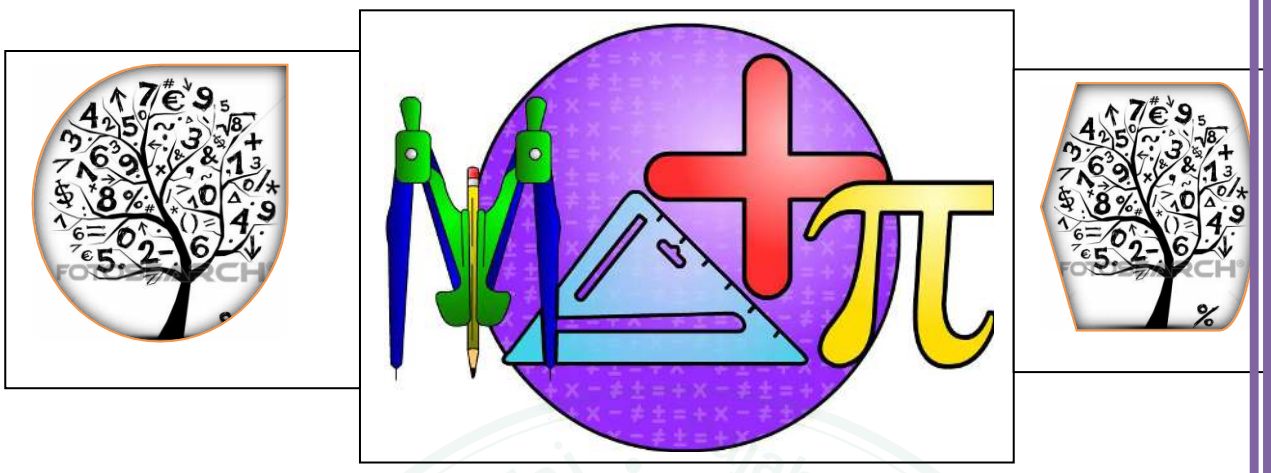
كـراريـس الـريـاضـيات



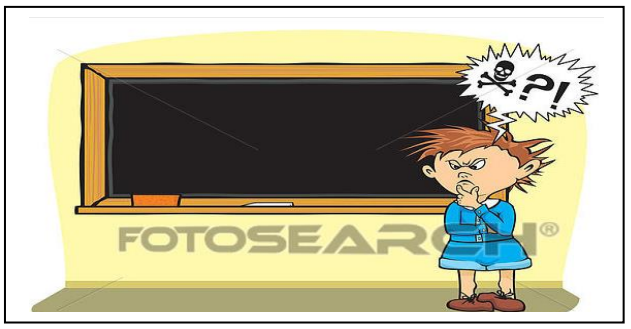
abdelhamidchih3@gmail.com

العلوم التجريبية

السنة الثالثة

تمارين مختارة في المتتاليات

إعداد الأستاذ : شيح عبد الحميد



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

تمرين 1 :

(u_n) هي المتتالية المعرّفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1} \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$$

نقبل أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n \succ 0$

ونعرّف المتتالية (v_n) بـ : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

1) برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها r وحدّها الأوّل v_0 .

2) عبّر عن v_n ثمّ عن u_n بدلالة n .

الحل :

1) نبرهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها r وحدّها الأوّل v_0 .

- نبيّن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = r$

لدينا : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$

$= \dfrac{1}{\frac{u_n}{u_n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ ← بتعويض u_{n+1} بقيمته

أي $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n+1}{u_n} - \dfrac{1}{u_n}$ أي $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n}{u_n}$

أي : $v_{n+1} - v_n = 1$ وهذا معناه :

(v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 1$.

- $v_0 = \dfrac{1}{u_0}$ أي $v_0 = 1$

ملاحظة : المتتالية (v_n) هي إذا متتالية الأعداد الطبيعية غير المعدومة .

2) التعبير عن v_n ثمّ عن u_n بدلالة n .

- (v_n) متتالية حسابية حدّها الأول v_0

وأساسها r :

عبارة حدّها العم معطاة بالعلاقة : $v_n = v_0 + n.r$

بالتعويض نجد : $v_n = n + 1$

- من العلاقة $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ ينتج : أي $u_n = \dfrac{1}{v_n}$

أي : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

تمرين 2 :

(u_n) هي المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{4u_n} \end{cases} .$$

ولتكن (v_n) المتتالية المعرفة في $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$

.

1)برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها r وحدّها الأوّل v_0 .

2) عبر عن u_n بدلالة n ثمّ استنتج نهاية المتتالية (u_n)

الحل:

1) نبرهن أنّ (v_n) متتالية حسابية.

من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - \frac{1}{2}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{4u_n} - \frac{1}{2}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{2u_n - 1}{4u_n}} - \frac{1}{\frac{2u_n - 1}{2}}$$

$$= \frac{4u_n}{2u_n - 1} - \frac{2}{2u_n - 1}$$

$$= \frac{4u_n - 2}{2u_n - 1}$$

$$= \frac{2(2u_n - 1)}{2u_n - 1}$$

إذا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - v_n = 2$

وبالتّالي (v_n) متتالية هندسية أساسها $r = 2$

وحدّها الأوّل $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - \frac{1}{2}}$ أي $v_0 = \dfrac{1}{3 - \frac{1}{2}}$

2) التعبير عن u_n بدلالة n ثمّ استنتاج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

من العلاقة $v_n = \dfrac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$ ينتج

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

- $u_n.v_n - \frac{v_n}{2} = 1$ أي $v_n\left(u_n - \frac{1}{2}\right) = 1$

$$v_n.u_n = \frac{v_n + 2}{2}$$ أي

وبالتالي : $u_n = \frac{v_n + 2}{2v_n}$ ... (*)

بما أنّ (v_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل $v_0 = \frac{2}{5}$

وأساسها $r = 2$ فإن عبارة حدّها العامّ هي :

$v_n = 2n + \frac{2}{5}$.

بتعويض v_n في العلاقة (*) نجد :

$$u_n = \frac{2n + \frac{2}{5} + 2}{2\left(2n + \frac{2}{5}\right)}$$ أي $$u_n = \frac{\frac{10n+12}{5}}{\frac{20n+4}{5}}$$

إذا من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ $u_n = \frac{5n+6}{10n+2}$.

- $\lim\limits_{n\to n\infty} u_n = \lim\limits_{n\to-\infty} \frac{5n+6}{10n+2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$ أي $= \frac{5}{10}$

تمرين 3 :

(u_n) هي المتتالية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 1 + \sqrt{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 4} \end{cases}$$.

نضع من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $v_n = (u_n - 1)^2$.

نقبل أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ 1$

1) برهن أنّ (v_n) متتالية حسابية.

2)جد عبارة الحد العام لكل من (v_n) و (u_n)

الحل :

1) نبرهن أنّ (v_n) متتالية حسابية.

لدينا ومن أجل كلّ عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - 1)^2 - (u_n - 1)^2$$

$$= \left(1 + \sqrt{u_n^2 - 2u_n + 4} - 1\right) - (u_n - 1)^2$$

$$= \left(\sqrt{u_n^2 - 2u_n + 4}\right)^2 - (u_n - 1)^2$$

$$= u_n^2 - 2u_n + 4 - u_n^2 + 2u_n + 1$$

$v_{n+1} - v_n = 5$.

إذا (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 5$ وحدّها الأوّل v_0 حيث: $v_0 = (u_0 - 1)^2$

$= 2$

2) إيجاد عبارة الحد العام لكل من (v_n) و (u_n) .

- (v_n) متتالية حسابية حدّها الأول v_0 وأساسها. r إذا :

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = v_0 + n.r$.

بالتعويض ينتج : $v_n = 5n + 2$.

- من العلاقة $v_n = (u_n - 1)^2$ نجد :

$u_n - 1 = \sqrt{v_n}$ أي $u_n = 1 + \sqrt{v_n}$

وبتعويض v_n بقيمته نجد : $u_n = 1 + \sqrt{5n+2}$

تمرين 4:

الأعداد الحقيقية a ؛ b و c حدود متعاقبة من متتالية حسابية متزايدة تماما في $\mathbb{N}$.

يعطى : $\begin{cases} 2a + 3b + c = 7 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 62 \end{cases}$

أحسب الأساس r لهذه المتتالية ثم استنتج الحدود a ؛ b و c

الحل :

- حساب الأساس r لهذه المتتالية .

الأعداد a ؛ b و c حدود متعاقبة .إذا :

$a = b - r$ و $c = b + r$.

بالتعويض ، الجملة المعطاة تكتب :

أي : $\begin{cases} 2(b-r) + 3b + (b+r) = 6 \\ (b-r)^2 + b^2 + (b+r)^2 = 62 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} 2b - 2r + 3b + b + r = 7 \\ b^2 + r^2 - 2br + b^2 + b^2 + r^2 + 2br = 62 \end{cases}$

$\begin{cases} 6b - r = 7 \quad \ldots (1) \\ 3b^2 + 2r^2 = 62 \ldots (2) \end{cases}$

من (1) نجد $b = \frac{r+7}{6}$ ... (3)

بالتعويض :

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

(2) يكافئ $3\left(\frac{r+7}{6}\right)^2+2r^2=62$

يكافئ $3\left(\frac{r^2+14r+49}{36}\right)+2r^2=62$

(2) يكافئ $\frac{r^2+14r+49+25r^2}{12}=62$

يكافئ $25r^2+14r+49-12\times62=0$

يكافئ $25r^2+14r-695=0$.

نحصل إذا على معادلة من الدرجة الثانية .

مميزها Δ هو :

$\Delta=14^2+69500$ أي $\Delta=69696$.

للمعادلة حلّان متمايزان r_1 و r_2 حيث :

$r_1=\frac{-14+\sqrt{69696}}{50}$ و $r_2=\frac{-14-\sqrt{69696}}{50}$

$=\frac{-14+264}{50}$ $=\frac{-14-264}{50}$

$r_1=5$ $r_2=-\frac{278}{50}$

بما أنّ (u_n) متتالية حسابية متزايدة فإن $r\succ0$.

إذا نأخذ $r=5$.

- حساب الحدود a ، b و c

من العلاقة (3) أي من العلاقة $b=\frac{r+7}{6}$

وبتعويض

r بقيمته نجد : $b=2$.

في هذه الحالة :

$a=b-r$ و $c=b+r$

$=-3$ $=7$

تمرين 5 :

نعرّف المتتالية (w_n) بـ : $\begin{cases}w_0=2\\ w_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}w_n\end{cases}$

1) برّر أنّ (w_n) متتالية هندسية.

2) تحقّق أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$:

$w_n=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

الحل :

1) نبرّر أنّ (w_n) متتالية هندسية .

المتتالية (w_n) معرّفة بعلاقة من الشكل :

$w_{n+1}=q.w_n$.

تعريفا : المتتالية (w_n) هي إذا متتالية هندسية أساسها $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) نتحقّق أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$w_n=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (w_n) ذات الحد الأوّل w_0 والأساس q معطاة بالعلاقة :

$w_n=w_0.q^n$. بالتعويض :

$w_n=2\left(\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2.\sqrt{2}}\right)^n$ أي $w_n=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

$=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

تمرين 6:

(u_n) هي المتتالية المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n كما يلي : $\ln\left(3^n u_n\right)=n-1$.

1)برهن أنّ (u_n) متتالية هندسية .

2) أدرس رتابة ونهاية المتتالية (u_n) .

الحل

1) نبرهن أن (u_n) متتالية هندسية .

نبرهن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=q\times u_n$.

$\ln\left(3^n.u_n\right)=n-1$ يكافئ $\ln3^n+\ln u_n=n-1$

يكافئ $\ln u_n=n-1-\ln3^n$

يكافئ $u_n=e^{n-1-\ln3^n}$.

- في هذه الحالة : $u_{n+1}=e^{(n+1)-1-\ln3^{n+1}}$

$=e^{n-1+1-\ln3^n\times3}$

$u_{n+1}=e^{n-1+1-\ln3^n-\ln3}$

$=e^{(n-1-\ln3^n)+(1-\ln3)}$

$u_{n+1}=\frac{e}{3}.u_n$ أي $=e^{n-1-\ln3^n}\times e^{1-\ln3}$

إذا : من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{e}{3}.u_n$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

وبالتّالي (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{e}{3}$

وحدّها الأوّل $u_0=e^{0-1-\ln 3^0}$ أي $u_0=e^{-2}$.

2) دراسة رتابة ونهاية المتتالية (u_n) .

(u_n) متتالية هندسية أساسها q وحدّها الأوّل u_0

عبارة حدّها العام معطاة بالعلاقة: $u_n=u_0.q^n$.

