najah213.com · نجاح 213

دراسة دالة عددية رقم 01

الجزء الأوّل :

لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x^4 - 4x - 3$.

1) أدرس تغيّرات الدالة g (تحسب النهايات عند $+\infty$ وَ $-\infty$) .

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّين بالضبط α وَ β ، حيث : $\alpha < 0 < \beta$.

ب) تحقّق أنّ : $-0,7 < \alpha < -0,69$ وَ $1,78 < \beta < 1,79$.

ج) عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثاني :

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـــ : $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^3 - 1}$ ، و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ وحدته $(2cm)$.

1) عيّن نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .

2) أ) عيّن الأعداد الحقيقية : a ، b ، c ، d ، e حيث : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx^2 + dx + e}{x^3 - 1}$ وَ $(x \neq 1)$.

ب) إستنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحني (C_f) يطلب تعيين معادلته .

ج) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x \neq 1$ يكون : $f'(x) = \dfrac{x^2 \times g(x)}{(x^3 - 1)^2}$.

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

ج) أعـط حصرا لكل من : $f(\alpha)$ وَ $f(\beta)$.

4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 .

5) أنشئ كلا من المماس (T) وَ (Δ) وَ المنحني (C_f) .

6) h هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـــ : $h(x) = \dfrac{x^4 + 1}{|x^3 - 1|}$.

أ) أكتب $h(x)$ دون رمز القيـمة المطلقة .

ب) إشرح كيف يتم إنشاء (C_h) المنحني الممثل للدالة h ، إنطلاقا من المنحني (C_f) .

ج) أنشئ المنحني (C_h) في نفس المعلم السابق .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

حل مختصر للدالة رقم 01

الجزء الأول :

لدينا الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^4 - 4x - 3$.

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$.

- الدالة المشتقة : الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $g'(x) = 4x^3 - 4$.

تكون : $4x^3 - 4 \geq 0$ إذا كان : $x^3 \geq 1$ ، و منه : $x \geq 1$. (أي تكون : $g'(x) \leq 0$ إذا كان : $x \leq 1$) .

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-6	↗	$+\infty$

2) أ) على المجال $]-\infty;1]$ الدالة g مستمرة و رتيبة ، و صورة هذا المجال هي $[-6;+\infty[$ وَ $0 \in [-6;+\infty[$

إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α ينتمي إلى $]-\infty;1[$.

بالمثل : المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد β من $]1;+\infty[$.

ب) نحسب : $g(-0,7) = \ldots.$ وَ $g(-0,69) = \ldots.$ ، نجد أنّ : $g(-0,69) < 0 < g(-0,7)$.

إذن : $-0,7 < \alpha < -0,69$.

نفس الشيء بالنسبة إلى β ، سنجد أنّ : $1,78 < \beta < 1,79$.

3) إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

x	0		α		β		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الجزء الثاني :

لدينا f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـــ : $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^3-1}$.

1) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{x^3} = -\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{x^4+1}{x^3-1} = -\infty \quad ، \quad \lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{x^4+1}{x^3-1} = +\infty .$$

2) أ) لدينا : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx^2+dx+e}{x^3-1}$ ، أي : $f(x) = \dfrac{ax^4 + -ax + bx^3 - b + cx^2 + dx + e}{x^3-1}$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \\ e = 1 \end{cases}$ ، أي : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d - a = 0 \\ e - b = 1 \end{cases}$ ، و منه : $f(x) = x + \dfrac{x+1}{x^3-1}$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ب) نعلم أنّ : $\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{x+1}{x^3-1} \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{x+1}{x^3-1} = 0 \end{cases}$ ، إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ج) الوضعية : ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$ ، أي : $f(x) - x = \dfrac{x+1}{x^3-1}$.

x	$-\infty$		-1		1	$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$+$	
x^3-1		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	‖	$+$
الوضعية	(C_f) يقع فوق (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(-1;1)$	(C_f) يقع تحت (Δ)	‖	(C_f) يقع فوق (Δ)

3) الدالة المشتقة : الدالة f قابلة للإشتقاق من أجل كل x يختلف عن 1 و دالتها المشتقة هي :

$f'(x) = \dfrac{4x^3(x^3-1) - 3x^2(x^4+1)}{(x^3-1)^2}$ ، أي : $f'(x) = \dfrac{x^2 \times \left[4x(x^3-1) - 3(x^4+1)\right]}{(x^3-1)^2}$ ، أي :

$f'(x) = \dfrac{x^2(4x^4 - 4x - 3x^4 - 3)}{(x^3-1)^2}$ ، أي : $f'(x) = \dfrac{x^2(x^4 - 4x - 3)}{(x^3-1)^2}$ ، و منه : $f'(x) = \dfrac{x^2 \times g(x)}{(x^3-1)^2}$.

و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة : $x^2 \times g(x)$ ، و هي موضحة في الجدول المقابل

x	$-\infty$		α		0		1		β	$+\infty$
x^2	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$g(x)$	$+$			$-$			$-$		$+$	
$x^2 \times g(x)$	$+$		$-$		$-$		$-$		$+$	

جدول التغيرات

x	$-\infty$		α		1		β	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	‖	↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ج) حصرا كل من $f(\alpha)$ وَ $f(\beta)$:

1) حصر $f(\alpha)$:

لدينا : $-0,7 < \alpha < -0,69$ ، أي : $0,23 < \alpha^4 < 0,240$ ، أي : $1,23 < \alpha^4 + 1 < 1,240 \ldots\ldots(1)$

وَ $-0,34 < \alpha^3 < -0,33$ ، أي : $-1,34 < \alpha^3 - 1 < -1,33$ ، أي : $\frac{1}{-1,34} < \frac{1}{\alpha^3 - 1} < \frac{1}{-0,33}$ ،

أي : $\frac{1}{1,33} < -\frac{1}{\alpha^3 - 1} < \frac{1}{0,34} \ldots\ldots(2)$

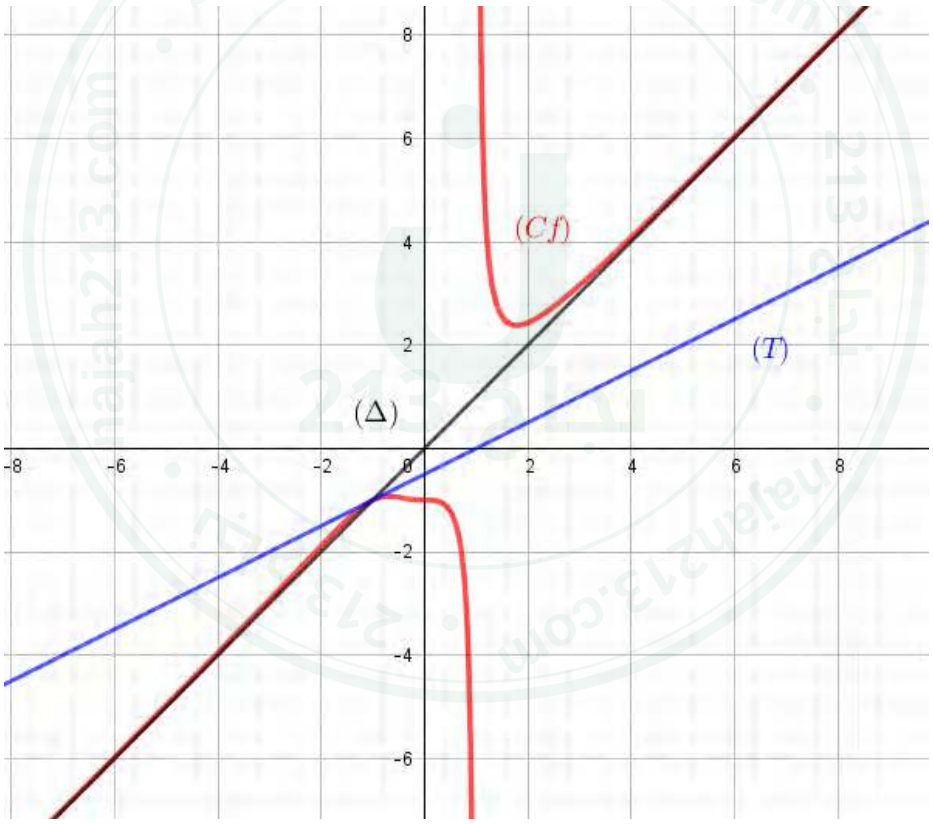
بضرب (1) وَ (2) نجد : $\frac{1,24}{1,33} < -\frac{\alpha^4 + 1}{\alpha^3 - 1} < \frac{1,23}{0,34}$ ، أي : $0,93 < -\frac{\alpha^4 + 1}{\alpha^3 - 1} < 0,92$ ،

و منه : $-0,92 < \frac{\alpha^4 + 1}{\alpha^3 - 1} < -0,93$ ، إذن : $-0,92 < f(\alpha) < -0,93$.

2) حصر $f(\beta)$: نفس الطريقة مثل حصر $f(\alpha)$ ، و نجد أنّ : $2,33 < f(\beta) < 2,42$.

