرفة على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x}{(x-4)^4}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\text{ ، }g(x)=\frac{x}{(x-1)^4}\text{ ، }h(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\text{ و }k(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

1) بيّن أنه من أجل كل $x>1$ فإن: $g(x)=\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^4}$.

2) استنتج عبارة $G(x)$ حيث G دالة أصلية للدالة g على المجال $]1;+\infty[$.

3) أُحسب $k'(x)$ من أجل كل x من $]1;+\infty[$.

4) عيّن دالة أصلية للدالة h على المجال $]1;+\infty[$.

5) أوجد دالة أصلية F للدالة f على $]1;+\infty[$.

6) استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على $]1;+\infty[$ والتي تنعدم عند 2.

التمرين الثاني:

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بـ: $U_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\frac{1}{2-U_n}$.

(W_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $W_n=\frac{n}{n+1}$.

1) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n=W_n$.

2) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة بـ: $V_n=\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

أُحسب S_n بدلالة n حيث $S_n=V_1+V_2+\ldots+V_n$.

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

تصحيح الفرض المحروس في مادة الرياضيات :

التمرين الأول : f ، g ، h و k دوال معرفة على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x}{(x-4)^4}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ ،\ g(x)=\frac{x}{(x-1)^4}\ ،\ h(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ \text{و}\ k(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

1) نبيّن أنه من أجل كل $x>1$ فإن: $g(x)=\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^4}$: $\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^4}=\frac{x-1+1}{(x-1)^4}=\frac{x}{(x-1)^4}=g(x)$.

2) استنتاج عبارة $G(x)$ حيث G دالة أصلية للدالة g على المجال $]1;+\infty[$.

الدالة g مستمرة على المجال $]1;+\infty[$ فهي تقبل دالة أصلية: $G(x)=-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+C$ مع C ثابت حقيقي.

3) حساب $k'(x)$: الدالة k قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ولدينا : $k'(x)=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}{(x+\sqrt{x^2-1})}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

4) تعيين دالة أصلية للدالة h على المجال $]1;+\infty[$.

من السؤال السابق نلاحظ أنه من أجل كل $x>1$ فإن: $k'(x)=h(x)$ ومنه الدالة k أصلية للدالة h أي: $H(x)=k(x)+C$ مع C ثابت حقيقي.

5) تعيين دالة أصلية F للدالة f على $]1;+\infty[$: نلاحظ أن الدالة f تكتب من الشكل: $f(x)=g(x)+h(x)$ وعليه $F(x)=G(x)+k(x)+C$

ومنه $F(x)=-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$ ، مع C ثابت حقيقي.

6) استنتاج الدالة الأصلية F للدالة f على $]1;+\infty[$ والتي تنعدم عند 2 : معناه $F(2)=0$

ومنه $F(2)=-\frac{1}{2(2-1)^2}-\frac{1}{3(2-1)^3}+\ln\left(2+\sqrt{2^2-1}\right)+C=0$ إذن $-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\left(2+\sqrt{3}\right)+C=0$ ومنه $C=\frac{5}{6}-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

وعليه : $F(x)=-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\frac{5}{6}-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$.

التمرين الثاني : لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بـ: $U_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\frac{1}{2-U_n}$.

(W_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $W_n=\frac{n}{n+1}$.

1) نبرهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n=W_n$. نسمي الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n : $P(n):U_n=W_n$.

من أجل $n=0$ لدينا: $U_0=0$ و $W_0=\frac{0}{0+1}=0$ ومنه $U_0=W_0$ إذن $P(0)$ محققة.

نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل n عدد طبيعي كيفي أكبر من أو يساوي 0 ونبرهن صحة $P(n+1)$.

$P(n+1):U_{n+1}=W_{n+1}$.

لدينا: $U_{n+1}=\frac{1}{2-U_n}=\frac{1}{2-W_n}$ ومنه $U_{n+1}=\frac{1}{2-\frac{n}{n+1}}=\frac{n+1}{n+2}=\frac{(n+1)}{(n+1)+1}=W_{n+1}$

ومنه $P(n+1)$ محققة، وعليه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n=W_n$.

لتكن المتتالية (V_n) المعرفة بـ: $V_n=\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

2) ليكن S_n مجموع حدود متتابعة من المتتالية (V_n) حيث $S_n=V_1+V_2+\ldots+V_n$.

أ) حساب S_n بدلالة n.

لدينا : $V_n=\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\ln(n)-\ln(n+1)$ ومنه

www.dzexams.com

$$S_n=\ln(1)-\ln(2)+\ln(2)-\ln(3)+\ln(3)-\ln(4)+\ldots+\ln(n-1)-\ln(n)++\ln(n)-\ln(n-1)$$
$$=\ln(1)-\ln(n+1)=-\ln(n+1)$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com