بالتعويض نجد : $u_n=e^{-2}\times\left(\frac{e}{3}\right)^n$,$n\in\mathbb{N}$.

- $u_{n+1}-u_n=e^{-2}\left(\frac{e}{3}\right)^{n+1}-e^{-2}\left(\frac{e}{3}\right)^n$

$$=e^{-2}.\left(\frac{e}{3}\right)^n\left(\frac{e}{3}-1\right)$$

$$=e^{-2}\left(\frac{e}{3}\right)^n\left(-\frac{2e}{3}\right)$$

نلاحظ ما يلي :

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n\prec 0$.

المتتالية (u_n) هي إذا متناقصة تماما في $\mathbb{N}$.

- (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{e}{3}$

$-1\prec q\prec 1$ معناه (u_n) متقاربة وتتقارب نحو 0 .

أي : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

تمرين7 :

α عدد حقيقي يحقّق : $\alpha\neq -1$.

1) نعرّف في $\mathbb{N}$ المتتالية (u_n) بـ :

$$u_n=\frac{\alpha^2+n-1}{\alpha+1}$$

-أ) برهن أنّ المتتالية (u_n) متتالية حسابية يطلب حساب أساسها r وحدّها الأوّل u_0 بدلالة α .

-ب) نضع : $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$.

بيّن أنّ $S_n=\frac{n\left(n+2\alpha^2-3\right)}{2(\alpha+1)}$.

2) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $v_n=e^{u_n}$.

-أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية ثمّ أحسب بدلالة α اساسها q وحدّها الأوّل v_0 .

ب) P_n هو الجداء حيث : $P_n=v_0\times v_1\times...\times v_{n-1}$.

برهن أنّ $P_n=e^{S_n}$.

الحل

1) نبرهن أنّ المتتالية (u_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها r وحدّها الأوّل u_0 بدلالة α

من اجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{\alpha^2+(n+1)-1}{\alpha+1}-\frac{\alpha^2+n-1}{\alpha+1}$$

$$=\frac{\alpha^2+n-\alpha^2-n+1}{\alpha+1}$$

$$=\frac{1}{\alpha+1}$$

وبالتّالي :

المتتالية (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{\alpha+1}$

وحدّها الأول $u_0=\frac{\alpha^2-1}{\alpha+1}$ أي : $u_0=\frac{(\alpha+1)(\alpha-1)}{\alpha+1}$

$$u_0=\alpha-1$$

2)نبيّن أنّ $S_n=\frac{n(n+2\alpha-3)}{2(\alpha+1)}$

$$S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$$

S_n هو إذا مجموع n حدّا الأولى من المتتالية الحسابية (u_n) . وعليه : $S_n=\frac{n}{2}(u_0+u_{n-1})$

لدينا : $\begin{cases}u_0=(\alpha-1)\\ u_{n-1}=\frac{\alpha^2+n-2}{\alpha+1}\end{cases}$ بالتعويض نجد :

$$S_n=\frac{n}{2}\left(\alpha-1+\frac{\alpha^2+n-2}{\alpha+1}\right)$$

$$=\frac{n}{2}\left[\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)+\alpha^2+n-2}{\alpha+1}\right]$$

$$S_n=\frac{n\left(n+2\alpha^2-3\right)}{2(\alpha+1)}$$

2) – أ) نبين أنّ (v_n) متتالية هندسية .

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا

$v_{n+1}=e^{u_{n+1}}$ أي $v_{n+1}=e^{\frac{\alpha^2+(n+1)-1}{\alpha+1}}$

$$=e^{\frac{\alpha^2+n-1}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+1}}$$

$$=e^{\left(\frac{\alpha^2+n-1}{\alpha+1}\right)}\times e^{\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)}$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

إذا :
$$v_{n+1}=e^{\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)}\times v_n$$
المتتالية (v_n) هي إذا متتالية هندسية $q=e^{\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)}$
وحدّها الأوّل $v_0=e^{u_0}$ أي $v_0=e^{\alpha-1}$.

- ب) نبرهن أنّ $P_n=e^{S_n}$.

بما أنّ v_0 هو الحدّ الأول و q هو أساس المتتالية الهندسية (v_n) فإنّ عبارة حدها العام معطاة بالعلاقة: $v_n=v_0\times q^n$.
في هذه الحالة :
$v_1=v_0.q$ ؛ $v_2=v_0.q^2$ ؛ . . . ؛ $v_{n-1}=v_0.q^{n-1}$.
ينتج :
$$P_n=v_0\times v_1\times\ldots\times v_{n-1}$$
$$=v_0\times\left(v_0.q\right)\times\left(v_0.q^2\right)\times\ldots\times\left(v_0.q^{n-1}\right)$$
$$=\underbrace{\left(v_0\times v_0\times v_0\times\ldots\times v_0\right)}_{n\text{ مرّة}}\times\left(q\times q^2\times\ldots\times q^{n-1}\right)$$
$$=v_0^n\times q^{1+2+3+\ldots+(n-1)}$$
المجموع $(1+2+3+\ldots+n-1)$ هو مجموع $(n-1)$ حدّا متعاقبة من متتالية حسابية أساسها 1 وحدّها الأوّل 1 . إذا :
$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n-1}{2}(1+n-1)$$
$$=\frac{n(n-1)}{2}$$
في هذه الحالة : $P_n=v_0^n\times q^{\frac{n(n-2)}{2}}$
$$=\left(e^{\alpha-1}\right)^n\times\left(e^{\frac{1}{\alpha+1}}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$
$$=e^{n(\alpha-1)}\times e^{\frac{n(n-1)}{2(\alpha+1)}}$$
لدينا : $n(\alpha-1)+\frac{n(n-1)}{2(\alpha+1)}=\frac{2n\left(\alpha^2-1\right)+n(n-1)}{2(\alpha+1)}$
$$=\frac{n\left(2\alpha^2-2+n-1\right)}{2(\alpha+1)}$$
$$=\frac{2\left(n+2\alpha^2-3\right)}{2(\alpha+1)}$$
$$=S_n$$
وبالتّالي : $P_n=e^{S_n}$.

تمرين8:

(u_n) هي المتتالية المعرّفة في $\mathbb{N}$ كما يلي :
$$\begin{cases}u_0=4\\u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{9}{4}\end{cases}.$$
ولتكن (v_n) المتتالية المعرّفة كما يلي :
من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n=u_n+k$ حيث $k\in\mathbb{R}$
1) احسب v_{n+1} بدلالة u_n ثم بدلالة v_n
2) جد قيمة k حتى تكون (v_n) متتالية هندسية
3) جد بعد ذلك نهايتي (v_n) و (u_n)
(عن بكالوريا تجريبية مغربية)

الحل :

1) حساب v_{n+1} بدلالة u_n ثم بدلالة v_n
لدينا : $v_n=u_n+k$ وبالتالي : $v_{n+1}=u_{n+1}+k$
بتعويض u_{n+1} بقيمته نجد : $v_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{9}{4}+k$
بما أنّ $u_n=v_n-k$ فإنّ :
$$v_{n+1}=\frac{1}{4}(v_n-k)+\frac{9}{4}+k$$
$$=\frac{1}{4}v_n+\frac{9}{4}+\frac{3}{4}k\quad\ldots(1)$$
2) إيجاد قيمة k حتى تكون (v_n) متتالية هندسية.
(v_n) متتالية هندسية أساسها الثابت q
معناه
من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=q.v_n$
بالمطابقة مع الشكل (1) ينتج :
$\frac{9}{4}+\frac{3}{4}k=0$ يكافئ $3k+9=0$
يكافئ $k=-3$
خلاصة
من أجل $k=-3$ تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسة أساسها $q=\frac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0=u_0-3$
$=1$
2) إيجاد نهايتي (v_n) و (u_n) .
- (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$
إذا : $-1\prec\frac{1}{4}\prec1$: (v_n) متقاربة وتتقارب نحو 0 .
$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}(v_n-3)$$
$=-3$ (لأنّ $v_n\to0$)

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

تمرين 9:

(u_n) هي المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{3} \end{cases}$ و α عدد حقيقي.

نعرف في $\mathbb{N}$ المتتالية (v_n) بـ : $v_n = u_n + \alpha$.

1) ما هي قيمة α حتّي تكون (v_n) متتالية هندسية.

2) حدد بعد ذلك : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الحل :

1) نعين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية .

(v_n) متتالية هندسية معرّفة في $\mathbb{N}$) (

معناه

من اجل كل عدد طبيعي: $v_{n+1} = q \times v_n$ ... (1)

1. بالرجوع إلى تعريف المتتالية (v_n)

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha$$
$$= \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{3} + \alpha$$
$$= \frac{1}{2}(u_n + \alpha) - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\alpha$$
$$= \frac{1}{2}v_n - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\alpha$$

بالمطابقة مع (1) ينتج :

$-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\alpha = 0$ معناه (v_n)) متتالية هندسية (

$\alpha = \frac{4}{3}$ معناه

2) تحديد نهاية المتتالية (u_n)

نذكر: نهاية متتالية (u_n) هي نهاية حدها العام لما يؤول n إلى $+\infty$.

لدينا : $u_n = v_n - \alpha$ أي $u_n = v_n - \frac{4}{3}$.

بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأوّل $v_0 = u_0 + \frac{4}{3}$ اي $u_0 = \frac{5}{3}$ فإن :

$v_n = \frac{5}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ ومنه : $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$ (لان $\frac{4}{3} \succ 1$).

في هذه الحالة : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

تمرين 10:

لتكن (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$u_n = e^{3n+2}$

حيث يشير e إلي أساس اللوغاريتم النيبيري.

1) - أ)بين أنّ (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل .

هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ علّل.

ب) أدرس إتّجاه تغير المتتالية (u_n) .

2) نعرّف المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = \ln(u_n)$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب كتابة v_n بدلالة n .

ب) أحسب بدلالة n :

- المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$ ثمّ الجداء : $T_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_{n-1}$

الحل

1) – أ)نبين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

نبين ما يلي: من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = q.u_n$

لدينا وحسب تعريف المتتالية (u_n) :

$u_{n+1} = e^{3(n+1)+2}$ أي $u_{n+1} = e^{3n+5}$

$= e^3 \times e^{3n+2}$

$= e^3 \times u_n$

وبالتالي (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^3$ وحدها الأول $u_0 = e^2$.

✓ بما أن الأساس $q = e^3$ لهذه المتتالية يحقق $q \succ 1$ فإن هذه المتتالية متباعدة

ملاحظة 1 :

نلاحظ أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$

وعليه :

لإثبات أن (u_n) متتالية هندسية نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{3n+5}}{e^{3n+2}}$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{3n+5-(3n+2)}$

$= e^3$

ملاحظة 2 :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(e^{3n+2}\right)$

$= +\infty$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس في $\mathbb{N}$ إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}-u_n=e^{3n+5}-e^{3n+2}$$
$$=e^{3n+2}\left(e^3-1\right)$$

نلاحظ أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n\succ 0$

المتتالية (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما

ملاحظة :

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n\succ 0$

يكفي مقارنة النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع العدد 1

سبق وأن وجدنا : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=e^3\succ 1$

المتتالية (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما

2) – أ) نبين أنّ (v_n) متتالية حسابية يطلب كتابة عبارة حدها العام.

نبين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n $v_{n+1}-v_n=r$

لدينا : $v_{n+1}-v_n=ln\left(u_{n+1}\right)-ln\left(u_n\right)$

$$=ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$
$$=ln\left(e^3\right)$$

إذا : من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}-v_n=3$

وهذا يعني أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=3$

✓ عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية (v_n)

معطاة بالعلاقة : $v_n=v_0+n.r\ ;n\in\mathbb{N}$

بالتعويض نجد : $\begin{cases}v_0=ln\left(u_0\right)\ ;u_0=e^2\\ r=3\end{cases}$

$$v_n=3n+2\ ,\ n\in\mathbb{N}$$

ب) حساب بدلالة n :

- المجموع : $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$

S_n هو مجموع n حدا الأولى من المتتالية الحسابية (v_n) .وعليه :

ومنه $\begin{cases}v_0=2\\ v_{n-1}=3n-1\end{cases}$ حيث : $S_n=\frac{n}{2}\left(v_0+v_{n-1}\right)$

أي $s_n=\frac{n}{2}(2+3n-1)$ $S_n=\frac{n}{2}\left(3n+1\right)$

- الجداء T_n حيث : $T_n=u_0\times u_1\times...\times u_{n-1}$

T_n هو جداء n حدا الأولى من المتتالية الهندسية (u_n) .