4) معادلة المماس : $(T) : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ ، و منه : $(T) : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

5) الإنشـــاء :



6) لدينا : $h(x) = \frac{x^4 + 1}{|x^3 - 1|}$.

أ) كتابة الدالة h دون رمز القيمة المطلقة :

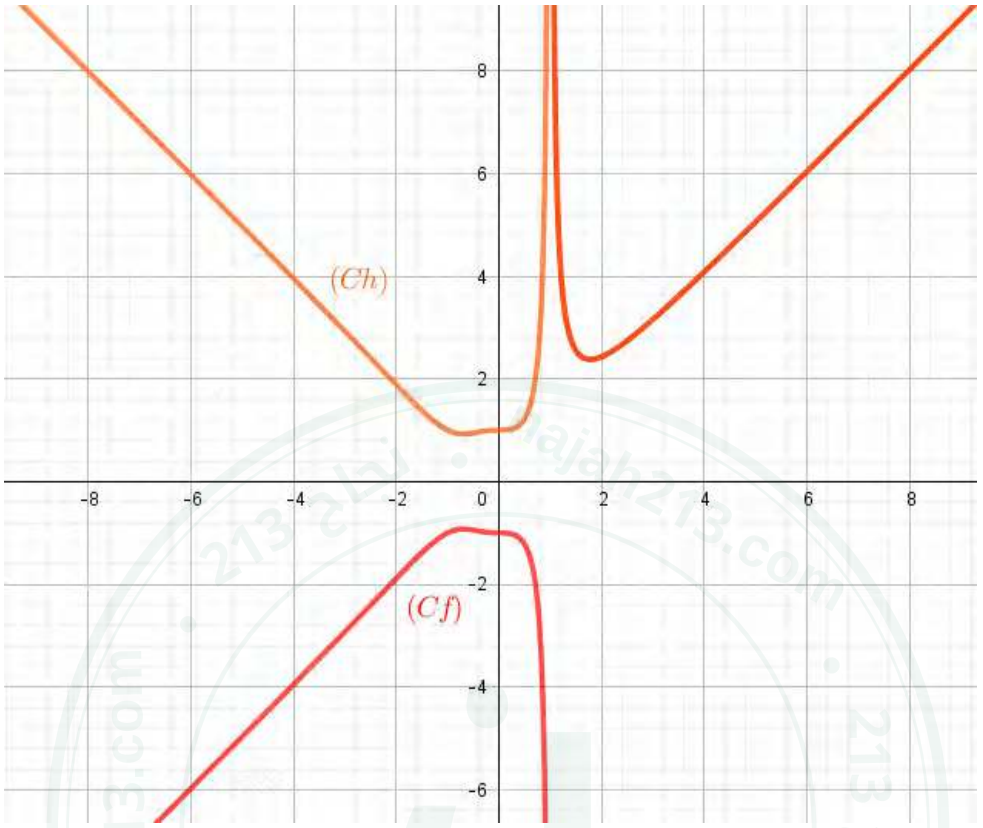
$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1} = f(x) \ldots\ldots\ldots (x > 1) \\ -\frac{x^4 + 1}{x^3 - 1} = -f(x) \ldots\ldots (x < 1) \end{cases}$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ب) (C_h) ينطبق على (C_f) على $]1;+\infty[$.

(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل على $]-\infty;1[$.

ج) الإنشـــاء :



كتابة الأستاذ : بوع

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

خاص بالنهائي شعبتي الرياضي و التقني رياضي — التحضير لبكالوريا 2019

دراسة دالة عددية رقم 02

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، وحدته $(5.cm)$.

نعتبر المنحني (C) الذي معادلته في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي : $x(x^2+y^2)+y^2-3x^2=0$.

1) نفرض الدالة f المعرّفة على $]-1;3[$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2(3-x)}{x+1}}$.

❖ بيّن أنّ المنحني (C) هو إتحاد المنحنيين (C_1) وَ (C_2) الممثلين للدالتين f وَ $-f$ على الترتيب .

2) أ) عيّن كلا من : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)}{x}$ وَ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{f(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج ؟ .

ب) فسّـــر النتائج هندسيا .

3) أحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$ ، مـــــاذا تستنتج ؟ .

4) أ) بـيّن أنّـه من أجل كل $x \in]-1;0[\cup]0;3[$ يكون : $f'(x)=\dfrac{3x-x^3}{(x+1)\sqrt{x^2(x+1)(3-x)}}$.

ب) إستـنـتج إشـــــارة $f'(x)$.

ج) أحســب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ ، ثـمّ فـسّـر النتيجة هندسيـاً .

د) شكّـــل جدول تغيّرات الدالة f .

5) أنشئ (C_1) ، ثمّ أكمل إنشـــاء المنحني (C) .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

حل مختصر للدالة العددية رقم 02

1) (C) هو المنحني الذي معادلته : $x(x^2+y^2)+y^2-3x^2=0$ ، أي : $x^3+xy^2+y^2-3x^2=0$ ، أي :

$y^2(x+1)=3x^2-x^3$ ، و منه : $y^2=\dfrac{3x^2-x^3}{x+1}$ ، إذن : $y=\sqrt{\dfrac{3x^2-x^3}{x+1}}$ أو $y=-\sqrt{\dfrac{3x^2-x^3}{x+1}}$ ، أي :

$y=\sqrt{\dfrac{x^2(3-x)}{x+1}}$ أو $y=-\sqrt{\dfrac{x^2(3-x)}{x+1}}$ ، و منه : $y=f(x)$ أو $y=-f(x)$ مع $x\in\left]-1;3\right]$.

و عليه نقول أنّ (C) هو إتحاد المنحنيين (C_1) وَ (C_2) الممثلين للدالتين f وَ $-f$ على الترتيب .

2) أ) تعيين النهايات :

❖) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x^2(x+1)}{x+1}}}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{x\sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}=\sqrt{3}$.

❖) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x^2(3-x)}{x+1}}}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{-x\sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}-\sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}=-\sqrt{3}$.

نستنتج أنّ الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 0 .

ب) **التفسير الهندسي** : نقول أنّ المنحني (C_1) يقبل عند النقطة $O(0;0)$ نصفي مماسين (T_1) وَ (T_2) معامل توجيههما $\sqrt{3}$ وَ $-\sqrt{3}$ على الترتيب ، والنقطة O هي نقطة زاوية .

3) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x^2(3-x)}{x}}-0}{x-3}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}x\times\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}}\times\dfrac{1}{x-3}$ ، أي :

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}x\times\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}}\times\dfrac{-1}{3-x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}x\times\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}}\times\dfrac{-1}{(\sqrt{3-x})^2}$ ، و منه :

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}\dfrac{-x}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{3-x})}=-\infty\begin{cases}-3\\0^+\end{cases}$.

❖) نستنتج أنّ الدالة f لا تقبل الإشتقاق على يسار 3 وَ المنحني (C_1) يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة $(3;0)$

4) حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{\dfrac{(6x-3x^2)(x+1)-(3x^2-x^3)}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{3x^2-x^3}{x+1}}}=\frac{6x^2+6x-3x^3-3x^2-3x^2+x^3}{(x+1)^2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{x+1}{3x^2-x^3}}$$

أي : $f'(x)=\dfrac{-2x^3+6x}{(x+1)^2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x^2-x^3}}=\dfrac{2(-x^3+3x)}{(\sqrt{x+1})^4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x^2-x^3}}$ ، أي :

$$f'(x)=\frac{-x^3+3x}{(\sqrt{x+1})^3}\times\frac{1}{\sqrt{3x^2-x^3}}=\frac{-x^3+3x}{(x+1)\sqrt{x+1}}\times\frac{1}{\sqrt{3x^2-x^3}}=\frac{3x-x^3}{(x+1)\sqrt{(x+1)(3x^2-x^3)}}$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

و منه : $f'(x) = \dfrac{3x - x^3}{(x+1)\sqrt{x^2(x+1)(3-x)}}$ ، و هو المطلوب .

ب) نلاحظ أنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $(3x - x^3)$:

لدينا : $3x - x^3 = x(3 - x^2) = x(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$. سنلخص الإشارة في الجدول التالي :

❖ ممكن دراسة الإشارة على $\mathbb{R}$ ، ثم في جدول التغيرات نأخذ الإشارة فقط على D_f .