لدينا : $u_1=u_0.q$ ؛ $u_2=u_0.q^2$ ؛ ... ؛ $u_{n-1}=u_0.q^{n-1}$

بالتعويض نجد :

$$T_n=u_0\times\left(u_0.q\right)\times\left(u_0.q^2\right)\times...\times\left(u_0.q^{n-1}\right)$$
$$=\underbrace{\left(u_0\times u_0\times...\times y_0\right)}_{n\text{ عاملا}}\times\left(q\times q^2\times...\times q^{n-1}\right)$$

إذا : $T_n=u_0{}^n\times q^{1+2+3+...+(n-1)}$

المجموع $\left(1+2+3+...+(n-1)\right)$ هو مجموع $(n-1)$ عددا طبيعيا الأولى وغير المعدومة.

هذه الأعداد تشكل حدود متعاقبة لمتتالية حسابية أساسها 1 وحدها الأول 1 .ومنه :

$$\left(1+2+3+...(n-1)\right)=\frac{n-1}{2}(1+n-1)$$
$$=\frac{(n-1)n}{2}$$

بالتعويض حيث : $u_0=e^2$ و $q=e^3$ نجد :

$T_n=e^{2n}\times\left(e^3\right)^{\frac{(n-1).n}{2}}$ أي $T_n=e^{\frac{n(3n+1)}{2}}$

تمرين 11

I) α عدد حقيقي .

نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases}v_0=\alpha\\ v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n+\frac{9}{4}\end{cases}$$

- جد قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية ثابتة .

II) نضع $\alpha=-3$

1) احسب الحدود v_1 ؛ v_2 و v_3 .

2) نعرّف في $\mathbb{N}$ المتتالية (u_n) بـ:. :

$u_n=v_n-3$.

أ) برهن أنّ (u_n) متتالية هندسية محددا أساسها وحدّها الأوّل.

ب) أكتب u_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) .

جـ) أحسب بدلالة n المجموع

$S_n=u_0+u_1+...+u_n$ ثمّ استنتج بدلالة n المجموع

$S'_n=v_0+v_1+...+v_n$

د) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

الحل

I) إيجاد قيمة α حتى تكون (v_n) ثابتة.

(v_n)متتالية ثابتة في $\mathbb{N}$

معناه

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = v_n = ... = v_0 = \alpha$$

من العلاقة $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{9}{4}$ وبالتعويض نجد :

$\alpha = \frac{1}{4}\alpha + \frac{9}{4}$ وبالتالي $\alpha = 3$.

II) 1) حساب الحدود v_1 ؛ v_2 و v_3

- $v_1 = \frac{1}{4}v_0 + \frac{9}{4}$ أي $v_1 = \frac{1}{4}(-3) + \frac{9}{4}$

$$v_1 = \frac{3}{2}$$

- $v_2 = \frac{1}{4}v_1 + \frac{9}{4}$ اي $v_2 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{9}{4}$

$$v_2 = \frac{21}{8}$$

- $v_3 = \frac{1}{4}v_2 + \frac{9}{4}$ اي $v_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{21}{8}\right) + \frac{9}{4}$

$$v_3 = \frac{93}{32}$$

ملاحظة:

ما الفائدة من حساب الحدود v_1 ؛ v_2 و v_3 ؟

1) $v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1$ و $\frac{v_1}{v_0} \neq \frac{v_2}{v_1}$

المتتالية (v_n) ليست لا حسابية ولا هندسية.

2) $v_0 \succ v_1 \succ v_2 \succ v_3$.

إذا كانت (v_n) ريبة فهي متناقصة.

2) نبرهن أنّ (u_n) متتاليه هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول.

من اجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1} = v_{n+1} - 3$$

$$= \frac{1}{4}v_n + \frac{9}{4} - 3 \quad \text{أي} \quad u_{n+1} = \frac{1}{4}v_n - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(v_n - 3)$$

$$= \frac{1}{4}u_n$$

وعليه : (u_n) متتالية هندسية أساسها وحدها الأول $u_0 = v_0 - 3 = -6$.

1. ب)كتابة u_n بدلالة n

(u_n) متتالية هندسية أساسها q معرفة في $\mathbb{N}$.

عبارة حدها العام معطاة بالعلاقة :

$u_n = u_0.q^n$. بالتعويض نجد : $u_n = -6\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

- استنتاج عبارة الحد العام للمتتالية (v_n)

من العلاقة $u_n = v_n - 3$ ينتج : $v_n = u_n + 3$

بالتعويض : $v_n = -6\left(\frac{1}{4}\right)^n + 3$

ملاحظة :

كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربة .

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \ ; \ \left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 3 \ ; \ \left[-6\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \to 0 \quad \checkmark$$

جـ) حساب بدلالة n : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

S_n هو مجموع $(n+1)$ حدا الأولى من المتتالية الهندسية. ومنه :

$S_n = u_0\left[\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right]$ وبالتعويض $S_n = -6\left[\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{4}-1}\right]$

$$S_n = -8\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right]$$

- استنتاج $S'_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

بما أن $v_n = u_n + 3$ فإنّ :

$$S'_n = (u_0 + 3) + (u_1 + 3) + ... + (u_n + 3)$$

$$= (u_0 + u_1 + ... + u_n) + \underbrace{(3 + 3 + ... + 3)}_{(n+1) \text{ مرة}}$$

وعليه $S'_n = S_n + 3(n+1)$

$$= -8\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right] + 3(n+1)$$

1. د) حساب $\lim_{n\to+\infty} S'_n$

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = +\infty \ , \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \to 0 \\ 3(n+1) \to +\infty \end{cases}$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

تمرين12:

(u_n) هي المتتالية المعرّفة في $\mathbb{N}$ كما يلي :

$\begin{cases} u_0 = e^3 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}$ حيث e أساس اللوغاريتم النيبيري

(v_n) هي المتتالية المعرفة في $\mathbb{N}$ بـ:

$v_n = \ln(u_n) - 2$

1) اثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب كتابة عبارة حدّها العام v_n .

2) استنتج u_n بدلالة n .

3) بين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = e^2$.

4) احسب المجموع $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

(عن بكالوريا تجريبية مغربية).

الحل :

1) إثبات أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأوّل .

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$v_{n+1} = ln(u_{n+1}) - 2$

$= ln\left(e\sqrt{u_n}\right) - 2$ اي $v_{n+1} = ln\,e + ln\left(\sqrt{u_n}\right) - 2$

$= 1 + \frac{1}{2} ln\,u_n - 2$

$= \frac{1}{2} ln(un) - 1$

$= \frac{1}{2}\left(ln(u_n) - 2\right)$

إذا من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

وبالتالي (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

وحدها الأول $v_0 = ln(u_0) - 2 = 1$

2) استنتاج u_n بدلالة n

لدينا : $v_n = ln(u_n) - 2$ معناه $ln(u_n) = v_n + 2$

معناه $u_n = e^{v_n + 2}$ ... (1)

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن : $v_n = v_0 . q^n$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^n$

من (1) وبالتعويض نجد : $u_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$.

نبين أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^2$

لدينا :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2} \right)$ وبما أنّ $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ فإنّ:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^2$.

4) حساب المجموع $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

S_n هو مجموع $(n+1)$ حدا الأولى من المتتالية الهندسية (v_n) .

ومنه :

$S_n = v_0 \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right)$ أي $S_n = 1 \times \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right]$

$= -2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1 \right]$

تمرين 13:

(u_n) هي المتتالية المعرّفة في $\mathbb{N}$ كما يلي :

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$.

1) بالتراجع ؛برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي n $u_n \succ 1$.

2) نضع : $v_n = u_n - 1$ وذلك من أجل كل n من $\mathbb{N}$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب إيجاد أساسها وحدّها الأوّل.

ب) نعرّف في $\mathbb{N}$ المتتالية (w_n) كما يلي :

$w_n = \ln(v_n)$.

بين أنّ (w_n) متتالية حسابية

جـ) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[n\left(\frac{w_n}{v_n} \right) \right]$

الحل

1) بالتراجع ؛نبرهن أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ 1$.

نضع : $P(n) : u_n \succ 1 ; n \in \mathbb{N}$

أ) نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 2$ أي $u_0 \succ 2$.

ومنه : $P(0)$ صحيحة .

ب) نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي $u_n \succ 1$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ونبين أنّ $P(n+1)$ صحيحة .أي نبين أن $u_{n+1} \succ 1$.
لدينا وحسب فرضية التراجع $u_n \succ 1$ معناه $2u_n \succ 2$
معناه $2u_n - 1 \succ 1$ أي $u_{n+1} \succ 1$
إذا $P(n+1)$ صحيحة
مما سبق وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع :
من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ 1$.

2) – أ) نبين أنّ (v_n) متتالية هندسية .

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = u_{n+1} - 1$

$$= (2u_{n+1} - 1) - 1$$
$$= 2(u_n - 1)$$
$$= 2v_n$$

(v_n) هي إذا متتالية هندسية أساسها
$q = 2$ وحدها الأوّل $v_0 = u_0 - 1$ أي $v_0 = 1$.

ب) نبين أنّ (w_n) متتالية حسابية

من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$w_{n+1} - w_n = ln(v_{n+1}) - ln(v_n)$$
$$= ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$$

المتتالية (v_n) متتالية هندسية اساسها 2 ومنه :

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 2$. إذا : $w_{n+1} - w_n = ln\,2$

المتتالية (w_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$.
وحدها الأول $w_0 = ln\,v_0 = 0$ لأنّ $v_0 = 1$.

-جـ) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\left(\frac{w_n}{v_n}\right)\right]$

لانّ : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\left(\frac{w_n}{v_n}\right)\right] = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\left(\frac{n.ln\,2}{2^n}\right)\right]$

(w_n) متتالية حسابية أساسها $ln\,2$ وحدها الأول0
(v_n) متتالية هندسية أساسها2 وحدها الأول 1.

نلاحظ وجود حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$.

نزيل هذه الحالة .

لدينا : $n\left(\frac{w_n}{v_n}\right) = \frac{n^2.ln\,2}{2^n}$

$ln\,2 = \left(\frac{ln\,2}{2}\right)^2 \times \frac{4}{ln\,2}$ ؛ $2^n = e^{ln\,2^n}$

ومنه : $= e^{\left(\frac{n.ln\,2}{2}\right)^2}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left[n\left(\frac{w_n}{v_n}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n^2.\left(\frac{ln\,2}{2}\right)^2 \times \frac{4}{ln\,2}}{e^{\left(\frac{n.ln\,2}{2}\right)^2}}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{4}{ln\,2}\left[\frac{\frac{n.ln\,2}{2}}{e^{\frac{n.ln\,2}{2}}}\right]^2$$

$= 0$ لان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0$

تمرين 14:

(u_n) هي المتتالية ذات الحدود الموجبة تماما والمعرّفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 9e \\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} \quad ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

نضع: $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{9}\right)$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$.

1)برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب إعطاء عبارة حدّها العام v_n بدلالة n .

2) – أ) استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) .

- ب) ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟.

الحل :

1)نبرهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب إعطاء عبارة حدّها العام v_n بدلالة n .

لدينا ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$v_{n+1} = ln\left(\frac{u_{n+1}}{9}\right)$ بتعويض u_{n+1} بقيمته نجد :

$v_{n+1} = ln\left(\frac{u_n}{9}\right)$ أي $v_{n+1} = ln\left(\frac{\sqrt{u_n}}{9}\right)$

$$= ln\left(\frac{u_n}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}ln\left(\frac{u_n}{9}\right)$$

إذا $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ وبالتالي :

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول

$v_0 = ln\left(\frac{u_0}{9}\right) = ln\,e = 1$.

- كتابة v_n بدلالة n

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (v_n) التي حدها الأول v_0 واساسها q معطاة بالعلاقة : $v_n = v_0.q^n$. بالتعويض نجد : $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$; $n \in \mathbb{N}$

2) – أ) استنتاج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) .

من العلاقة : $v_n = ln\left(\frac{u_n}{9}\right)$ ينتج : $\frac{u_n}{9} = e^{v_n}$

أي $u_n = 9e^{v_n}$

بالتعويض نجد : $u_n = 9.e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

2. ب) إيجاد نهاية المتتالية (u_n)

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأنّ $-1 \prec \frac{1}{2} \prec 1$ فإن :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 9.e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 9$$

تمرين 15:

a ؛ b و c أعداد حقيقية غير معدومة.