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$-\sqrt{3}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3 - x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$(3x - x^3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

ج) حساب النهاية :

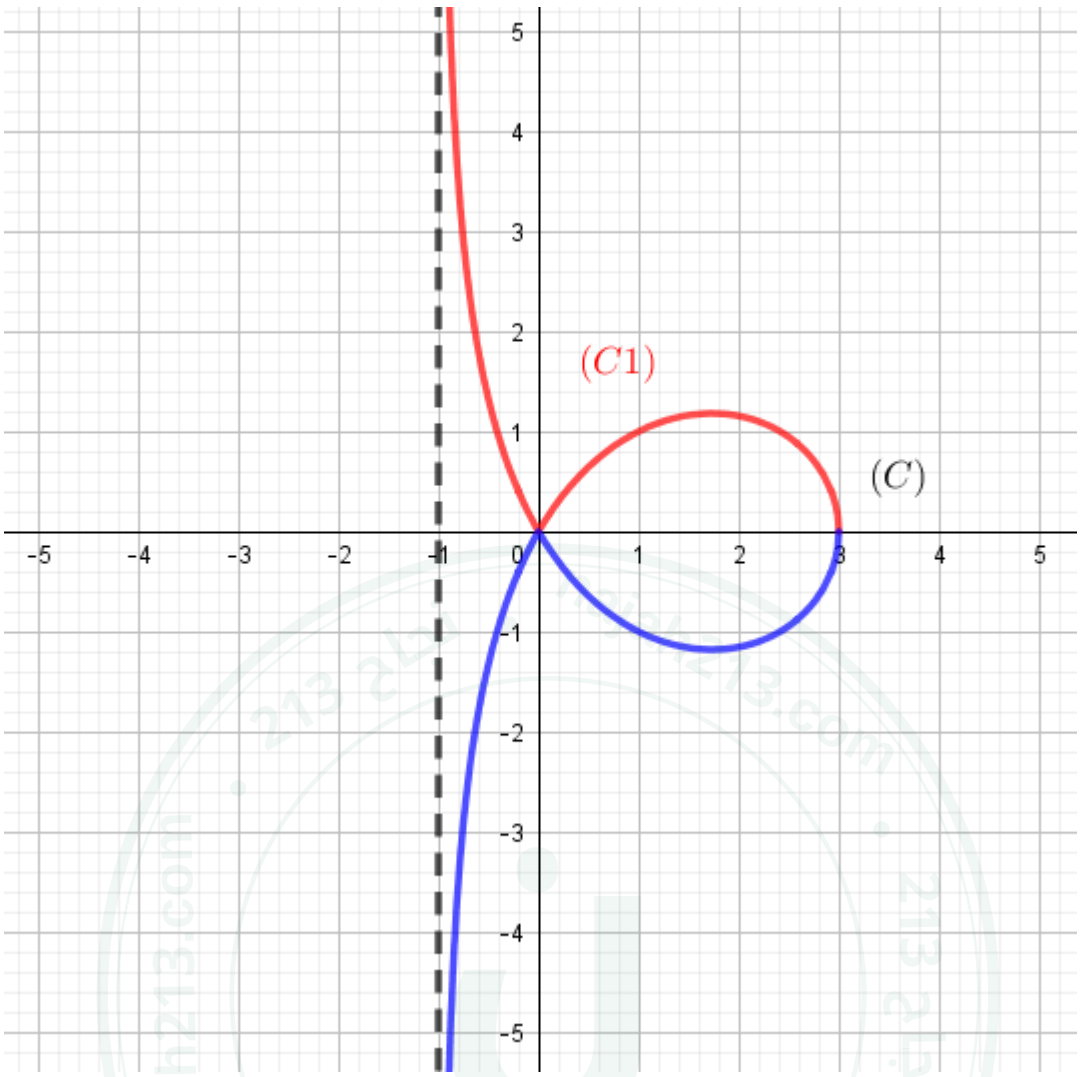
$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = +\infty \begin{cases} 2 \\ 0^+ \end{cases}$ ، و منه المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_1) .

د) جدول تغيرات الدالة f :

x	-1		0		$\sqrt{3}$		3
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$1,5$	↘	0

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

5) الإنشـــاء :



كتابة الأستاذ : ب.ع

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

دراسة دالة عددية رقم 03

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{-x^3-2x^2+7x+12}{(x+2)^2}$.

و ليكن (C_f) المنحني الممثّل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) أحسب نهاياتٍ الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .

ب) فسّر هندسيا النهاية عند -2 .

2) أ) عيّن الأعداد الحقيقية : a ، b ، c ، d بحيث من أجل كل x يختلف عن -2 تكون :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}+\frac{d}{(x+2)^2} \quad .$$

ب) إستنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$ وَ $-\infty$.

ج) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x\neq -2$ تكون : $f'(x)=\dfrac{(-x-1)(x^2+5x+10)}{(x+2)^3}$.

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

4) أ) أحسب : $f(-3)$ ، ثمّ حدّد نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

ب) حدّد أيضا نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور التراتيب .

5) أنشئ المنحني (C_f) .

6) m عدد حقيقي . عيّن قيم m حتّى يكون للمعادلة : $f(x)=m$ ثلاث حلول سالبة .

7) g هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=f(|x|)$.

أ) بيّن أنّ الدالة g زوجية .

ب) إشرح كيف يتم إنشاء المنحني (C_g) إنطلاقاً من المنحني (C_f) .

ج) أنشئ المنحني (C_g) في نفس المعلم السابق .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

حل مختصر للدالة رقم 03

1) أ) حساب نهايات الدالة f :

❖) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$.

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$.

❖) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=-\infty\begin{cases}-2\\0^+\end{cases}$ ، ❖) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=-\infty\begin{cases}-2\\0^+\end{cases}$.

ب) **التفسير الهندسي** : المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=-2$.

2) أ) $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}+\dfrac{d}{(x+2)^2}=\dfrac{ax(x+2)^2+b(x+2)^2+c(x+2)+d}{(x+2)^2}$ ، أي :

$f(x)=\dfrac{ax^3+4ax^2+4ax+bx^2+4bx+4b+cx+2c+d}{(x+2)^2}$ ، بالمطابقة نجد :

و منه : $\begin{cases}a=-1\\4a+b=-2\\4a+4b+c=7\\4b+2c+d=12\end{cases}$ ، إذن : $\begin{cases}a=-1\\b=2\\c=3\\d=-2\end{cases}$ ، $f(x)=-x+2+\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{2}{(x+2)^2}$.

ب) بما أنّ : $f(x)=-x+2+\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{2}{(x+2)^2}$ وَ $\lim\limits_{|x|\to\infty}(\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{2}{(x+2)^2})=0$.

إذن يوجد مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) معادلته : $y=-x+2$: (Δ) بجواري $-\infty$ وَ $+\infty$.

ج) دراسة الوضعية :

ندرس إشارة الفرق : $f(x)-(-x+2)=\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{2}{(x+2)^2}=\dfrac{3x+4}{(x+2)^2}$.

x	$-\infty$	-2	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$
$\dfrac{3x+4}{(x+2)^2}$	$-$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) عند النقطة $(\frac{-4}{3};\frac{10}{3})$	(C_f) يقع فوق (Δ)

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

3) أ) حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(-3x^2-4x+7)(x+2)^2-2(x+2)(-x^3-2x^2+7x+12)}{(x+2)^4}$$ ، أي :

$$f'(x)=\frac{(x+2)\left[(-3x^2-4x+7)(x+2)-2(-x^3-2x^2+7x+12)\right]}{(x+2)^4}$$ ، أي :

$$f'(x)=\frac{-3x^3-6x^2-4x^2-8x+7x+14+2x^3+4x^2-14x-24}{(x+3)^3}$$ ، أي :

$$f'(x)=\frac{-x^3-6x^2-15x-10}{(x+3)^3}$$ ، بملاحظة أنّ : $(-x-1)(x^2+5x+10)=-x^3-6x^2-15x-10$

و منه : $f'(x)=\frac{(-x-1)(x^2+5x+10)}{(x+2)^3}$ ، و هو المطلوب .

ب) ❖) جدول الإشارة :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$-x-1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x^2+5x+10$		$+$		$+$		$+$	
$(x+2)^3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

ملاحظة : (إشارة $(x+2)^3$ من إشارة $x+2$ ، و إشارة $x^2+5x+10$ هي نفس إشارة a لأنّ : $\Delta<0$) .

❖) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\|\|$ $-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

4) أ) $f(-3)=0$ ، لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل نحل المعادلة : $f(x)=0$ ،

أي : $-x^3-2x^2+7x+12=0$ ، بما أنّ : $f(-3)=0$ فإنّ : -3 هو جذر لـ $(-x^3-2x^2+7x+12)$ ،

إذن : $-x^3-2x^2+7x+12=(x+3)(ax^2+bx+c)$ ، أي :

$-x^3-2x^2+7x+12=ax^3+bx^2+cx+3ax^2+3bx+3c$ ، أي :

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a=-1 \\ b+3a=-2 \\ c+3b=7 \\ 3c=12 \end{cases}$ ، و منه : $\begin{cases} a=-1 \\ b+3a=1 \\ c=4 \end{cases}$ ،