-)بين أنّه إذا كانت الأعداد a ؛ b و c بهذا الترتيب حدود متعاقبة لمتتالية هندسية فإنّ :

$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)(a-b+c)$

الحل

نبين أنّه إذا كانت الأعداد a ؛ b و c بهذا الترتيب حدود متعاقبة لمتتالية هندسية فإنّ :

$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)(a-b+c)$

لدينا:

$$(a+b+c)(a-b+c) = [(a+b)+c][(a-b)+c]$$
$$= (a+b)(a-b)+c(a+b+a-b)+c^2$$
$$= a^2-b^2+2ac+c^2$$

الاعداد a ؛ b و c بهذا الترتيب حدود متعاقبة من متتالية هندسية يعني :

b وسط هندسي للعددين a و c : $b^2 = ac$

في هذه الحالة و بالتعويض نجد :

$(a+b+c)(a-b+c) = a^2-b^2+2b^2+c^2$

$= a^2+b^2+c^2$ وهو المطلوب

ملاحظة :

وجود وسط هندسي b مرتبط بكون a و c من نفس الإشارة

تمرين 16:

نعتبر في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ المتتالية (u_n) المعرّفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \ ; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n \end{cases}$ ثمّ

نعرّف ، من أجل كلّ عدد طبيعي n المتتاليتين (u_n) و (w_n) بـ : $v_n = u_{n+1} - u_n$ ؛ $w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$

في كلّ ممّا يلي ، أنظر إن كانت القضية المقترحة صحيحة أم خاطئة – مع التّعليل .

- أ) المتتالية (v_n) متتالية هندسية.

- ب) المتتالية (w_n) متتالية ثابتة.

- جـ) من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$.

- د)المتتالية (u_n) لا تقبل نهاية

الحل :

ننظر في كل حالة إن كانت القضية صحيحة أم خاطئة مع التعليل :

-أ) المتتالية (v_n) هندسية ؟

من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+2} - u_{n+1}$$
$$= \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n - u_{n+1}$$
$$= -\frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n \quad \text{أي} \quad v_{n+1} - v_n = -\frac{2}{3}(u_{n+1} - u_n)$$
$$= -\frac{2}{3}v_n$$

المتتالية (v_n) هي إدا هندسية أساسها $q = -\frac{2}{3}$

ب) المتتالية (w_n) ثابتة ؟

من اجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$w_{n+1} - w_n = u_{n+2} + \frac{2}{3}u_n - u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n$$
$$= \left(\frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n\right) + \frac{2}{3}u_{n+1} - u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n$$
$$= 0$$

وهذا معناه : المتتالية (w_n) متتالية ثابتة .

جـ) من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{3}{5}(w_n - u_n)$ ؟

من اجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$w_n - v_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n - u_{n+1} + u_n$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

أي $w_{n+1}-w_n=\frac{5}{3}u_n$ وعليه :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{3}{5}(w_n-v_n)$

- د) المتتالية (u_n) لا تقبل نهاية ؟

- المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $\left(-\frac{2}{3}\right)$

و $-1\prec-\frac{2}{3}\prec 1$ فهي إذا تتقارب نحو 0 .

- المتتالية (w_n) متتالية ثابتة فهي إذا متقاربة وتتقارب نحو w_0 حيث :

$w_0=u_1+\frac{2}{3}u_0=1$.

في هذه الحالة :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{5}(w_n-v_n)$$
$$=\frac{3}{5}$$

المتتالية (w_n) متقاربة وتتقارب نحو $\frac{3}{5}$.

تمرين 17:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بالحدين $u_0=3$ ؛ $u_1=4$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_{n+1}=4u_n-u_{n-1}$.

1) جد عددين حقيقيين a و b حيث $\begin{cases}a+b=4\\a.b=1\end{cases}$.

2)من اجل كل عدد طبيعي n نضع :

$v_n=u_{n+1}-au_n$.

برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها b .

3) من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ نضع : $w_n=u_{n+1}-bu_n$.

برهن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها a .

4) أكتب v_n و w_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) .

الحل

1) إيجاد عددين حقيقيين a و b حيث $\begin{cases}a+b=4\\a.b=1\end{cases}$

- $a+b=4$ معناه $b=4-a$
- من العلاقة $ab=1$ وبتعويض b بقيمته نحصل على المعادلة : $a^2-4a+1=0$ ... (1)

مميز المعادلة (1) هو : $\Delta=12$.

يوجد حلان متمايزان هما :

$a_1=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$ ؛ $a_2=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$.

إذا: $(a;b)=\left(2+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$

أو $(a;b)=\left(2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

2) نبرهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها b .

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$v_{n+1}=u_{n+2}-a.u_{n+1}$$
$$=(4u_{n+1}-u_n)-a.u_{n+1}$$
$$v_{n+1}=(4-a)u_{n+1}-1\times u_n \quad .$$

نعلم أن : $ab=1$ و $4-a=b$.إذا :

$$v_{n+1}=bu_{n+1}-ab.u_n$$
$$v_{n+1}=b.v_n \text{ أي : } =b(u_{n+1}-a.u_n)$$

المتتالية (v_n) إذا متتالية هندسية أساسها b .

3) نبرهن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها a .

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$w_{n+1}=u_{n+2}-b.u_{n+1}$$
$$=(4u_{n+1}-u_n)-b.u_{n+1}$$
$$(ab=1) \quad =(4-b)u_{n+1}-ab.u_n$$
$$(4-b=a) \quad =au_{n+1}-abu_n$$
$$=a(u_{n+1}-bu_n)$$
$$=a.w_n$$

وعليه : (w_n) متتالية هندسية أساسها a .

4)كتابة v_n و w_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) .

- (v_n) متتالية هندسية اساسها b وحدها الأول $v_0=u_1-au_0=(4-3a)$. وعليه :

$v_n=(4-3a).b^n \quad ;n\in\mathbb{N}$.

- (w_n) متتالية هندسية اساسها a وحدها الأول $w_0=u_1-b.u_0=(4-3b)$. ومنه :

$w_n=(4-3b).a^n \quad ;n\in\mathbb{N}$

- لدينا : $v_n-w_n=u_{n+1}-au_n-u_{n+1}+bu_n$

$=(b-a)u_n$.

وعليه : $u_n=\frac{v_n-w_n}{b-a}$. بالتعويض نجد :

$$u_n=\frac{(4-3a)b^n-(4-3b)a^n}{b-a}$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

تمرين 18:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1} \end{cases}$$

1) باستعمال مبدأ الاستدلال بالتراجع ؛ أثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $1 \prec u_n \prec 2$.

2) بيّن أنّ (u_n) متزايدة ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3) نعتبر في $\mathbb{N}$ المتتالية (v_n) المعرّفة بـ :

$v_n = \ln(u_n - 1)$.

أ) تحقق أن المتتالية (v_n) معرّفة تماما .

ب)برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{2}$ وحدّها الأوّل $v_0 = -\ln 2$.

جـ-)جد نهاية المتتالية (v_n) ثمّ استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

(عن بكالوريا تجريبية مغربية).

الحل :

1) باستعمال مبدأ الاستدلال بالتراجع ؛ نثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $1 \prec u_n \prec 2$.

نضع : $P(n): 1 \prec u_n \prec 2; n \in \mathbb{N}$

أ) نتحقق من صحة $P(0)$

لدينا فرضا $u_0 = \dfrac{3}{2}$. إذا $1 \prec u_0 \prec 3$.

$P(0)$ صحيحة .

ب) نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي نفرض ما يلي :

$1 \prec u_n \prec 2$.

ونبين صحة $P(n+1)$ اي نبين ما يلي : $1 \prec u_{n+1} \prec 3$

حسب فرضية التراجع لدينا :

$1 \prec u_n \prec 3$ وبالتالي $0 \prec u_n - 1 \prec 1$...(1)

الدالة الجذر التربيعي متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$:(1) تكافئ $0 \prec \sqrt{u_n - 1} \prec 1$

تكافئ $1 \prec 1 + \sqrt{u_n - 1} \prec 2$

أي $1 \prec u_{n+1} \prec 2$.

$P(n+1)$ صحيحة.

من أ) و ب) وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع :

من أجل كلّ عدد طبيعي n : $1 \prec u_n \prec 2$.

2) نبين أنّ (u_n) متزايدة .

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 + \sqrt{u_n - 1} - u_n \\ &= (1 - u_n) + \sqrt{u_n - 1} \\ &= \frac{\left[(1-u_n) + \sqrt{u_n - 1}\right]\left[(1-u_n) - \sqrt{u_n - 1}\right]}{\left[(1-u_n) - \sqrt{u_n - 1}\right]} \\ &= \frac{u_n^2 - 3u_n + 2}{\left[(1-u_n) - \sqrt{u_n - 1}\right]} \end{aligned}$$

حسب ما سبق : $1 \prec u_n$ وعليه :

$\left[(1-u_n) - \sqrt{u_n - 1}\right] \prec 0$ إذا $\begin{cases} (1-u_n) \prec 0 \\ -\sqrt{u_n - 1} \prec 0 \end{cases}$.

وعليه إشارة الفرق عكس إشارة $u_n^2 - 3u_n + 2$

بوضع $u_n = x$:

ندرس في $\mathbb{R}$ إشارة كثير الحدود $x^2 - 3x + 2$.

يوجد جذران هما 1 و 2 والاشارة كما يلي :

$-\infty$		1		2		$+\infty$
	$+$	0	$-$	0	$+$	

بما أن $u_n \in]1;2[$ وحسب ما سبق :

من أجل كل عدد طبيعي n : $(u_{n+1} - u_n) \succ 0$

المتتالية (u_n) متزايدة تماما

- استنتاج أن (u_n) متقاربة

لدينا ما يلي :

(u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2

(u_n) متزايدة

حسب مبرهنة التقارب الرتيب فهي متقاربة .

3) – أ) نتحقق أن المتتالية (v_n) معرّفة تماما .

المتتالية (v_n) معرفة معناه $\ln(u_n - 1)$ معرف معناه $(u_n - 1) \succ 0$

حسب ما سبق : $u_n \succ 1$ اي $u_n - 1 \succ 0$.

وبالتالي المتتالية (v_n) معرفة تماما .

ب)نبرهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{2}$ وحدّها الأوّل $v_0 = -\ln 2$.

من اجل كل عدد n طبيعي لدينا :

$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1)$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

$$= \ln\left(1+\sqrt{u_n-1}-1\right)$$

$$v_{n+1} = \ln\left(u_n-1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(u_n-1\right) \quad \text{أي} \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

المتتالية (v_n) هي إذا متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \ln\left(u_0-1\right) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$.

جـ-)جد نهاية المتتالية (v_n) ثمّ استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

- الأساس q للمتتالية الهندسية (v_n) يحقق $-1 \prec q \prec 1$ فهي إذا متقاربة وتتقارب نحو 0 أي : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
- لدينا : $v_n = \ln\left(u_n-1\right)$ معناه $u_n - 1 = e^{v_n}$

معناه $u_n = e^{v_n}+1$

وعليه : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{v_n}+1\right)$

$= 2$ لان $e^{v_n} \to 0$

تمرين 19☹: أنظر التمرين18

(u_n) هي المتتالية المعرّفة بحدها الأوّل $u_0 = \frac{13}{4}$

ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3+\sqrt{u_n-3}$.

1) باستعمال مبدأ الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $3 \prec u_n \prec 4$

2) – أ) بين أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-u_n = \frac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$$

ب) برر أنّ (u_n) متقاربة .

3) (v_n) هي المتتالية المعرّفة علي $\mathbb{N}$ بـ :

$v_n = \ln\left(u_n-3\right)$.

أ)برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q وحدّها الأوّل v_0 .

ب) عبّر عن كلّ من (u_n) و (v_n) بدلالة n .

-ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

جـ)نعرّف من أجل كلّ عدد طبيعي n الجداء P_n بـ : $P_n = (u_0-3)\times(u_1-3)\times\ldots\times(u_n-3)$.

عبر عن P_n بدلالة n ثمّ تحقّق أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{16}$

الحل :

1) باستعمال مبدأ الاستدلال بالتراجع ، نثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $3 \prec u_n \prec 4$

نضع : $P(n): 3 \prec u_n \prec 4 \ , n \in \mathbb{N}$

-أ)نتحقق من صحة $P(0)$.

فرضا $u_0 = \frac{13}{4}$: $3 \prec u_0 \prec 4$.

$P(0)$ صحيحة.

-ب) نفرض صحة $P(n)$ أي أن : $3 \prec u_n \prec 4$

ونبين صحة $P(n+1)$ أي نبين ما يلي :

$3 \prec u_{n+1} \prec 4$

حسب فرضية التراجع :

$3 \prec u_n \prec 4$ ومنه $0 \prec u_n - 3 \prec 1$

أي $0 \prec \sqrt{u_n-3} \prec 1$

أي $3 \prec 3+\sqrt{u_n-3} \prec 4$.

وعليه : $p(n+1)$ صحيحة.

مما سبق وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع :

من أجل كل عدد طبيعي n : $3 \prec u_n \prec 4$.