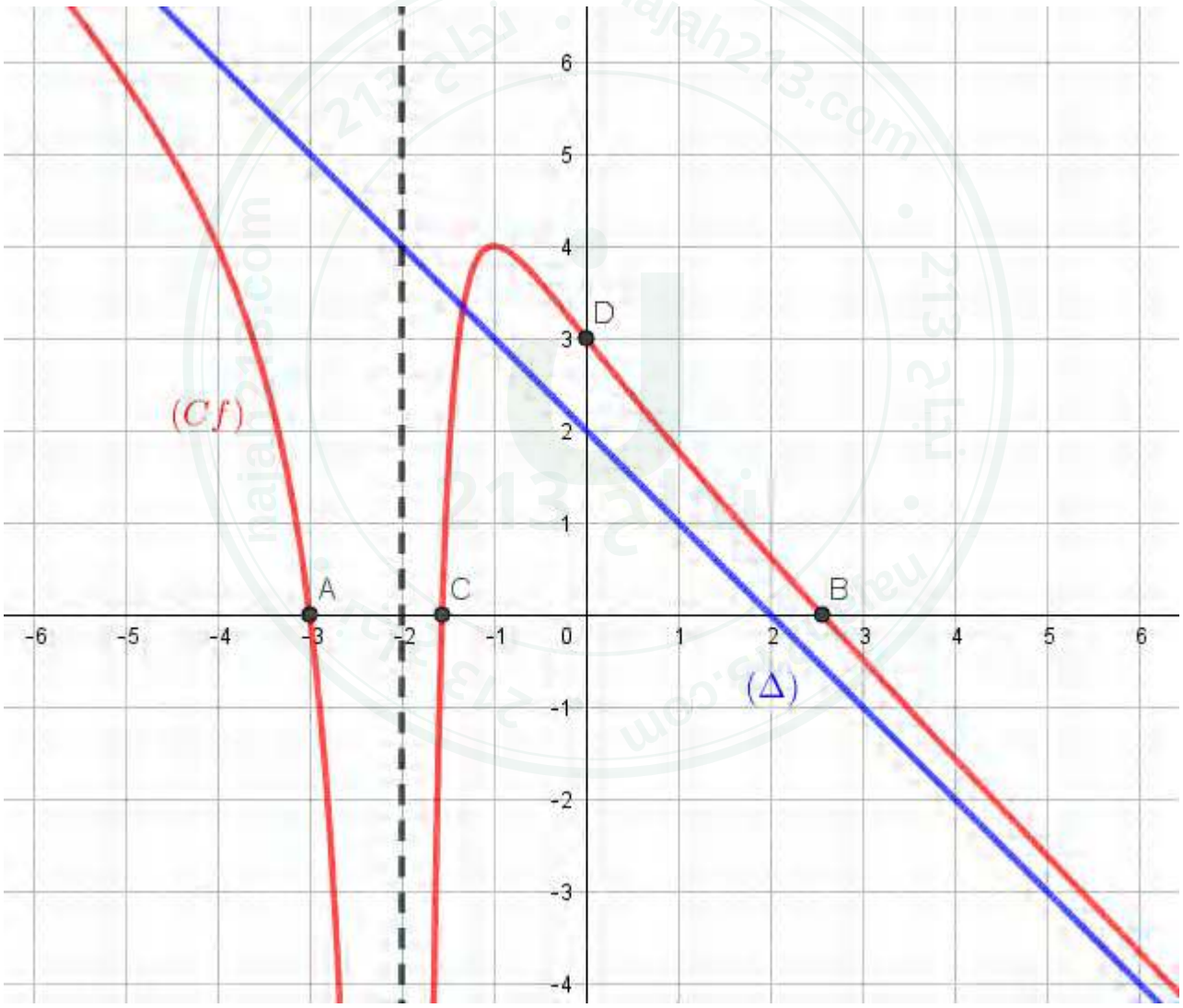
إذن : $-x^3-2x^2+7x+12=(x+3)(-x^2+x+4)$.

إما : $\begin{cases} x+3=0 \\ x=-3 \end{cases}$ ، أو : $-x^2+x+4=0$ ، أي : $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{-2}$ وَ $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{-2}$.

و منه : (C_f) يقطع حامل محور الفواصل عند : $A(-3;0)$ ، $B(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};0)$ وَ $C(\dfrac{1-\sqrt{17}}{2};0)$.

ب) إيجاد نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب ، أي نحسب : $f(0)=3$ ، و منه النقطة : $D(0;3)$.

5) الإنشـــــاء :



6) المعادلة : $f(x)=m$ ، تقبل ثلاث حلول سالبة لمـــا : $3<m<4$ ، (أنظر الإنشاء) .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

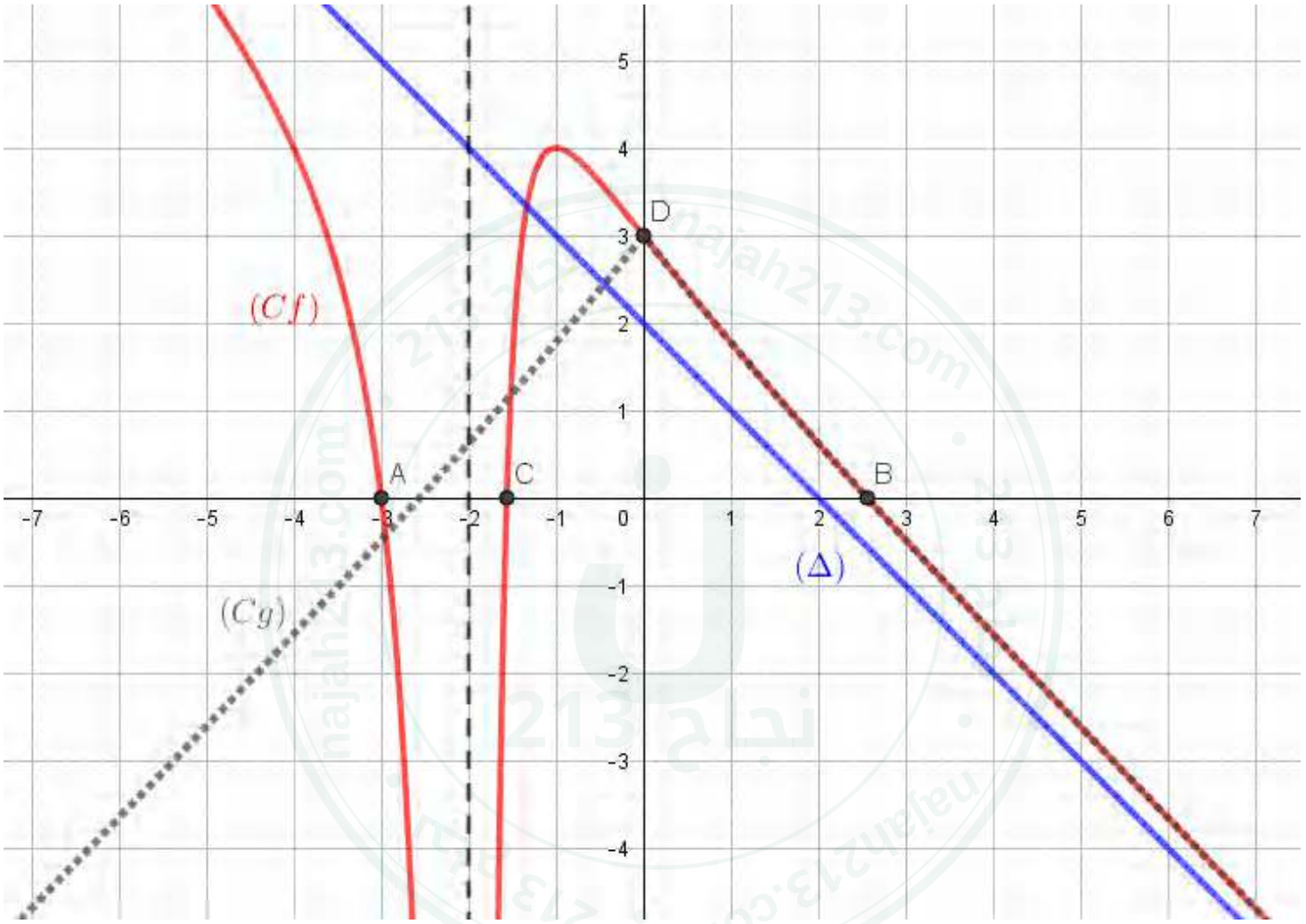
7) لدينا : $g(x)=f(|x|)$.

أ) إثبات أن الدالة g زوجية : $g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=g(x)$ ، إذن g زوجية .

ب) ❖ إذا كان : $x\geq 0$ فإنّ : $|x|=x$ ، و منه : $g(x)=f(x)$ ، إذن : (C_g) ينطبق على (C_f) في المجال $[0;+\infty[$

❖ ثم ننشئ (C_g) بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب لأنّ الدالة g زوجية .

ج) الإنشـــــاء :



كتابة الأستاذ : ب.ع

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

خاص بالنهائي شعبتي الرياضي و التقني رياضي — التحضير لبكالوريا 2019

دراسة دالة عددية رقم 04

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x} \quad ....;x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2} \quad ....;x > 0 \end{cases}$.

وَ ليكن (C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ وَ $-\infty$ ، ثمّ فسّر بيانياً النتيجة عند $-\infty$.

2) أدرس إستمرارية الدالة f عند 0 .

3) أ) أحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{f(x)}{x}$. ماذا يمكن القول بالنسبة للدالة f ؟ . وَ ما هو التفسير الهندسي لهذه النتيجة ؟ .

ب) بيّن أنّه من أجل كل x من $]-\infty;0[$ تكون : $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-2x} \times (\sqrt{x^2-2x} - x + 1)}$ ،

وَ من أجل كل x من $]0;+\infty[$ تكون : $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2 \times (x+2)}{x^3}$.

ج) شكّـل جدول تغيّرات الدالة f .

4) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x - 3$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

5) بيّن أنّ المنحني (C) يقبل نقطة إنعطاف A يطلب تعيين إحداثياها .

6) أنشئ المستقيمات المقاربة وَ المنحني (C) .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

حل مختصر للدالة رقم 04

لدينا : $\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x} \ \ .....; x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2} \ \ ....; x > 0 \end{cases}$

1) حساب النهايات :

❖) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x + \sqrt{x^2 - 2x} \right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x + \sqrt{x^2 - 2x} \right] \times \dfrac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x - \sqrt{x^2 - 2x}}$ ، أي :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - (x^2 - 2x)}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x - \sqrt{x^2(1 - \frac{2}{x})}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x + x\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}$ ، $(\sqrt{x^2} = -x; x \leq 0)$

و منه : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x\left[1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}\right]} = 1$ ، إذن : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

❖) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x-1)^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = +\infty$.

2) دراسة إستمرارية الدالة f عند 0 :

لدينا : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{(x-1)^3}{x^2} = -\infty \begin{cases} -1 \\ 0^+ \end{cases}$ ، $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) \end{cases}$ ، إذن : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) \neq f(0)$.

و منه نقول أنّ الدالة f ليست مستمرة عند 0 .

3) أ) حساب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{x + \sqrt{x^2(1 - \frac{2}{x})}}{x} = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{x\left[1 - \sqrt{1 - \frac{2}{x}}\right]}{x} = -\infty$.

❖) إذن : نقول أنّ الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند 0 .

❖) **التفسير الهندسي :** المنحني (C) يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة $O(0;0)$.

ب) ❖) حساب $f'(x)$ على $]-\infty;0[$:

$f'(x) = 1 + \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = 1 + \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}} = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}} = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}} \times \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x} - (x-1)}{\sqrt{x^2 - 2x} - (x-1)}$

أي : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - (x-1)^2}{\sqrt{x^2 - 2x} \times \sqrt{x^2 - 2x} - x + 1} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2 - 2x} \times (\sqrt{x^2 - 2x} - x + 1)}$.

نلاحظ أنّه من أجل $x \in]-\infty;0[$ يكون : $\sqrt{x^2 - 2x} \times \sqrt{x^2 - 2x} - x + 1 > 0$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

و بالتالي ستكون : $f'(x) < 0$ ، أي أنّ الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;0[$.

❖) حساب $f'(x)$ على $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{3(x-1)^2 \times x^2 - 2x \times (x-1)^3}{x^4} = \frac{x(x-1)^2\left[3x - 2(x-1)\right]}{x^4} = \frac{x(x-1)^2 \times (x+2)}{x^4} \text{ ،}$$

و منه : $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2 \times (x+2)}{x^3}$.

نلاحظ أنّه من أجل $]0;+\infty[$: $f'(x) \geq 0$ ، (لأنّ : $f'(x)$ تنعدم من أجل $x = 1$) .

و منه : الدالة f متزايدة على $]0;+\infty[$.

ج) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↗		↗	$+\infty$
			$-\infty$				

توضيح مهم : الشيء الجديد بالنسبة للطلبة هو أنّ الدالة f معرفة عند 0 ، أي : $f(0) = 0$ ، لكن نهاية الدالة f على يمين 0 هي $-\infty$.

4) أ) نبيّن أنّ المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ ، أي :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-3) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x-1)^3}{x^2} - (x-3)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 1 - x^2(x-3)}{x^2}$$

أي : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-3) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x} = 0$.

و منه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

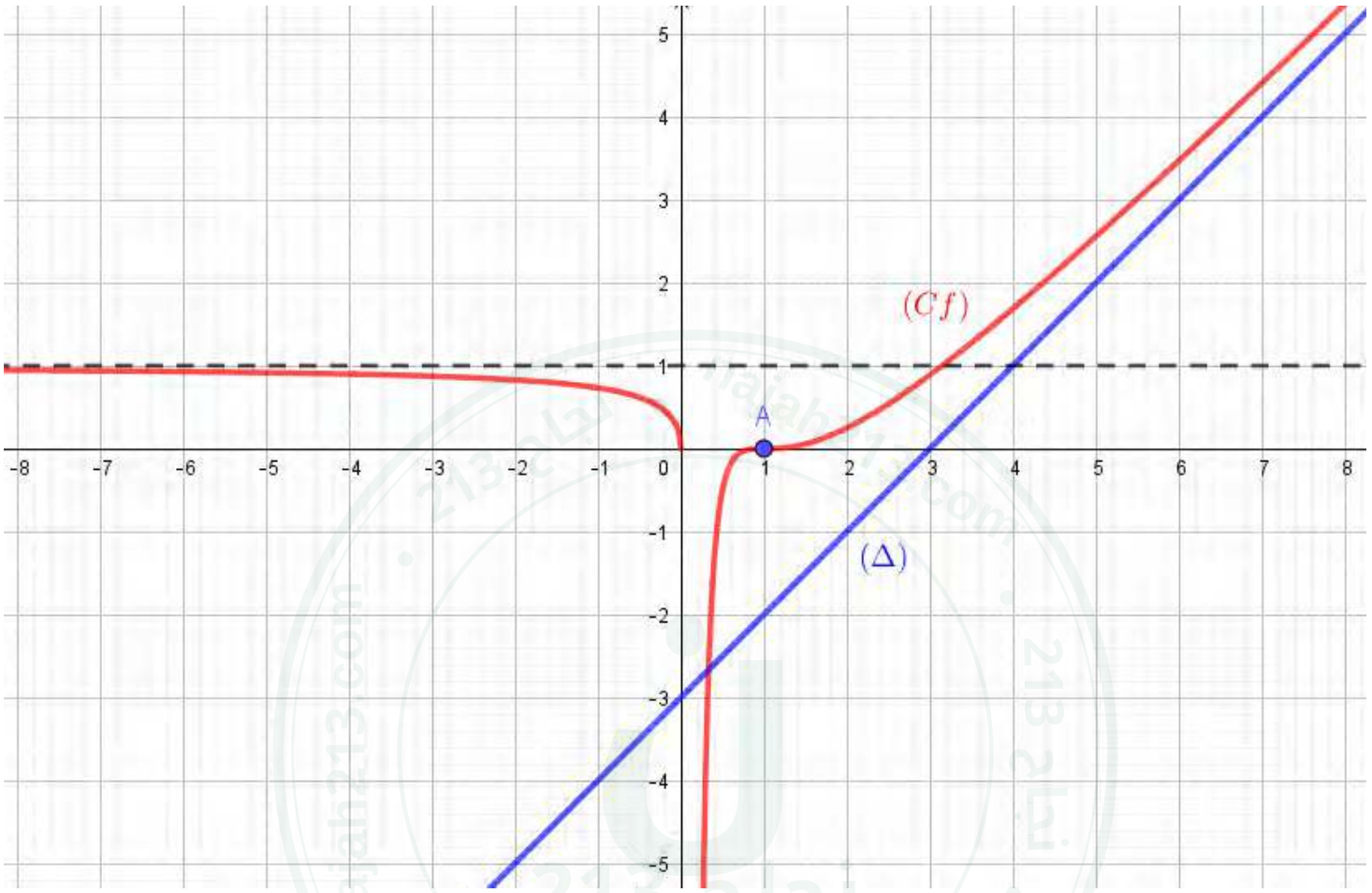
ب) الوضعية : أي ندرس إشارة $\dfrac{3x-1}{x^2}$ ، و منه الإشارة من إشارة $3x-1$

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية	‖	(C) يقع تحت (Δ)	(C) يقطع (Δ) عند النقطة $(\frac{1}{3};-\frac{8}{3})$	(C) يقع فوق (Δ)	

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

5) نلاحظ من خلال جدول التغيرات للدالة f أنّ الدالة f' تنعدم عند 1 و لا تغيّر إشارتها ،
إذن النقطة $A(1, f(1))$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C) ، أي : النقطة $A(1,0)$.

6) الإنشاء :



كتابة الأستاذ : ب.ع

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

دراسة دالة عددية رقم 05

الجزء الأوّل :

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - \sqrt{1+x^2}$.

وَ ليكن (C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسياً .

ب) بيّن أنّ المستقيم (d) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

2) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $\sqrt{1+x^2} - x > 0$.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

ج) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

3) أ) أنشئ المماس (T) وَ المنحني (C) .

ب) حل بيانياً المتراجحة : $f(x) > 2x - 1$.

ج) تحقّق أنّه من أجل كل $x > 0$ يكون : $x(1 + f(\frac{1}{x})) = 1 + f(x)$.

الجزء الثّاني :

لتكن الدالة g المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ بـ :

$$\begin{cases} g(x) = \tan x - \sqrt{1+\tan^2 x} \quad \text{.....} -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ g(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

و ليكن (Γ) هو المنحني الممثل للدالة g .

1) بيّن أنّ : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = g(\frac{\pi}{2})$.

2) أحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} g(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسياً .

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ يكون : $g(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos x}$.

ب) أدرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ أنشئ منحناها (Γ) في معلم آخر .

الجزء الثالث :

لتكن الدالة h المعرّفة على $]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} h(x) = x - \sqrt{1+x^2} \text{.....} \ x \leq 0 \\ h(x) = 2 - x - \sqrt{x^2 - 4x + 5} \ \text{.....} \ x \geq 2 \end{cases}$$

1) بيّن أنّ المستقيم الذي معادلته : $x = 1$ هو محور تناظر للمنحني (C_h) .

2) شكل جدول تغيّرات الدالة h .

3) أنشئ (C_h) في نفس معلم الدالة f .

المسألة مأخوذة من أحد كتب المغرب الشقيق مع تعديل يوافق المنهاج الجزائري

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

حل مختصر للدالة رقم 05

الجزء الأول :

1) أ) حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x-\sqrt{1+x^2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\times x+\sqrt{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}} = 0\begin{cases}-1\\+\infty\end{cases}$$

إذن المنحنى (C) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب بجوار $+\infty$.

ب) بيان أنّ المستقيم (d) مقارب مائل بجوار $-\infty$: أي نحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-2x = \lim\limits_{x\to-\infty} -x-\sqrt{1+x^2}$ ، أي :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x = (-x-\sqrt{1+x^2})\times\frac{-x+\sqrt{1+x^2}}{-x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{-1}{-x+\sqrt{1+x^2}} = 0\begin{cases}-1\\+\infty\end{cases}.$$

إذن المستقيم (d) مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

2) أ) بيان أنّ : $\sqrt{1+x^2}-x>0$ من أجل عدد حقيقي x ، نميّز حالتين :

❖) حالة $x\geq 0$ يكون : $\sqrt{1+x^2}-x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} > 0$.

❖) حالة $x<0$ يكون : $\sqrt{1+x^2}-x>0$. و منه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $\sqrt{1+x^2}-x>0$.

ب) حساب f' : $f'(x) = 1-\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = 1-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}} > 0$.

و منه : الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

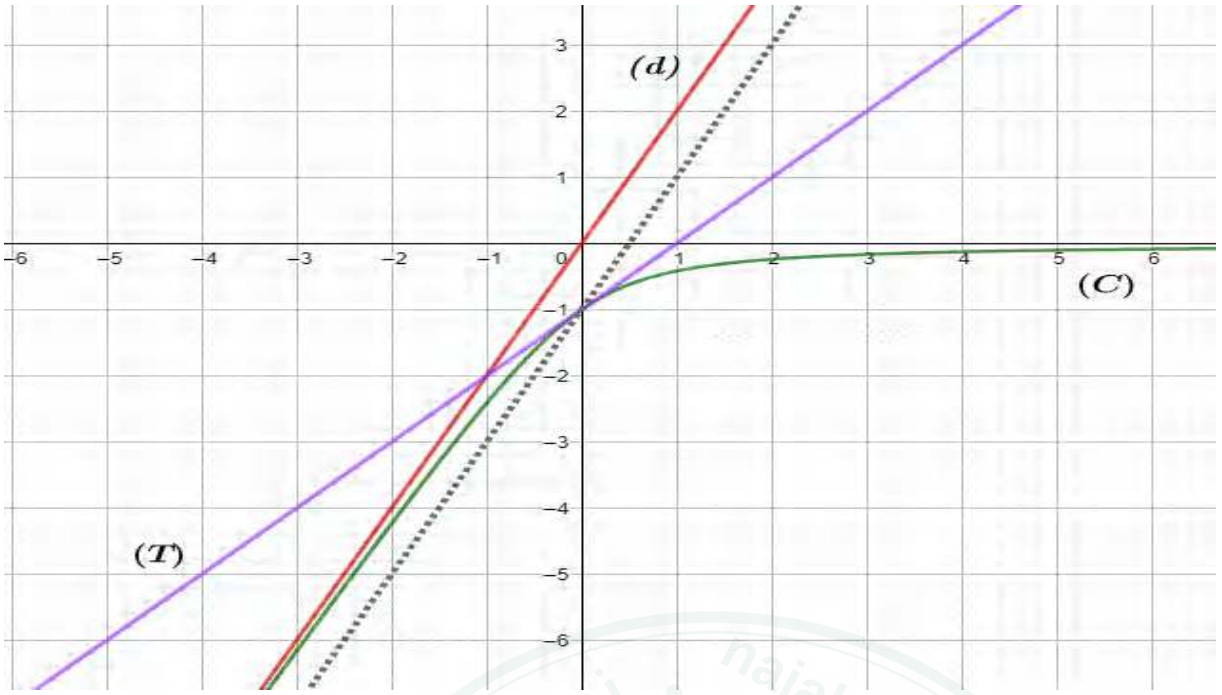
❖) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0

ج) معادلة المماس : $(T): y = f'(0)(x-0)+f(0)$ ، و منه : $(T): y = x-1$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

3) أ) الإنشاء :



ب) حل المتراجحة : $f(x) > 2x-1$ (الحلول هي المجالات التي يكون فيها المنحني (C) فوق المستقيم ذو المعادلة $(y = 2x-1)$ إذن : $S =]-\infty;0[$.

ج) من أجل كل $x > 0$ يكون : $x(1+f(\frac{1}{x})) = x(1+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}) = x+1-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = x+1-x\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}$

أي : $x(1+f(\frac{1}{x})) = x+1-\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x} = x-\sqrt{x^2+1}+1 = f(x)+1$ ، $(\sqrt{x^2} = x \ldots..;x>0)$.

الجزء الثاني :

1) بيان أنّ : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = g(\frac{\pi}{2})$.

لدينا : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} f(\tan x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \left[\tan x - \sqrt{1+\tan^2 x}\right] = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x)$ ، أي :

و منه : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = 0$ ، أي : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = g(\frac{\pi}{2})$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \tan x = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty \begin{cases} 1 \\ 0^+ \end{cases} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$ ،

2) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} g(x)$:

أي : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} f(\tan x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} g(x)$ ، أي : $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} \tan x = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty \begin{cases} -1 \\ 0^+ \end{cases} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$.

و منه : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} g(x) = -\infty$ ، إذن : المستقيم ذو المعادلة $x = -\frac{\pi}{2}$ مقارب عمودي للمنحني (C) .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

3) أ) لدينا : $g(x)=\tan x-\sqrt{1+\tan^2 x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sqrt{1+\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2}=\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sqrt{\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}$ ، أي :

$g(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\dfrac{\sin x}{\cos x}-\dfrac{1}{\cos x}$ ، و منه : $g(x)=\dfrac{\sin x-1}{\cos x}$.

(**توضيح : بما أنّ** $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ **فإنّ :** $\cos x>0$ ، **أي :** $\sqrt{\cos^2 x}=\cos x$) .

ب) **دراسة تغيرات الدالة** g :

❖) **حساب** $g'(x)$:

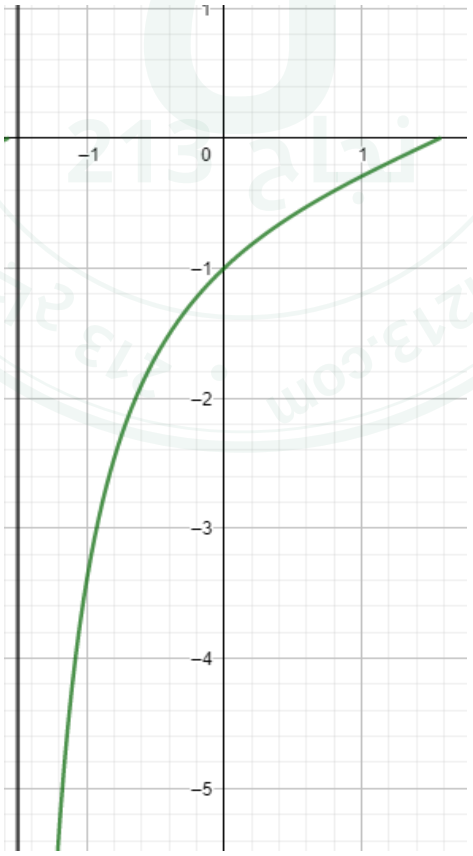
$g'(x)=\dfrac{\cos x\times\cos x-(-\sin x)(\sin x-1)}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x-\sin x}{\cos^2 x}=\dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$.