2) – أ) نبين أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-u_n = \frac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$$

لدينا : $u_{n+1}-u_n = 3+\sqrt{u-3}-u_n$

$= \sqrt{u_n-3}-(u_n-3)$

باستعمال مرافق العبارة $\left[\sqrt{u_n-3}-(u_n-3)\right]$ نجد :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{\left[\sqrt{u_n-3}-(u_n-3)\right]\left[\sqrt{u_n-3}+(u_n-3)\right]}{\sqrt{u_n-3}+(u_n+3)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{u_n-3}\right)^2-(u_n-3)^2}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$$

$$= \frac{-u_n^2+7n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$$

نبرر أنّ (u_n) متقاربة

تقارب المتتالية (u_n) مرتبط برتابتها

- بما أن $u_n \succ 3$ فإنّ $\sqrt{u_n-3}+u_n-3 \succ 0$

وعليه : إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ من إشارة $\left(-u_n^2+7n-12\right)$.

بوضع : $u_n = x$ ؛ نحدد إشارة كثير الحدود

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

$(-x^2+7x-12)$ في المجال $]3;4[$.

المميز Δ يحقق : $\Delta=1$.

يوجد جذران متمايزان هما :

$x_1=3$ و $x_2=4$

والإشارة تكون كما يلي :

$-\infty$		3		4		$+\infty$
	$-$	0	$+$	0	$-$	

بما أن $3\prec u_n\prec 4$ فإنّ $(u_{n+1}-u_n)\prec 0$

وعليه : المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

في هذه الحالة :

المتتالية (u_n) متقاربة لكونها متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 3 .

3)-أ)برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q وحدّها الأوّل .

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+1}-3)$$

$$=\ln\left(\sqrt{u_n-3}\right) \quad \text{بعد تعويض } u_{n+1} \text{ بقيمته}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(u_n-3)$$

$$=\frac{1}{2}v_n$$

وبالتالي (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

وحدها الأول $v_0=\ln(u_0-3)=-\ln 4$.

ب) عبّر عن كلّ من (u_n) و (v_n) بدلالة n .

- عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (v_n)

معطاة بالعلاقة : $v_n=v_0.q^n$, $n\in\mathbb{N}$

بالتعويض نجد : $v_n=(-\ln 4)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- من العلاقة $v_n=\ln(u_n-3)$ نجد $u_n=3+e^{v_n}$

$$=3+e^{-\ln 4.\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(3+e^{v_n}\right)$$

$$=4 \quad \text{لان } v_n\to 0$$

جـ) نعبر عن P_n بدلالة n ثمّ تحقّق أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n=\frac{1}{16}$

$$P_n=(u_0-3)\times(u_1-3)\times\ldots\times(u_n-3)$$

$$=e^{v_0}\times e^{v_1}\times\ldots\times e^{v_n}$$

$$P_n=e^{v_0+v_1+\ldots+v_n}$$

المجموع $(v_0+v_1+\ldots+v_n)$ هو مجموع حدا $n+1$ حدا الأولى من المتتالية الهندسية (v_n) .إذا :

$$v_0+v_1+\ldots+v_n=-\ln 4\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}\right)$$

$$P_n=e^{\ln 16\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]} \quad \text{ومنه :} \quad =2\ln 4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty}P_n=\lim_{n\to+\infty}\left[e^{\ln 16\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right)}\right] \quad \blacksquare$$

$$=e^{-\ln 16} \quad \text{لانّ } \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\to 0$$

$$e^{-\ln 16}=e^{\ln\frac{1}{16}} \quad \text{لان} \quad =\frac{1}{16}$$

تمرين 20 :

نعتبر في $\mathbb{N}$ المتتالية (u_n) المعرّفة كما يلي :

$$\begin{cases}u_0=\frac{3}{2}\\ u_{n+1}=u_n^2-2u_n+2\end{cases}$$

1)بالتراجع، أثبت أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $1\le u_n\le 2$

2)-أ) تحقّق أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-u_n=(u_n-2)(u_n-1)$$

- ب) استنتج أنّ (u_n) متتالية متناقصة في $\mathbb{N}$.

-جـ) هل (u_n) متتالية متقاربة ؟ برر.

الحل :

1) بالتراجع، نثبت أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $1\le u_n\le 2$

نضع : $P(n):\ 1\le u_n\prec\frac{3}{2}$.

أ) نتحقق من صحة $P(0)$.

لدينا فرضا إذا $u_0=\frac{3}{2}$

وبالتالي $P(0)$ محققة أو صحيحة .

ب)نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $1\le u_n\le 2$

ونبين صحة $P(n+1)$ أي نبين : $1\le u_{n+1}\le 2$.

لاحظ ما يلي : $u_{n+1}=(u_n-1)^2+1$

حسب فرضية التراجع : $1\le u_n\le 2$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

ومنه $0 \le u_n - 1 \le 2$

وبالتالي $0 \le (u_n - 1)^2 \le 1$

يأتي : $1 \le (u_n - 1)^2 + 1 \le 2$

إذا $1 \le u_{n+1} \le 2$ وهذا معناه $P(n+1)$ صحيحة.

-مما سبق نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$1 \le u_n \le 2$.

2)-أ) نتحقّق أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$

لدينا من جهة :

$u_{n+1} - u_n = (u_n^2 - 2u_n + 2) - u_n$

$= u_n^2 - 3u_n + 2$

من جهة أخرى :

$(u_n - 2)(u_n - 1) = u_n^2 - 3u_n + 2$

وعليه : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$

- ب) استنتاج أنّ (u_n) متتالية متناقصة في $\mathbb{N}$.

لدينا : $\begin{cases} u_n \le 2 \\ u_n \ge 1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_n - 2 \le 0 \\ u_n - 1 \ge \end{cases}$

إذا $(u_n - 2)(u_n - 1) \le 0$ أي $u_{n+1} - u_n \le 0$

المتتالية (u_n) متناقصة

جـ) ننظر إن كانت (u_n) متتالية متقاربة.

(u_n) متتالية متناقصة

(u_n) متتالية محدودة

حسب مبرهنة التقارب الرتيب : (u_n) متقاربة

ملاحظة

في هذه الحالة كيف نحسب نهاية المتتالية (u_n)؟

المتتالية معرفة بعلاقة من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$

وهي متقاربة نحو عدد حقيقي l.

l هو حل للمعادلة $f(l) = l$ مع مراعاة شروط حول المتتالية (u_n).

$f(l) = l$ معناه $l^2 - 3l + 2 = 0$

يوجد حلان للمعادلة هما $l_1 = 1$ و $l_2 = 2$

بما أن (u_n) متناقصة و $1 \le u_n \le 2$ نأخذ $l = 1$

أي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

تمرين 21 :

نعتبر في $\mathbb{N}$ المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} \end{cases}$$

I) -1) جد علي شكل كسر غير قابل للاختزال الحدود: u_1 ؛ u_2 ؛ u_3 و u_4 .

2)ما هو تخمينك حول رتابة وتقارب (u_n)

II) (v_n) هي المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$v_n = u_n - 3$.

1) برهن أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$

2)بالتراجع أثبت أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n :

$-1 \le v_n \le 0$

3 –أ) برهن أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n :

$v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

4)-أ) تحقّق أنّ المتتالية (v_n) متقاربة .

-ب)أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

5) تأكّد من صحة تخمينك.

الحل :

I) -1) إيجاد علي شكل كسر غير قابل للاختزال الحدود: u_1 ؛ u_2 ؛ u_3 و u_4 .

لدينا ما يلي :

$u_1 = \frac{5}{2}$: بالتعويض ؛ $u_1 = -\frac{1}{2}u_0^2 + 3u_0 - \frac{3}{2}$

$u_2 = \frac{23}{8}$: بالتعويض ؛ $u_2 = -\frac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \frac{3}{2}$.

$u_3 = \frac{383}{128}$: بالتعويض ؛ $u_3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_2 - \frac{3}{2}$.

2) التخمين حول رتابة وتقارب (u_n) .

من خلال حسابنا لبعض الحدود الأولى للمتتالية نلاحظ ما يلي :

- $u_0 \prec u_1 \prec u_2 \prec u_3$ وعليه (u_n) متزايدة
- كل الحدود تقترب من القيمة 3 .

(u_n) متقاربة وتتقارب نحو العدد 3.

II - 1) برهن أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$:

$v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$v_{n+1} = u_{n+1} - 3$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

$$= -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - 3 - \frac{3}{2}$$

$$v_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(u_n^2 - 6u_n + 9\right)$$

$$= -\frac{1}{2}(u_n - 3)^2 \quad . \quad \text{أي} : \quad v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$$

2)بالتراجع أثبت أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $-1 \le v_n \le 0$

نضع : $P(n): -1 \le v_n \le 0$

أ) نتحقق من صحة $P(0)$

لدينا فرضا : $v_0 = u_0 - 3 = -1$: $-1 \le v_0 \le 0$.

$P(0)$ صحيحة .

ب) نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي : $-1 \le v_n \le 0$

ونبين صحة $P(n+1)$ أي نبين صحة ما يلي :

$-1 \le v_{n+1} \le 0$

حسب فرضية التراجع : $-1 \le v_n \le 0$

الدالة مربع متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$

فهي إذا تعكس الترتيب . وعليه :

$0 \le v_n^2 \le 1$ أي $(-1)^2 \ge v_n \ge 0$

ومنه $-\frac{1}{2}\times 0 \ge -\frac{1}{2}v_n^2 \ge -\frac{1}{2}\times 1$

أي $-1 \le -\frac{1}{2} \le -\frac{1}{2}v_n^2 \le 0$

اي $-1 \le v_{n+1} \le 0$

$P(n+1)$ صحيحة.

من أ) و ب) وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع :

من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 \le v_n \le 0$

3 –أ) نبرهن أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n :

$v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$

لدينا وبما أن $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$ إذا: $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n$

$$= -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$$

ب) نستنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

بما أنّ $-1 \le v_n \le 0$ فإن : $\begin{cases} 0 \le -v_n \le 1 \\ \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}v_n + 1 \le 1 \end{cases}$

وعليه $0 \le -\frac{1}{2}v_n(v_n+1) \le 1$ اي $v_{n+1} - v_n \ge 0$

المتتالية (v_n) متزايدة .

4)-أ) نتحقّق أنّ المتتالية (v_n) متقاربة .

وجدنا ما يلي :

(v_n) محدودة من الأعلى بالعدد 0

(v_n) متزايدة .

وعليه : المتتالية (v_n) متتالية متقاربة .

- ب) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

ليكن العدد l هو نهاية المتتالية (v_n).

لدينا : $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$

نعلم أنّ النهاية إن وجدت فهي وحيدة وعليه :

$l = -\frac{1}{2}l^2$ أي $\lim\limits_{n\to\infty} v_{n+1} = -\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_n^2\right)$

$l\left(l + \frac{1}{2}\right) = 0$ اي

نجد : $l = 0$ أو $l = -\frac{1}{2}$.

بما أن (v_n) متزايدة ؛ نأخذ $l = 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

5) نتأكّد من صحة تخميننا.

المتتالية (u_n) معرفة أيضا بـ : $u_n = v_n + 3$.

وبالتالي يكون :

(u_n) متزايدة لكونها مجموع متتاليتين الأولي

متزايدة : $n \mapsto v_n$ والثانية ثابتة : $n \mapsto 3$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n + 3) = 3$ لأن $v_n \to 0$

تمرين 22:

(u_n) هي المتتالية المعرّفة بحدّها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$

ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}$.

1) .أ)بالتراجع ،برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n $0 \prec u_n \prec 1$.

.ب) باستعمال النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة .

2) نعرف في $\mathbb{N}$ المتتالية (v_n) بـ : $v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$.

.أ)اثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = v_n^2$

.ب)استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :

$v_n = \frac{1}{3^{2^n}}$

جـ)استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$ وعبارة الحد العام للمتتالية (u_n)

.د)من أجل كل n من $\mathbb{N}$ نضع : $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

أحسب P_n بدلالة n .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

الحل :

1) .أ)بالتراجع ،نبرهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n $0 \prec u_n \prec 1$.

نضع : $P(n): 0 \prec u_n \prec 1, n \in \mathbb{N}$.

- نتحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = \frac{1}{2}$: $0 \prec u_n \prec 1$.

- نفرض صحة $P(n)$ أي أنّ $0 \prec u_n \prec 1$

ونبين صحة $P(n+1)$ أي نبين أنّ $0 \prec u_{n+1} \prec 1$.

حسب فرضية التراجع لدينا :

$0 \prec u_n \prec 1$ وبالتالي :

$2u_n \succ 0$ و $1+u_n^2 \succ 0$.

إذا : $\frac{2u_n}{1+u_n^2} \succ 0$ .... (1) .

ثم : $2u_n - u_n^2 - 1 = -(u_n-1)^2 \prec 0$

لكون $(u_n-1)^2 \succ 0$.

إذا : $2u_n \prec 1+u_n^2$ وبالتالي : $\frac{2u_n}{1+u_n^2} \prec 1$ ... (2) .

من (1) و (2) ينتج : $0 \prec \frac{2u_n}{1+u_n^2} \prec 1$

أي $0 \prec u_{n+1} \prec 1$. إذا $P(n+1)$ صحيحة .

- مما سبق نستنتج ما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \prec u_n \prec 1$.

ملاحظة :

المتتالية (u_n) متتالية محدودة (لكونها محدودة من الأسفل ومن الأعلى)

المتتالية (u_n) متتالية موجبة تماما

ب.) باستعمال النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ نحدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثمّ نستنتج أنّها متقاربة .

لدينا : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2u_n}{1+u_n^2}}{u_n}$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{1+u_n^2}$.

لدينا : $0 \prec u_n \prec 1$ إذا : $1 \prec 1+u_n^2 \prec 2$.

ينتج : $1+u_n^2 \prec 2$ $\frac{2}{1+u_n^2} \prec 1$ أي : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \prec 1$

المتتالية (u_n) هي إذا متتالية متناقصة تماما .

(u_n) متناقصة

(u_n) محدودة من الأسفل بالعدد0

إذا (u_n)متقاربة .

2.أ) نثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n $v_{n+1} = v_n^2$

لدينا :

$$v_{n+1} = \frac{1-u_{n+1}}{1+u_{n+1}} \quad \text{أي :} \quad v_{n+1} = \frac{1-\frac{2u_n}{1+u_n^2}}{1+\frac{2u_n}{1+u_n^2}}$$

$$= \frac{1+u_n^2-2u_n}{1+u_n^2+2u_n}$$

$$= \frac{(1-u_n)^2}{(1+u_n)^2}$$

$v_{n+1} = \left(\frac{1-u_n}{1+u_n}\right)^2$ أي $v_{n+1} = v_n^2$ وهو المطلوب.

.ب)استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :

$v_n = \frac{1}{3^{2^n}}$

الحد الأوّل v_0 للمتتالية (v_n) معرف بـ :

$v_0 = \frac{1-u_0}{1+u_0}$. بتعويض u_0 بقيمته نجد : $v_0 = \frac{1}{3}$.

بما أنّ $v_{n+1} = v_n^2$ ينتج :

$v_1 = v_0^2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3^{2^1}}$ ؛ $v_2 = v_1^2 = \left(\frac{1}{3^2}\right)^2 = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3^{2^2}}$

$v_3 = v_2^2 = \left(\frac{1}{3^4}\right)^2 = \frac{1}{3^8} = \frac{1}{3^{2^3}}$ ؛ ... $v_n = \frac{1}{3^{2^n}}$

جـ)استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ وعبارة الحد العام للمتتالية (u_n)

$v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$ يكافئ $u_n.v_n + v_n = 1-u_n$

يكافئ $u_n = \frac{1-v_n}{1+v_n}$

بتعويض v_n نجد : $u_n = \frac{1-\frac{1}{3^{2^n}}}{1+\frac{1}{3^{2^n}}}$ أي $u_n = \frac{3^{2^n}-1}{3^{2^n}+1}$

د) أحسب P_n بدلالة n ثمّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{P_n}{v_{n+1}}\right)$

لدينا : $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{3^2} \times \ldots \times \frac{1}{3^{2^n}}$$

$$= \frac{1}{3^{1+2+4+\ldots+2^n}}$$

نلاحظ أنّ المجموع $(1+2+4+\ldots+2^n)$ هو مجموع $(n+1)$ حدا متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

2 وحدها الأوّل 1 وعليه :

$$1+2+4+...+2^n = 1\times\left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right)=\left(2^{n+1}-1\right)$$

في هذه الحالة : $P_n = \frac{1}{3^{2^{n+1}-1}}$

تمرين 23:

α عدد حقيقي حيث : $0 \prec \alpha \prec 1$.

نعتبر في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ المتتالية (u_n) المعرّفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{(1+\alpha)u_n - \alpha}{u_n} \end{cases}$$

1)-أ)بالتراجع أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n \geq 1$

- ب)أثبت أنّ (u_n) متتالية متناقصة .

-جـ)استنتج بعد هذا أنّ (u_n) متتالية متقاربة . ما هي نهايتها ؟

2) نعرّف في $\mathbb{N}$ المتتالية (v_n) بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - \alpha}$

- أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = \alpha . v_n$

ماذا تستنتج ؟

-ب)اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) بدلالة n و α

ثمّ استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n)

الحل:

1)-أ)بالتراجع نثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n \geq 1$

نضع : $P(n): u_n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.

- نتحقق من صحة $P(0)$.

لدينا فرضا $u_0 = 2$: $u_0 \geq 1$.

إذا $P(0)$ صحيحة

- نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي أنّ $u_n \geq 1$

ونبين صحة $P(n+1)$ أي نبين أنّ : $u_{n+1} \geq 1$.

لهذا نقارن مثلا بين u_{n+1} و 1 أي ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - 1$.

$$u_{n+1} - 1 = \frac{(1+\alpha)u_n - \alpha - u_n}{u_n}$$

$$= \frac{\alpha u_n - \alpha}{u_n} \quad \text{أي} \quad u_{n+1} = \frac{\alpha(u_n - 1)}{\alpha}$$

لدينا فرضا $0 \prec \alpha \prec 1$: ينتج $\alpha \succ 0$

حسب فرضية التراجع : $u_n \geq 1$ ينتج $u_n - 1 \geq 0$

في هذه الحالة : $\frac{\alpha(u_n - 1)}{u_n} \geq 0$ أي $u_{n+1} \geq 1$

وبالتالي : $P(n+1)$ صحيحة.

مما سبق نستنتج ما يلي :

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n \geq 1$

- ب)أثبت أنّ (u_n) متتالية متناقصة .

لهذا نبين أن $u_{n+1} - u_n \leq 0$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1+\alpha)u_n - \alpha}{u_n} - u_n$$

$$= \frac{-u_n^2 + (1+\alpha)u_n - \alpha}{u_n}$$

واضح أن إشارة هذا الفرق من إشارة البسط.

بوضع $x = u_n$ حيث $x \geq 1$ ؛ ندرس في $\mathbb{R}$ إشارة كقير الحدود $-x^2 + (1+\alpha)x + \alpha$

مميزه Δ : $\Delta = (1+\alpha)^2 - 4\alpha$

$$= \alpha^2 - 2\alpha + 1$$

$$= (\alpha - 1)^2$$

ملاحظة :

$(\alpha-1)^2 \succ 0$ لكون : $\alpha \neq 1$: $0 \prec \alpha \prec 1$

لكن $\sqrt{\Delta} = |\alpha - 1|$

بما أن $\alpha - 1 \prec 0$ فإنّ : $\sqrt{\Delta} = 1 - \alpha$.

لكثير الحدود جذران متمايزان هما :

$x_1 = \frac{-1-\alpha+1-\alpha}{-2}$ ؛ $x_2 = \frac{-1-\alpha-1+\alpha}{-2}$

$= \alpha$ $= 1$

إشارة كثير الحدود كما يلي :

$-\infty$		α		1		$+\infty$
	$-$	0	$+$	0	$-$	

بما أنّ $u_n \geq 1$ فإنّ $(u_{n+1} - u_n) \leq 0$

المتتالية (u_n) متناقصة .

-جـ)استنتاج بعد هذا أنّ (u_n) متتالية متقاربة . ما هي نهايتها؟.

المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 1

المتتالية (u_n) متناقصة

وعليه متتالية متقاربة نحو عدد l حيث $l \geq 1$.

العدد l هو حل للمعادلة : $l = \frac{(1+\alpha)l - \alpha}{l}$ وهي مكافئة للمعادلة : $-l^2 + (1+\alpha)l - \alpha = 0$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

نجد $l=\alpha$ أو $l=1$.نأخذ : $l=1$

2) - أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :

$v_{n+1}=\alpha.v_n$.

لدينا :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}-\alpha}$$

$$=\frac{\frac{(1+\alpha)u_n-\alpha}{u_n}-1}{\frac{(1+\alpha)u_n-\alpha}{u_n}-\alpha}$$

أي $v_{n+1}=\frac{\alpha u_n-\alpha}{u_n-\alpha}$

$$=\frac{\alpha(u_n-1)}{u_n-\alpha}$$

أي :

$$v_{n+1}=\alpha\left(\frac{u_n-1}{u_n-\alpha}\right)$$

$$=\alpha v_n$$

- نستنتج أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية اساسها α فهي إذا متقاربة وتتقارب نحو 0 لكون $0\prec\alpha\prec1$ وحدها الأول $v_0=\frac{1}{2-\alpha}$.

ب-)اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) بدلالة n و α

ثمّ نستنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) .

- عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (v_n)

معطاة بالعلاقة : $v_n=v_0.q^n\ ,n\in\mathbb{N}$

بالتعويض نجد : $v_n=\left(\frac{1}{2-\alpha}\right).\alpha^n$

- من العلاقة : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n-\alpha}$ ينتج ما يلي :

$(u_n-\alpha).v_n=u_n-1$ يكافئ $u_nv_n-u_n=\alpha v_n-1$

يكافئ $u_n=\frac{\alpha v_n-1}{v_n-1}$.

بتعويض (v_n) بقينته نجد :

$$u_n=\frac{\frac{\alpha\times\alpha^n}{2-\alpha}-1}{\frac{\alpha^n}{2-\alpha}}$$ أي $u_n=\frac{\alpha^{n+1}+\alpha-2}{\alpha^n+\alpha-2}$

ملاحظة :

يمكن مثلا حساب الحد الأول u_0 من عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

للتأكد من صحة النتائج المحصل عليها .

$$u_0=\frac{2\alpha-2}{\alpha-2}=2$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\alpha^{n+1}+\alpha-2}{\alpha^n+\alpha-2}\right)=\frac{\alpha-2}{\alpha-2}=1$$

تمرين 24:***

(u_n) متتالية معرّفة علي $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=1$ ؛ $u_1=2$ و $u_{n+2}=\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n$.

المتتالية (v_n) معرّفة علي $\mathbb{N}$ كما يلي :

$v_n=u_{n+1}-u_n$.

1 -) أحسب v_0 و v_1 .

2 -) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

3 -) – أ) أحسب بدلالة n المجموع :

$S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$.

- ب) برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n :

$$u_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$$

- جـ)بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة .

(عن بكالوريا 2009 ع-ت).

الحل :

1 -) حساب v_0 و v_1 .

لدينا :

- $v_0=u_1-u_0=1$
- $v_1=u_2-u_1$

ومنه : $u_2=\frac{4}{3}u_1-\frac{1}{3}u_0=\frac{7}{3}$.: $v_1=\frac{7}{3}-2=\frac{1}{3}$

2 -) تبرهن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

لدينا : $v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}$ أي :

$$v_{n+1}=\left(\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n\right)-u_{n+1}$$

$$=\frac{1}{3}(u_{n+1}-u_n)$$

$$=\frac{1}{3}v_n$$

وعليه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$

3 -) – أ) أحسب بدلالة n المجموع :

$S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$.

S_n هو مجموع n حدا الأولى من المتتالية الهندسية (v_n) . ومنه :

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

أي $S_n = 1\times\left[\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right]$ نعوض : $S_n = v_0\left[\dfrac{1-q^n}{1-q}\right]$

$$S_n = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

- ب) نبرهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n :

$$u_n = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$$

من العلاقة : $v_n = u_{n+1}-u_n$ نلاحظ ما يلي :

$$\begin{aligned} S_n &= v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}\\ &= (u_1-u_0)+(u_2-u_1)+(u_3-u_2)+\ldots+(u_n-u_{n-1})\\ &= -u_0+u_n \end{aligned}$$

$S_n = -u_0+u_n$ معناه $u_n = S_n+u_0$.

بتعويض كل من S_n و u_0 بقيمته نجد :

$$u_n = \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]+1$$

- جـ)بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة .

لدينا :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1\right] \;;\; \left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$$

$$= \frac{5}{2}$$

وعليه (u_n) متقاربة وتتقارب نحو $\frac{5}{2}$

تمرين 25

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرّفتان من أجل كلّ عدد طبيعي n كما يلي :

$$(u_n):\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3u_n+1} \end{cases} \;;\; (v_n): v_n = \frac{1}{u_n}$$

1) باستعمال مبدأ الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n \succ 0$.

استنتج أنّ المتتالية (v_n) معرّفة تماما .

2)برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية حسابية .

3)استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

الحل :

1) باستعمال مبدأ الاستدلال بالتراجع ، نثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n \succ 0$.

نضع : $p(n): u_n \succ 0 \;,\; n\in\mathbb{N}$

- نتحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n=0$ لدينا : $u_0 = 2$ أي $u_0 \succ 0$.

إذا : $P(0)$ صحيحة

نفرض صحة $P(n)$ أي أنّ $u_n \succ 0$ ونبين صحة $P(n+1)$ اي نبين أنّ : $u_{n+1} \succ 0$

لدينا وحسب فرضية التراجع : $u_n \succ 0$ وعله $3u_n+1 \succ 1 \succ 0$. إذا : $\dfrac{u_n}{3u_n+1} \succ 0$ اي $u_{n+1} \succ 0$.

وبالتالي : $P(n+1)$ صحيحة .

مما سبق وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ 0$.

المتتالية (v_n) معرفة بـ : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$

بما أن $u_n \succ 0 \;(u_n \neq 0)$ فإن $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ معرف تماما

2)برهن أنّ المتتالية (v_n) متتالية حسابية .

لدينا ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}\\ &= \frac{3u_n+1}{u_n}-\frac{1}{u_n}\\ &= \frac{3u_n}{u_n} \end{aligned}$$

أي : $v_{n+1}-v_n = 3$.

المتتالية (v_n) هي إذا متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها الأول $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = \dfrac{1}{2}$

3)استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

حسب ما سبق :

عبار الحد العام للمتتالية الحسابية (v_n) هي :

$$v_n = 3n+\frac{1}{2} \;,\; n\in\mathbb{N}$$

وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(3n+\frac{1}{2}\right) = +\infty$

لكن : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ يكافئ $u_n = \dfrac{1}{v_n}$ وعليه :

أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{v_n}\right)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

تمرين 26 :***

(u_n) متتالية عددية معرّفة كما يلي : $u_0 = 5$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

1 -) – أ) أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المستقيم (Δ) الذّي معادلته $y = x$ والمنحني (d) الممثّل للدّالة f المعرّفة علي $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = \frac{2}{3}x + 2$$

- ب) باستعمال الرّسم السّابق ، مثّل علي حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود : u_0 ؛ u_1 ؛ u_2 ؛ u_3 و u_4

- جـ) ضع تخمينا حول اتّجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها .

2 -) – أ) برهن بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n \leq 6$.

- ب) تحقّق أنّ (u_n) متزايدة .

- جـ) هل (u_n) متقاربة ؟ برّر جوابك .

3 -) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$.

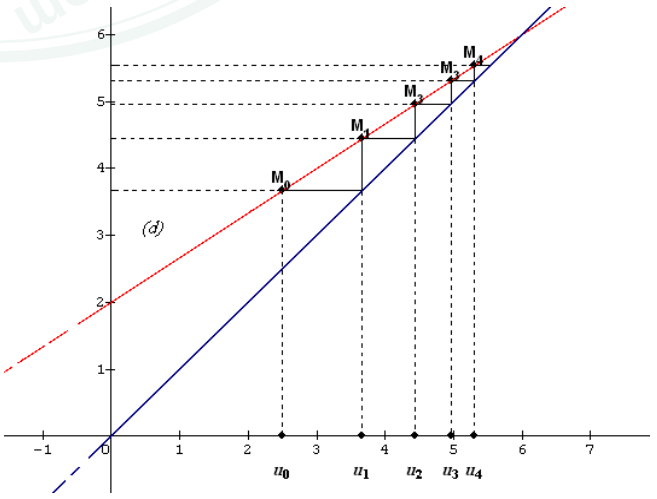
- أ) أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية .

- ب) أكتب عبارة (u_n) بدلالة n ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

عن بكالوريا 2008

الحل :

1 -) – أ) نرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المستقيم (Δ) والمنحني (d) .



- ب) باستعمال الرّسم السّابق ، نمثّل علي حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 .

(أنظر الشّكل أعلاه) .

-جـ)وضع تخمين حول اتّجاه تغيّر وتقارب المتتالية (u_n)

بيانيا نلاحظ ما يلي :

- $u_0 \prec u_1 \prec u_2 \prec u_3 \prec u_4$:

ومنهك إذا كانت المتتالية (u_n) رتيبة ، فهي حتما متزايدة .

- النّقط $M_n(u_n; f(u_n))$ تقترب من نقطة تقاطع (d) و(Δ) .

هذا يعني أن المتتالية (u_n) متقاربة .

2 -) – أ)نبرهن بالتّراجع أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$: $u_n \leq 6$

لتكن $P(n)$ الخاصّية :

$$P(n): u_n \leq 6 \quad ; n \in \mathbb{N}$$

- نتحقّق من صحّة $P(0)$

من أجل $n = 0$ يكون $u_0 = \frac{5}{2}$ أي $u_0 \leq 6$.

$P(0)$ هي إذا صحيحة .

- نفرض صحّة $P(n)$ عند رتبة معيّنة n أي نفرض أنّ $u_n \leq 6$ ونبيّن أنّ $P(n+1)$ صحيحة أي نبيّن أنّ $u_{n+1} \leq 6$.

لدينا وحسب فرضية التّراجع : $u_n \leq 6$ ومنه

$\frac{2}{3}u_n + 2 \leq 6$ اي $\frac{2}{3}u_n \leq 4$

وبالتّالي : $u_{n+1} \leq 6$.

$P(n+1)$ صحيحة.

- ممّا سبق وحسب مبدأ الاستدلال بالتّراجع ينتج :

من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n \leq 6$.

- ب) نتحقّق أنّ متتالية (u_n) متزايدة .

لهذا نتحقّق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

لدينا ومن أجل كلّ عدد طبيعي n :

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

أي $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+2-u_n$

$u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{3}u_n+2$

$=\frac{1}{3}(6-u_n)$

بما أنّ $(6-u_n)\geq 0$ فإنّ $\frac{1}{3}(6-u_n)\geq 0$. إذا :

من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n\geq 0$.

المتتالية (u_n) متتالية متزايدة.

- جـ) ننظر إن كانت المتتالية (u_n) متقاربة مع التّبرير.

المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 6 .

حسب مبرهنة التقارب الرّتيب (u_n) متتالية متقاربة

3 -) – أ) إثبات أنّ (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأوّل v_0 .

من اجل كلّ عدد طبيعي n :

$v_{n+1}=u_{n+1}-6$ أي $v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-4$

$=\frac{2}{3}(u_n-6)$

أي من أجل كلّ عدد طبيعي n : $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$.

المتتالية (v_n) هي إذا متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ وحدّها الأوّل v_0 حيث $v_0=u_0-6$ أي $v_0=-\frac{7}{2}$.

- ب) *) كتابة عبارة u_n بدلالة n .

لدينا : $v_n=u_n-6$ يكافئ $u_n=v_n+6$.

بما أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها q وحدّها الأوّل v_0 فإنّ عبارة حدّها العامّ معطاة بالعلاقة : $v_n=v_0\times q^n$.

في هذه الحالة :

من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n=\left(-\frac{7}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n+6$

*) استنتاج نهاية المتتالية (u_n) .

$\lim_{x\to+\infty}u_n=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n+6\right]$; $\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$

$=6$.

ملاحظة :

يمكن إتّباع الطّريقة الآتية : المتتالية (u_n) هي مجموع المتتاليتين المتقاربتين $n\mapsto v_n$ (هندسية تتقارب نحو 0) و $n\mapsto 6$ (ثابتة : تتقارب نحو 6) إذا المتتالية (u_n) متقاربة وتتقارب نحو 6 .

تمرين 27 :***

1 -) نعتبر الدّالة f المعرّفة علي المجال $I=[1;2]$ بالعبارة $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$.

- أ) بيّن أنّ الدّالة f متزايدة تماما علي I .

- ب) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلي المجال I .

2 -) (u_n) هي المتتالية المعرّفة علي $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

- أ) برهن بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ؛ u_n ينتمي إلي I .

- ب) أدرس إتّجاه المتتالية (u_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة .

3 -) - أ) برهن بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$

- ب) عيّن نهاية المتتالية (u_n) .

عن بكالوريا2008

الحل:

1) – أ-) نبيّن أنّ f متزايدة تماما علي I

لهذا يكفي أن نتحقّق أنّه من أجل كلّ x من I ؛ $f'(x)\succ 0$

من أجل كلّ x من المجال $[1;2]$:

$f'(x)=\frac{(-x+4)-(-1)(x+2)}{(-x+4)^2}$

$=\frac{2}{(-x+4)^2}$

نلاحظ أنّه من أجل كلّ x من I ؛ $f'(x)\succ 0$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

f دالّة متزايدة تماما علي المجال I .

- ب) نبيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من I ؛ $f(x)\in I$.

بما أنّ الدّالة f متزايدة تماما علي I فهي تحفظ التّرتيب وهذا معناه :

إذا كان $1\le x\le 2$ فإنّ $f(1)\le f(x)\le f(2)$.

لدينا : $f(1)=1$ ، $f(2)=2$. وعليه :

إذا كان $1\le x\le 2$ فإنّ $1\le f(x)\le 2$

2 -) أ-) نبيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ؛ $1\le u_n\le 2$

نضع : $P(n):1\le u_n\le 2$

- نتحقّق من صحّة $P(0)$

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=\frac{3}{2}$. إذا $P(0)$ صحيحة .

- نفرض أنّه عند رتبة معيّنة n ؛ $P(n)$ صحيحة أي نفرض أنّ $1\le u_n\le 2$ ونبيّن صحّة $P(n+1)$ أي نبيّن أنّ $1\le u_{n+1}\le 2$.

حسب فرضيّة التّراجع لدينا : $1\le u_n\le 2$

الدّالة f متزايدة تماما علي المجال $[1;2]$ وبالتّالي $f(1)\le f(u_n)\le f(2)$ أي : $1\le u_{n+1}\le 2$.

إذا $P(n+1)$ صحيحة .

- ممّا سبق وحسب مبدأ الاستدلال بالتّراجع ينتج :

من أجل كلّ عدد طبيعي n : $1\le u_{n+1}\le 2$.

- ب) * دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

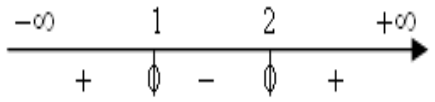
لهذا ندرس في $\mathbb{N}$ إشارة الفرق $(u_{n+1}-u_n)$.

من أجل كلّ عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2}{-u_n+4}-u_n$$

$$=\frac{u_n^2-3n+2}{-u_n+4}$$

* لكثير الحدود x^2-3x+2 جذران متمايزان هما 1 و 2 وإشارته كما يلي :



إذا بوضع $u_n=x$ ينتج : من أجل كلّ u_n من $[1,2]$:

$u_n^2-3n+2\le 0$

ثمّ :بما أنّ $1\le u_n\le 2$ فإنّ $-4+u_n\prec 0$.

في هذه الحالة : من أجل كلّ عدد طبيعي n :

$u_{n+1}-u_n\le 0$

المتتالية (u_n) متتالية متناقصة علي $\mathbb{N}$.

* استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة .

بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي إذا متتالية متقاربة (حسب مبرهنة التّقارب الرّتيب) .

3 -) – أ) نبرهن بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n :

$$u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$$

نضع : $P'(n)$: $u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$; $n\in\mathbb{N}$

- نتحقّق من صحّة $P'(0)$.

$$1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^0+1}=\frac{3}{2}$$

$=u_0$ إذا $P'(0)$ صحيحة .

- نفرض أنّ $P'(n)$ صحيحة عند رتبة معيّنة n ونبيّن أنّ $P'(n+1)$ صحيحة ؛ أي نبيّن ما يلي : $u_{n+1}=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$.

لدينا وحسب تعريف المتتالية (u_n) : $u_{n+1}=\frac{u_n+2}{-u_n+4}$

حسب فرضيّة التّراجع وبتعويض u_n بقيمته نجد :

$$u_{n+1}=\frac{1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}+2}{-1-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+4}}$$ أي $$u_{n+1}=\frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+4}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}$$

$$=\frac{\left[3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2\right]+2}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}$$

$$=1+\frac{2}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

تمرين 29 :

a عدد حقيقي .

(u_n) هي المتتالية المعرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 2}{u_n + 2} \end{cases}.$$

I) نفرض أنّ $a = 1$.

بالتراجع ؛ أثبت أنّ المتتالية (u_n) ثابتة.

II) في كل مما يلي نأخذ $a = \dfrac{3}{2}$.

1) بالتراجع ؛ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$1 \prec u_n \prec 2$

2) ادرس انجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنّها متقاربة .

حدد نهاية المتتالية (u_n)

3) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة في $\mathbb{N}$ بـ :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}.$$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q وحدها الأول v_0 .

ب) عبر عن u_n بدلالة n.

جـ) أحسب من جديد نهاية المتتالية (u_n) .

4 –إ)بين انه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$2 - u_{n+1} \leq \frac{6}{7}(2 - u_n).$$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{6}{7}\right)^n .$$

جـ) تحقق من نهاية المتتالية (u_n)

الحل :

I) بالتراجع ؛ نثبت أنّ المتتالية (u_n) ثابتة.

((u_n) ثابتة في $\mathbb{N}$) معناه ($u_n = a = 1$)

لهذا نضع : $P(n) : u_n = 1 \;, n \in \mathbb{N}$.

- لدينا فرضا $u_0 = 1$ ومنه $P(0)$ صحيحة.
- نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة أي $u_n = 1$

ونبين أنّ $P(n+1)$ صحيحة أي : نبين أنّ $u_{n+1} = 1$.

لدينا ما يلي :

$u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 2}{u_n + 2}$. حسب فرضية التراجع : $u_n = 1$

$$= \frac{5(1) - 2}{1 + 2}$$

$$= 1$$

إذا $P(n+1)$ صحيحة

مما سبق وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع :

المتتالية (u_n) متتالية ثابتة من أجل $a = 1$.

II-1) بالتراجع ؛ نثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \prec u_n \prec 2$.

بوضع : $P(n) : 1 \prec u_n \prec 2$.

أ) نتحقق من صحة $P(0)$.

لدينا فرضا $u_0 = \dfrac{3}{2}$. إذا : $1 \prec u_0 \prec 2$.

وعليه : $P(0)$ صحيحة .

ب)نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي نفرض صحة ما يلي

$1 \prec u_n \prec 2$.

ونبين صحة $P(n+1)$ اي نبين ما يلي :

$1 \prec u_{n+1} \prec 2$

نقارن بين u_{n+1} وكل من 1 و 2 .

لدينا :

- $u_{n+1} - 1 = \dfrac{5u_n - 2}{u_n + 2} - 1$ أي $u_{n+1} = \dfrac{4(u_n - 1)}{u_n + 2}$

حسب فرضية التراجع : $1 \prec u_n \prec 2$ وعليه :

ينتج $u_{n+1} - 1 \succ 0$ وهذا معناه $\begin{cases} (u_n - 1) \succ 0 \\ (u_n + 2) \succ 0 \end{cases}$

$u_n \succ 1$ ... (1)

- $u_{n+1} - 2 = \dfrac{5u_n - 2}{u_n + 2} - 2$ أي $u_{n+1} = \dfrac{3(u_n - 2)}{u_n + 2}$

ينتج : $u_{n+1} - 2 \prec 0$ وهذا معناه : $\begin{cases} (u_n - 2) \prec 0 \\ (u_n + 2) \succ 0 \end{cases}$

$u_n \prec 2$ ... (2)

من (1) و (2) نستنتج انّ $P(n+1)$ صحيحة.

- مما سبق وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع :

من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \prec u_n \prec 2$

2) ندرس انجاه تغير المتتالية (u_n) ثم نستنتج أنّها متقاربة.

لهذا ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ مع $1 \prec u_n \prec 2$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{5u_n-2}{u_n+2}-u_n$

$=\dfrac{-u_n^2+3u_n-2}{u_n+2}$

إشارة الفرق من إشارة $\left(-u_n^2+3u_n-2\right)$

ملاحظة :

يمكن دراسة-في $\mathbb{R}$- إشارة كثير الحدود $\left(-x^2+3x-2\right)$ ثم استنتاج إشارة المقدار $\left(-u_n^2+3u_n-2\right)$

$\left(-u_n^2+3u_n-2\right)$ ينعدم عند كل من 1و 2 .

ومنه : $\left(-u_n^2+3u_n-2\right)=-\left(u_n-1\right)\left(u_n-2\right)$

حسب ما سبق :

إذا : $\left[-\left(u_n-1\right)\left(u_n-2\right)\geq 0\right]$ $\begin{cases}u_n-1\geq 0\\ u_n-2\leq 0\end{cases}$

المتتالية $\left(u_n\right)$ متتالية متزايدة .

- المتتالية $\left(u_n\right)$ متزايدة
- المتتالية $\left(u_n\right)$ محدودة من الأعلى بالعدد 1.

إذا : $\left(u_n\right)$ متتالية متقاربة .

- نحدد نهاية المتتالية $\left(u_n\right)$.

نفرض أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$.

l حل للمعادلة ... $l=\dfrac{5l-2}{l+2}$ (1) و $1\prec l\prec 2$.

(1) تكافئ $l^2-3l+2=0$

يوجد حلان للمعادلة هما $l_1=1$ ؛ $l_2=2$.

بما أن $\left(u_n\right)$ متزايدة نأخذ $l=2$

أي : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$.

3 -أ) بين أن $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q وحدها الأول v_0 .

من اجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}-2}$

$=\dfrac{\dfrac{5u_n-2}{u_n+2}-1}{\dfrac{5u_n-2}{u_n+2}-2}$ أي $v_{n+1}=\dfrac{\dfrac{5u_n-2-u_n-2}{u_n+2}}{\dfrac{5u_n-2-u_n-4}{u_n+2}}$

$=\dfrac{4u_n-4}{3u_n-6}$

أي $v_{n+1}=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{u_n-1}{u_n-2}\right)$

$=\dfrac{4}{3}v_n$

وبالتالي $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية اساسها $q=\dfrac{4}{3}$

وحدها الأول $v_0=\dfrac{u_0-1}{u_0-2}=-1$

ب) نعبر عن u_n بدلالة n.

من العلاقة $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n-2}$:نجد : $v_n\left(u_n-2\right)=u_n-1$

معناه $u_n\left(v_n-1\right)=2v_n-1$

معناه $u_n=\dfrac{2v_n-1}{v_n-1}$...(2)

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية $\left(v_n\right)$ هي :

$v_n=(-1)\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$.

بتعويض v_n بقيمته في (2) نجد :

أي : $u_n=\dfrac{-2\left(\dfrac{4}{3}\right)^n-1}{-\left(\dfrac{4}{3}\right)^n-1}$ $u_n=\dfrac{2\left(\dfrac{4}{3}\right)^n+1}{\left(\dfrac{4}{3}\right)^n+1}$.

جـ) نحسب من جديد نهاية المتتالية . $\left(u_n\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=?$, $\left(\dfrac{4}{3}\right)^n\to+\infty$.

لدينا حالة عدم التعيين من الشكل $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(\dfrac{4}{3}\right)^n\left[2+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right]}{\left(\dfrac{4}{3}\right)^n\left[1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right]}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$

بما أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n=0$ لأن : $-1\prec\dfrac{3}{4}\prec 1$ فإنّ :

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

4)- أ)بين انه من أجل كل عدد طبيعي n :
$2-u_{n+1}\le\frac{6}{7}(2-u_n)$.

يكفي أن نبين أن : $2-u_{n+1}-\frac{6}{7}(2-u_n)\le 0$.

لدينا :

$$2-u_{n+1}=2-\frac{5u_n-2}{u_n+2}$$

$$=\frac{-3u_n+6}{u_n+2}\quad \text{أي :}\quad 2-u_{n+1}=\frac{-3(u_n-2)}{u_n+2}.$$

ومنه :

$$2-u_{n+1}-\frac{6}{7}(2-u_n)=\frac{-3(u_n-2)}{u_n+2}+\frac{6}{7}(u_n-2)$$

$$=(u_n-2)\left[\frac{-3}{u_n+2}+\frac{6}{7}\right]$$

$$=(u_n-2)\left(\frac{6u_n-9}{7(u_n+2)}\right).$$

لدينا : المتتالية (u_n) متزايدة وهذا معناه :

من أجل كل عدد طبيعي n $u_n\ge u_0$ أي $u_n\ge\frac{3}{2}$.

وعليه :

$$\frac{6u_n-9}{7(u_n+2)}\ge 0 \text{ أي } \begin{cases}6u_n-9\ge 6\left(\frac{3}{2}\right)-9=0\\ 7(u_n+2)\succ 0\end{cases}$$

ثم : $u_n\prec 2$ إذا $(u_n-2)\prec 0$

وعليه :

$$(u_n-2)\left(\frac{6u_n-9}{7(u_n+2)}\right)\ge 0$$

إذا من أجل كل عدد طبيعي n:

$2-u_{n+1}\le\frac{6}{7}(2-u_n)$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$2-u_n\le\frac{1}{2}\left(\frac{6}{7}\right)^n$.

وجدنا : من أجل كل عدد طبيعي n:

$2-u_{n+1}\le\frac{6}{7}(2-u_n)$.

وعليه يمكننا أن نكتب :

$$2-u_1\le\frac{6}{7}(2-u_0)$$

$$2-u_2\le\frac{6}{7}(2-u_1)$$

$$2-u_3\le\frac{6}{7}(2-u_1)$$

...

...

$$2-u_{n-1}\le\frac{6}{7}(2-u_{n-2})$$

$$(2-u_n)\le\frac{6}{7}(2-u_{n-1}).$$

لدينا n متباينة ذات أطراف موجبة وبالتالي وبالضرب طرفا لطرف يأتي :

$$(2-u_1)(2-u_2)(2-u_3)\times\ldots\times(2-u_{n-1})(2-u_n)$$

$$\le$$

$$\frac{6}{7}(2-u_0)\frac{6}{7}(2-u_1)\frac{6}{7}(2-u_2)\times\ldots\times\frac{6}{7}(2-u_{n-1})$$

ينتج : $2-u_n\le\frac{6}{7}\times\frac{6}{7}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{6}{7}(2-u_0)$

n عاملا

بتعويض u_0 بقيمته نجد : $2-u_n\le\frac{1}{2}\left(\frac{6}{7}\right)^n$

جـ) نتحقق من نهاية المتتالية (u_n)

حسب ما سبق يمكن أن نكتب :

$$0\prec 2-u_n\le\frac{1}{2}\left(\frac{6}{7}\right)^n$$

تمرين 30:

نعرّف في $\mathbb{N}^*$ المتتالية (u_n) بـ : $u_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

1) – أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n : $0\prec\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\prec 1$.

- ب) تحقّق أنّه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1}-u_n=\ln\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)$.

استنتج رتابة المتتالية (u_n) .

2) نضع: $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$.

- أ) أثبت أنّ $S_n=\ln(n+1)$

- ب) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

3)نعرّف المجموع w_n بـ : $w_n=u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{2n}$.

- أ) بيّن أنّ $w_n=\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$.

- ب) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

الحل :

1) – أ) نبيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n : $0 \prec \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} \prec 1$.

نلاحظ أنّ : $\frac{n^2+2n}{n^2+n+1} = \frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}$

$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $(n+1)^2 \succ 1$ وعليه :

$\frac{1}{(1+n)^2} \prec 1$.

في هذه الحالة ينتج : $\begin{cases} 1-\frac{1}{(n+1)^2} \succ 0 \\ 1-\frac{1}{(n+1)} \prec 1 \end{cases}$ ومنه :

$0 \prec \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} \prec 1$

- ب) تحقّق أنّه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)$.

$u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$= \ln\left[\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right]$

$= \ln\left(\frac{n+2}{n+1} \times \frac{n}{n+1}\right)$

$= \ln\left(\frac{n^2+2n}{n^n+2n+1}\right)$

نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $0 \prec x \prec 1$: $\ln x \prec 0$.

حسب ما سبق : $0 \prec \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} \prec 1$ ومنه :

$\ln\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right) \prec 0$ أي : $u_{n+1} - u_n \prec 0$

المتتالية (u_n) هي إذا متتالية متناقصة .

- أ) أثبت أنّ $S_n = \ln(n+1)$

لدينا :

S_n هو مجموع n حدا الأولي من (u_n).

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$

=

$\ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$S_n = \ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \ldots \times \frac{n}{n-1} \times \frac{n+1}{n}\right)$

$= \ln(n+1)$

- ب) نستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$

3- أ) نبيّن أنّ $w_n = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$.

لدينا $w_n = u_n + u_{n+1} + \ldots u_{2n-1} + u_{2n}$

$= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right) + \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)$

$w_n = \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \ldots \times \frac{2n}{2n-1} \times \frac{2n+1}{2n}\right)$

$= \ln\left(\frac{1}{n} \times \frac{2n+1}{1}\right)$

إذا : $w_n = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$

- ب) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$

$= \ln 2 \ ; \left(\frac{2n+1}{n}\right) \to 2$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com