نعلم أنّ : $1-\sin x>0$ **من أجل كل** $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ ، **إذن : الدالة** g **متزايدة تماما على** $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

❖) **جدول التغيرات :**

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ 0	‖

❖) **الإنشاء :**



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

الجزء الثالث :

1) **أوّلاً نلاحظ أنّ** D_h **متناظرة بالنسبة إلى** 1 **، ثانياً نحسب :** $h\ \ 2-x$ **في الحالتين ، أي :**

❖) **حالة** $2-x \leq 0$ **:**

$$h(2-x) = 2-x-\sqrt{1+(2-x)^2} = 2-x-\sqrt{1+4+x^2-2x} = 2-x-\sqrt{x^2-2x+5} = h(x)$$

❖) **حالة** $2-x \geq 2$ **:**

$$h(2-x) = 2-(2-x)-\sqrt{(2-x)^2-4(2-x)+5} = x-\sqrt{x^2+1} = h(x)\ .$$

إذن : من أجل كل x **من** $]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$ **يكون :** $h(2-x) = h(x)$

و منه : المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ **محور تناظر للمنحنى** (C_h) **.**

2) **تشكيل جدول تغيرات الدالة** h **:**

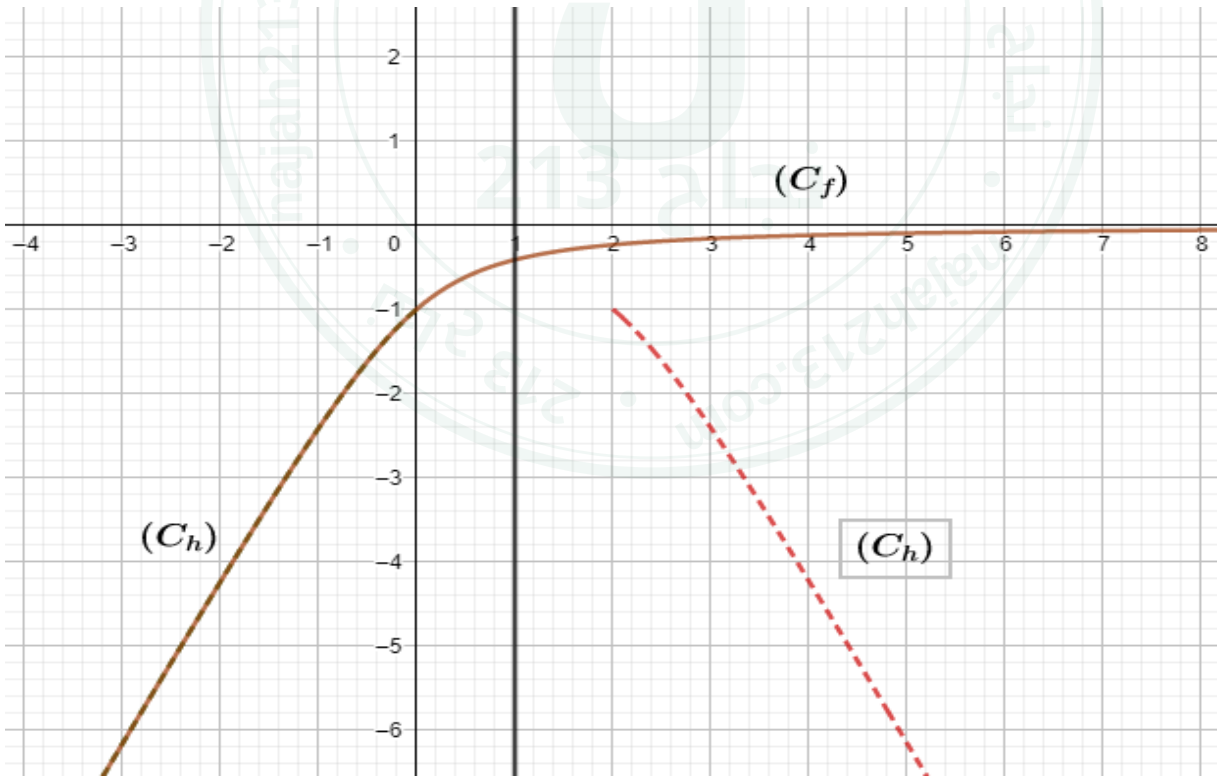
❖) **لدينا على المجال** $]-\infty;0]$ **:** $h(x) = f(x)$ **.**

❖) **على المجال** $[2;+\infty[$ **نكمل جدول التغيرات بالحفاظ على قيم** $f(x)$ **و نغير إتجاه الدالة** f **، لأنّ المنحنى** (C_h) **يناظر المنحنى** (C) **بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة** $x = 1$ **.**

❖) **جدول التغيرات على المجال** $[2;+\infty[$

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	-1 ↘	$-\infty$

3) **إنشاء** (C_h) **:**



كتابة الأستاذ : ب.ع

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

خاص بالنهائي شعب علمية — التحضير لبكالوريا 2019

دراسة دالة عددية (مثلثية) رقم 06 +07

المسألة رقم 01 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\sin 3x-3\sin x$ ، و ليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) بيّن أنّ الدالة f دورية و دورها هو 2π .

2) أدرس شفعية الدالة f ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) .

3) أ) قارن بين $f(x)$ وَ $f(\pi-x)$. فسّر النتيجة هندسياً .

ب) إستنتج مما سبق مجالا لدراسة الدالة f .

4) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x تكون : $f'(x)=-6\sin x\times\sin 2x$.

5) أدرس تغيّرات الدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

6) أنشئ المنحني (C_f) على $[-2\pi;2\pi]$.

المسألة رقم 02 :

f دالة معرّفة على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ بـــ : $f(x)=x.\tan x$.

1) أدرس شفعية الدالة f .

2) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها .

3) بيّن أنّه من أجل كل x من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ تكون : $f'(x)=\frac{2x+\sin 2x}{2\cos^2 x}$.

4) أ) نعتبر الدالة g المعرّفة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ كما يلي : $g(x)=2x+\sin 2x$.

❖) أدرس تغيّرات الدالة g على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

ب) إستنتج تغيّرات الدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

5) شكّل جدول تغيّرات الدالة f على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

6) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند ذات الفاصلة $\frac{\pi}{4}$.

7) أ) أنشئ (T) و المنحني (C_f) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

ب) ماهو عدد حلول المعادلة (E) ، حيث : $(E):\tan x=\frac{1}{x}$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

حل المسألة 01

لدينا : $f(x)=\sin 3x-3\sin x$.

1) إثبات أنّ f دورية ، و دورها 2π : أي نحسب $f(x+2\pi)$.

$f(x+2\pi)=\sin 3(x+2\pi)-3\sin(x+2\pi)=\sin(3x+6\pi)-3\sin(x+2\pi)$ ، أي :

$f(x+2\pi)=\sin 3x-3\sin x$ ، و منه : $f(x+2\pi)=f(x)$.

إذن : الدالة f دورية و دورها 2π ، لهذا يمكن دراستها على مجال طوله 2π ، و ليكن المجال $[-\pi;\pi[$.

2) أ) شفعية الدالة f :

$f(-x)=\sin(-3x)-3\sin(-x)=-\sin 3x+3\sin x=-(\sin 3x-3\sin x)=-f(x)$.

و منه : الدالة f فردية ، إذن : المنحنى (C_f) يقبل المبدأ O كمركز تناظر .

❖) نستنتج أنّه يمكن أن ندرس الدالة f على المجال $[0;\pi[$.

3) أ) مقارنة $f(x)$ وَ $f(\pi-x)$ ، ثم تفسير النتيجة هندسياً :

$f(\pi-x)=\sin 3(\pi-x)-3\sin(\pi-x)=\sin(3\pi-3x)-3\sin(\pi-x)=\sin(2\pi+\pi-3x)-3\sin(\pi-x)$

أي : $\sin 3x-3\sin x$ ، $f(\pi-x)=\sin(\pi-3x)-3\sin(\pi-x)$ ، و منه : $f(\pi-x)=f(x)$.

إذن : كتفسير هندسي نقول أنّ المنحني (C_f) يقبل محور تناظر و هو المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{\pi}{2}$.

ب) نستنتج مما سبق أنّه يمكننا دراسة الدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

4) حساب $f'(x)$: $f'(x)=3\times\cos 3x-3\times\cos x=3(\cos 3x-\cos x)$.

تعلم أنّ : $\cos a-\cos b=-2\sin(\frac{a+b}{2})\times\sin(\frac{a-b}{2})$

أي : $f'(x)=3(\cos 3x-\cos x)=3(-2)\sin(\frac{3x+x}{2})\times\sin(\frac{3x-x}{2})$ ،

و منه : $f'(x)=-6\sin 2x\times\sin x$ ، و هو المطلوب .

5) دراسة تغيرات الدالة f :

لدينا على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ ، أي : $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ ، يكون : $0\le 2x\le\pi$ ، و منه : $\sin x\ge 0$ وَ $\sin 2x\ge 0$.

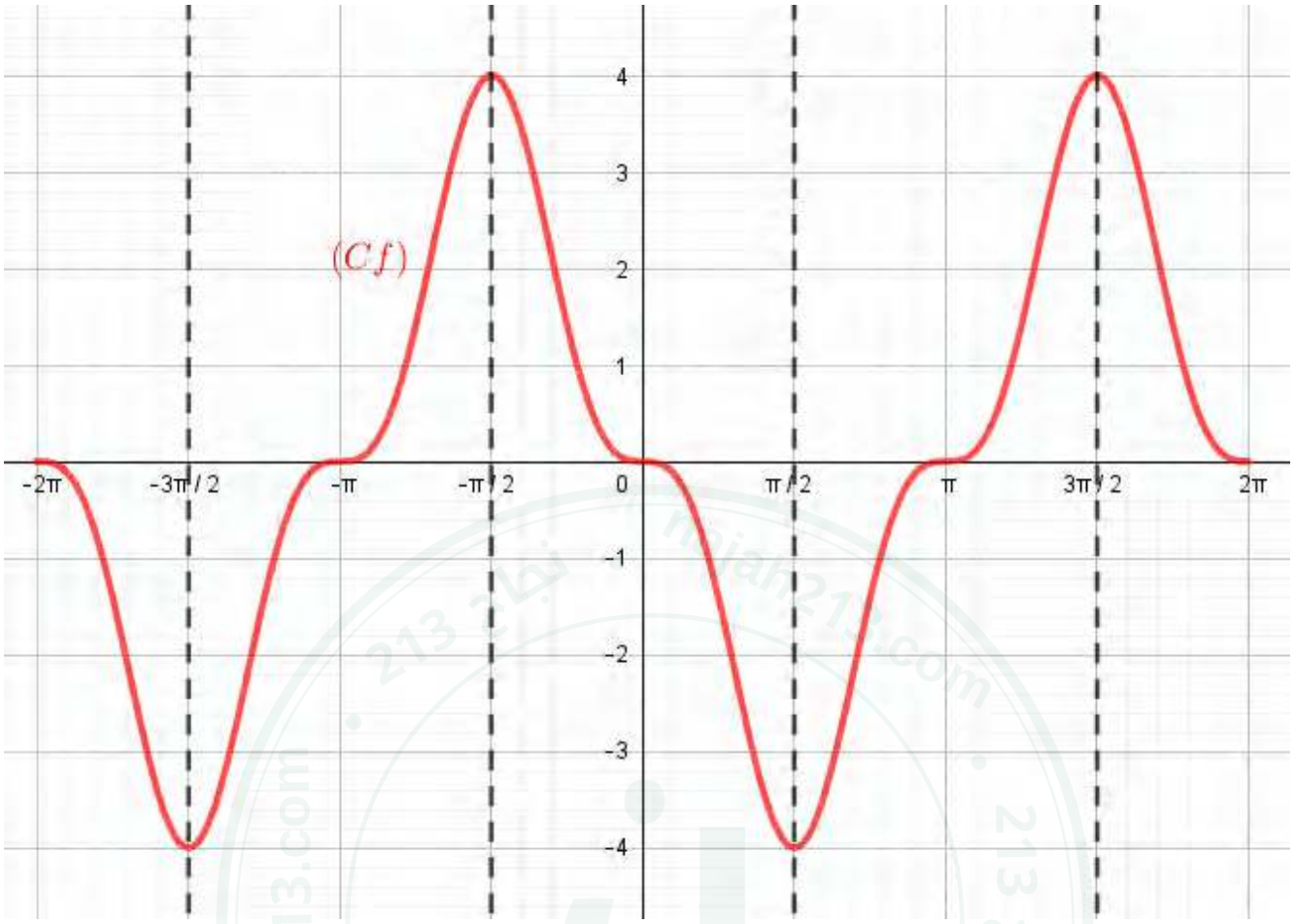
إذن : من أجل كل $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$: $f'(x)\le 0$ ، و بالتالي الدالة f متناقصة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

❖) جدول التغيرات :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	0	↘	-4

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

6) **الإنشاء :**



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

حل المسألة 02

لدينا : $f(x) = x.\tan x$.

1) دراسة شفعية الدالة f :

أولاً : نلاحظ أنّ 0 هو مركز لـ D_f .

ثانياً : $f(-x) = -x.\tan(-x) = -x \times -\tan x = x \times \tan x = f(x)$.

و منه الدالة f زوجية.

2) حساب النهايات :

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} x \times \tan x = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty$ **لأنّ :** $\begin{cases} -1 \\ 0^+ \end{cases}$.

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} x \times \tan x = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty$ **لأنّ :** $\begin{cases} 1 \\ 0^+ \end{cases}$.

3) حساب f' :

$f'(x) = 1 \times \tan x + \frac{1}{\cos^2 x} \times x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{x}{\cos^2 x}$ ، **أي :** $f'(x) = \frac{\sin x \times \cos x + x}{\cos^2 x}$ ،

(نضرب في 2 و نقسم على 2) نجد : $f'(x) = \frac{2\sin x \times \cos x + 2x}{2\cos^2 x}$ ، **(نعلم أنّ :** $\sin 2x = 2\sin x \times \cos x$ **)** ،

إذن : $f'(x) = \frac{\sin 2x + 2x}{2\cos^2 x}$ ، **و هو مطلوب .**

4) أ) دراسة تغيّرات الدالة g حيث : $g(x) = 2x + \sin 2x$.

❖) **الدالة المشتقة :** $g'(x) = 2 + 2.\cos 2x$.

نعلم أنّ : $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ ، **أي :** $-2 \leq 2.\cos 2x \leq 2$ ، **و منه :** $0 \leq 2 + 2.\cos 2x \leq 4$.

إذن نستنتج أنّ : $g'(x) \geq 0$ ، **و بالتالي : الدالة g متزايدة على المجال** $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

❖) **جدول التغيرات :**

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	$+$		
$g(x)$	0	↗	π

❖) **نلاحظ من جدول التغيرات أنّه من أجل كل** $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ **تكون :** $g(x) \geq 0$.

ب) **لدينا :** $f'(x) = \frac{g(x)}{2\cos^2 x}$ ، **بما أنّ :** $g(x) \geq 0$ **على** $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ، **إذن :** $f'(x) \geq 0$ **على** $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

و بالتالي : الدالة f متزايدة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

5) بما أنّ الدالة f زوجية، فستكون متناقصة على $\left]-\frac{\pi}{2};0\right]$، أي: جدول تغيرات الدالة f على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ يكون:

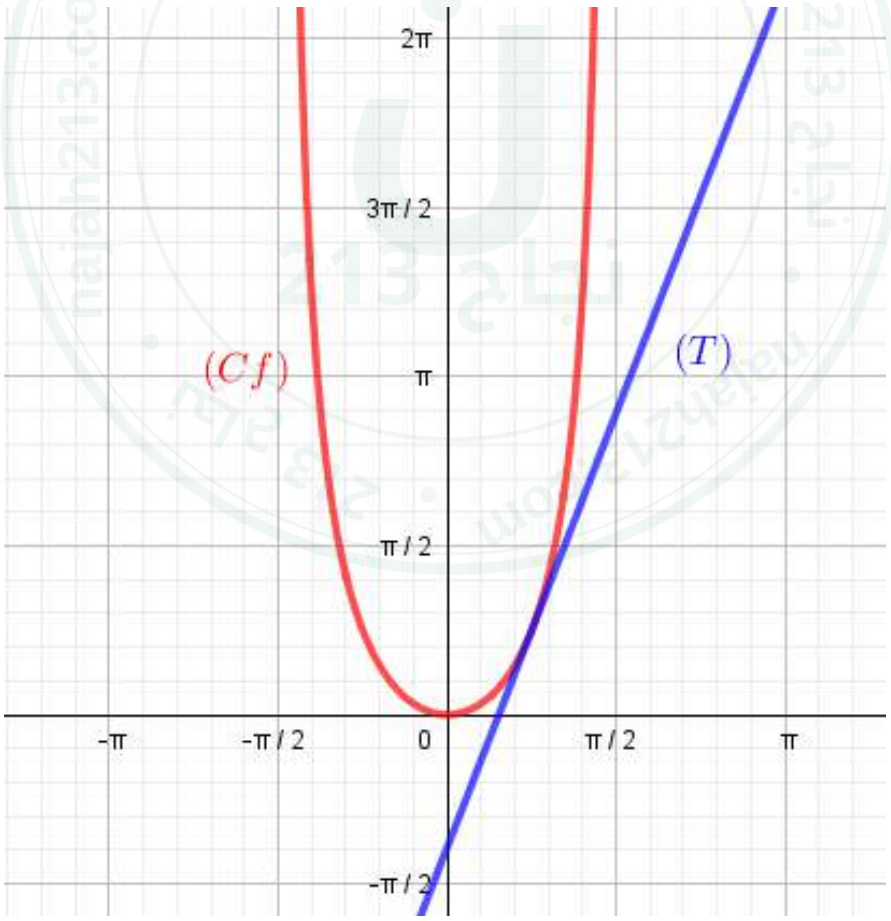
x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

6) كتابة معادلة (T) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\pi}{4}$:

❖) $(T): y=f'(\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{4})+f(\frac{\pi}{4})$، لدينا: $\begin{cases} f(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4} \\ f'(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}+1 \end{cases}$، أي: $(T): y=(\frac{\pi}{2}+1)(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}$،

أي: $(T): y=(\frac{\pi}{2}+1)x-\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}$، ومنه: $(T): y=(\frac{\pi}{2}+1)x-\frac{\pi^2}{8}$.

7) أ) الإنشاء:



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ب) عدد الحلول المعادلة : $(E) : \tan x = \frac{1}{x}$

أي : $(E) : x.\tan x = 1$ **، معناه :** $(E) : f(x) = 1$ **. و منه المعادلة تقبل حلين متمايزين .**

كتابة الأستاذ : ب.ع

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً