najah213.com · نجاح 213

مجلة العبقري في الرياضيات (الأعداد المركبة والتحويلات النقطية)

الملخص // الشعبة: علوم تجريبية؛ تقني رياضي.

ملخص: حول الأعداد المركبة// التحضير الجيد بكالوريا // الشعبة: علوم تج؛ تر.

1 تعاريف ونتائج:

1 تعاريف

كل عدد مركب z يُكتب من الشكل $\boxed{z = x + iy}$،

حيث x وَ y **عددان حقيقيان**

وَ i عدد تخيّلي يُحقق $\boxed{i^2 = -1}$.

ملاحظات وترميز:

- الكتابة $\boxed{z = x + iy}$، تسمى **الشكل الجبري** لـz.
- x يسمى **الجزء الحقيقي** لـz ونرمز له بـ: $\boxed{x = Re(z)}$.
- y يسمى **الجزء التخيلي** لـz ونرمز له بـ: $\boxed{y = Im(z)}$.
- إذا كان: $Im(z) = 0$؛ فإنّ: $z = x$ فنقول أنّ: z **حقيقي**.
  إذا كان: $Re(z) = 0$؛ فإنّ: $z = yi$ فنقول أنّ: z **تخيلي صرف (أو تخيلي بحت)**.
  إذا كان: $Re(z) = Im(z) = 0$؛ فإنّ: $z = 0$ إذن: 0 هو في آنٍ واحد **حقيقي وَتخيلي صرف**.

نتيجة:

$\boxed{z = 0}$، **معناه:** $\boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}}$.

2 تساوي عددين مركبين

تعريف:

يكون عددان مركبان z و z' **متساويين**
إذا وفقط إذا كان لهما

- نفس **الجزء الحقيقي**
- وَنفس **الجزء التخيلي**.

بوضع:

$\boxed{z = x + iy}$،

وَ

$\boxed{z' = x' + iy'}$.

$\boxed{z = z'}$، **معناه:** $\boxed{\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}}$.

3 التمثيل الهندسي لعدد مركب

- نُنسب المستوي إلى **معلم متعامد ومتجانس** $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

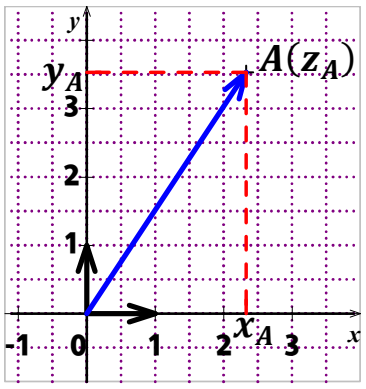
- يسمى كل من M وَ $\overrightarrow{OM}$ **صورة** z.
- ويسمى z **لاحقة** كل من M وَ $\overrightarrow{OM}$؛ نكتب: $\boxed{M(z)}$؛ $\boxed{\overrightarrow{OM}(z)}$.

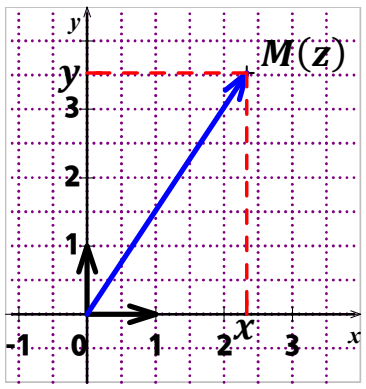
يُمثل العدد المركب $\boxed{z = x + iy}$ بالنقطة $\boxed{M(x; y)}$.

نتائج:

- محور **الفواصل** (محور **الأعداد الحقيقية**)
- محور **التراتيب** (محور **الأعداد التخيلية**)
- **لاحقة الشعاع** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ هي: $z_A + z_B$
- **لاحقة الشعاع** $\overrightarrow{AB}$ هي: $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
  حيث: $A(z_A)$ وَ $B(z_B)$

$z_A = x_A + iy_A$ ($Re(z_A) = x_A$ وَ $Im(z_A) = y_A$)





www.dzexams.com

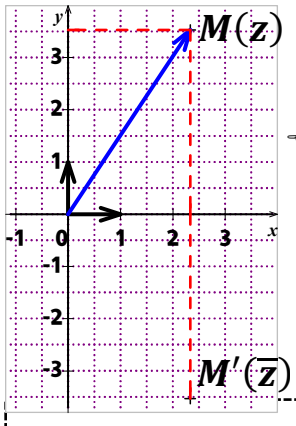
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

2 مرافق عدد مركب:

1 مرافق عدد مُركب



☜ صورتا العددين المُركبين **المترافقين**؛ **متناظرتان** بالنسبة إلى **محور الفواصل**

مُرافق العدد المركب $z = x + iy$، هوَ العدد المُركب $\overline{z} = x - iy$.
(نقوم **بتغيير إشارة الجزء التخيلي** فقط)

2 خواص المُرافق

خواص مباشرة من التعريف

① $\overline{\overline{z}} = z$
② $z + \overline{z} = 2x$
③ $z - \overline{z} = 2iy$
④ $z.\overline{z} = x^2 + y^2$

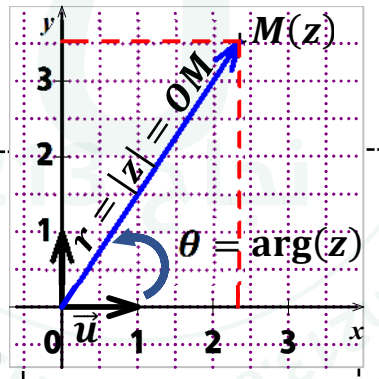
المُرافق والعمليات

① $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
② $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$
③ $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$
④ $(k \in \mathbb{R})$ $\overline{kz} = k\overline{z}$
⑤ $(z' \neq 0)$ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
⑥ $(z \neq 0$ و $k \in \mathbb{R})$ $\overline{\left(\frac{k}{z}\right)} = \frac{k}{\overline{z}}$
⑦ $(n \in \mathbb{N}^*)$ $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

- z **حقيقي، معناه:** $\overline{z} = z$.
- z **تخيلي صرف، معناه:** $\overline{z} = -z$.

☜ **يُمكن** استخدام **المُرافق** لإثبات أنّ z **حقيقي، أو تخيلي صرف.**

3 طويلة وعُمدة عدد مركب:



الطويلة

1 تعريف

$z = x + iy \neq 0$ صورته M.

طويلة z:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = OM$

- في حالة: $z = 0$، فإنّ: $|z| = 0$.

2 خواص الطويلة

خواص الطويلة

① $|\overline{z}| = |-z| = |z|$
② $z.\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
③ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ $(z' \neq 0)$
④ $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ $(z \neq 0)$
⑤ $|z.z'| = |z|.|z'|$
⑥ $|z^n| = |z|^n$ $(n \in \mathbb{N})$

3 إضافات

- ☹ $|z + z'| \neq |z| + |z'|$ وَ☹ $|z - z'| \neq |z| - |z'|$.
- ☺ $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$ وَ☺ $\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi$.

العُمدة

1 تعريف

عُمدة z:

$\theta = \arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \cdots + 2k\pi$

$\arg(z) \equiv \cdots [2\pi]$ ونكتب: $(k \in \mathbb{Z}$ حيث$)$

- ...، هو **قيس بالراديان** للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

2 خواص العُمدة

خواص العُمدة

(**تذكّر:** خواص " ln ")

① $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')$
② $(z' \neq 0)$ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
③ $(z \neq 0)$ $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
④ $(n \in \mathbb{N}^*)$ $\arg(z^n) = n\arg(z)$

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

4 الشكلان المثلثي والأسي لعدد مركب:

لكتابة عدد مركب z على **الشكل المثلثي** أو **الأسّي**، نحتاج إلى **حساب طويلته** r و**عُمدته** θ.

❶ الإنتقال من شكل إلى آخر

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$$ ، **نستنتج:** $\theta = \arg(z) = \cdots + 2k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)

الشكل الجبري: $z = x + iy$

الشكل المثلثي: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

الشكل الأسي: $z = re^{i\theta}$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (ترميز أولر)

قواعد الحساب على الشكل الأسّي

$(e^{i\theta})^{n} = e^{in\theta}$ ؛ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ (دستور **موافر**)

نجد:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{n} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

إذن: $z^{n} = (re^{i\theta})^{n} = r^{n}e^{in\theta}$ ؛ (حيث $n \in \mathbb{N}^*$)

ومنه:

$$r^{n} = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{n} = r^{n}[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

قواعد الحساب على الشكل الأسّي

(**تذكّر:** خواص " exp ")

① $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$

② $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

③ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

❷ تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث z^n عدد مركب #خاص

z^n	حقيقي	حقيقي موجب	حقيقي سالب	حيث
معناه:	$\arg(z^n) = k\pi$	$\arg(z^n) = 2k\pi$	$\arg(z^n) = \pi + 2k\pi$	(حيث $k \in \mathbb{Z}$)
أي:	$n\theta = k\pi$	$n\theta = 2k\pi$	$n\theta = \pi + 2k\pi$	

z^n	تخيلي صرف	تخيلي صرف و $Im(z^n) > 0$	تخيلي صرف و $Im(z^n) < 0$	حيث
معناه:	$\arg(z^n) = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\arg(z^n) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$\arg(z^n) = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	(حيث $k \in \mathbb{Z}$)
أي:	$n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$n\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$n\theta = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

❸ البحث عن عُمدة عدد ملاكب (استعمال الدائرة المثلثية وأقياس الزوايا الشهيرة)

استنتاج الطويلة والعُمدة في حالات خاصة

- في حالة: $z = x > 0$، فإنّ: $|z| = |x| = x$ وَ $arg(z) = 0 + 2k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)
- في حالة: $z = x < 0$، فإنّ: $|z| = |x| = -x$ وَ $arg(z) = \pi + 2k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)
- في حالة: $z = iy$ وَ $y > 0$، فإنّ: $|z| = |y| = y$ وَ $arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)
- في حالة: $z = iy$ وَ $y < 0$، فإنّ: $|z| = |y| = -y$ وَ $arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)

❹ دساتير التحويل

نُستعمل للتحويل إلى الشكل المثلي، ولها إستعمالات أخرى:

① $\begin{cases}\cos(x+2k\pi)=\cos(x)\\ \sin(x+2k\pi)=\sin(x)\end{cases}; (k\in\mathbb{Z})$ ، ② $\begin{cases}\cos(-x)=\cos(x)\\ \sin(-x)=-\sin(x)\end{cases}$ ،

③ $\begin{cases}\cos(\pi+x)=-\cos(x)\\ \sin(\pi+x)=-\sin(x)\end{cases}$ ، ④ $\begin{cases}\cos(x-\pi)=-\cos(x)\\ \sin(\pi-x)=\sin(x)\end{cases}$ ،

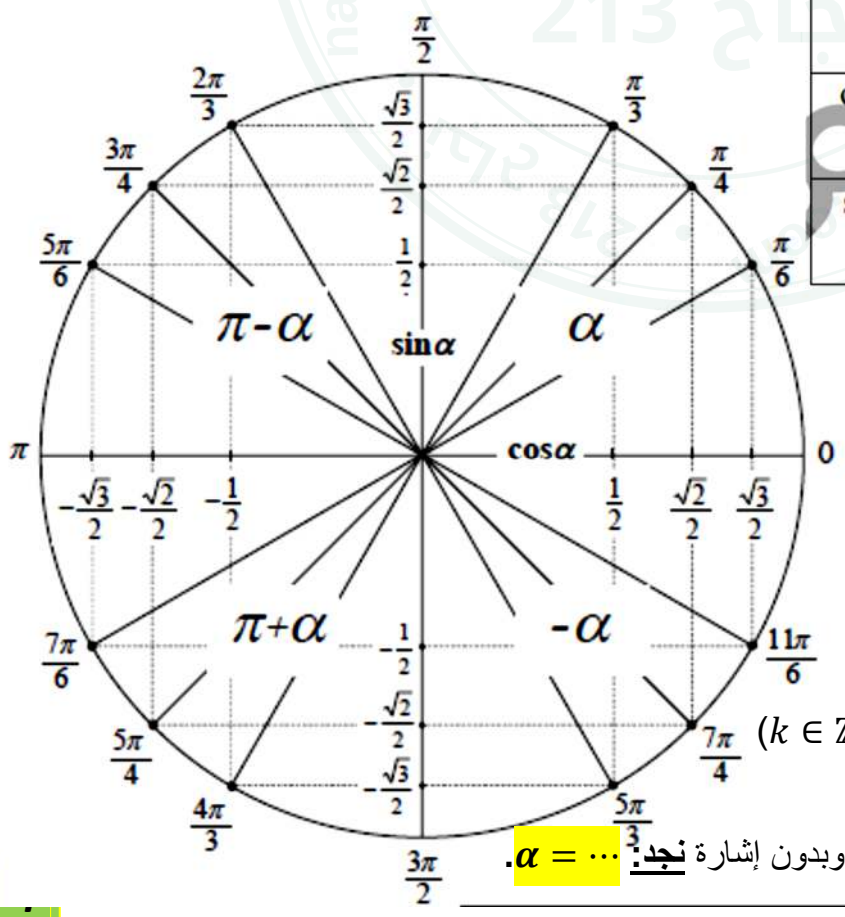
⑤ $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)\end{cases}$ ، ⑥ $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)\end{cases}$ ،

❺ الدائرة المثلثية وجدول النسب المثلثية لأقياس شهيرة (تستعمل في حساب العُمدة)

الجدول

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

الدائرة



$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}\cos\theta = \frac{x}{r}\\ \sin\theta = \frac{y}{r}\end{cases}$$ ،

نجد:

$$\begin{cases}\theta = \arg(z) = \alpha + 2k\pi\\ \theta = \arg(z) = \pi - \alpha + 2k\pi\\ \theta = \arg(z) = \pi + \alpha + 2k\pi\\ \theta = \arg(z) = -\alpha + 2k\pi\end{cases}$$ ؛ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)

صورة z تقع في **الرُبع** ...؛ حسب إشارة $\frac{x}{r}$ وَ $\frac{y}{r}$. وبدون إشارة **نجد:** $\alpha = \cdots$.

www.dzexams.com

⑥ حل بعض المعادلات في $\mathbb{C}$

معادلات من الشكل az^2+bz+c (حيث $a\neq 0$)

مميزها:

$$\Delta = b^2-4ac$$

① $\boxed{\Delta=0}$،

تقبل حل مضاعف

$\boxed{z_0=-\frac{b}{a}}$،

التحليل:

$$az^2+bz+c=a(z-z_0)^2$$

② $\boxed{\Delta\neq 0}$،

$\boxed{\Delta=(w_1)^2=(w_2)^2}$

$w_1=-w_2$ وَهما **الجذران التربيعيان** لـΔ.

إيجاد أحد الجذران التربيعيان لـΔ:

$\boxed{\Delta=\alpha+i\beta}$،

نقوم بحل الجملة التالية

$$\begin{cases} x^2+y^2=|\Delta|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} & (1)\\ x^2-y^2=Re(\Delta)=\alpha & (2)\\ 2xy=Im(\Delta)=\beta & (3)\end{cases}$$

ملاحظة: باستعمال المعادلة (3)؛ تُحدد **إشارة** x وَy

$w_1=x_1+iy_1$ وَ$w_2=-w_1=x_2+iy_2$.

الحلان هما $\boxed{z_1=\frac{-b-w_1}{2a}}$، وَ$\boxed{z_2=\frac{-b+w_1}{2a}}$

نأخذ **أحد الجذرين** لإيجاد **الحلان**.

التحليل:

$$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$$

هام: في حالة a، b وَc **أعداد حقيقية**، فإنّ: **الحلان مترافقان**؛ أي: $\boxed{z_1=\overline{z_2}}$.

5 توظيف الأعداد المركبة في الهندسة:

① التفسير الهندسي للطويلة والعُمدة

الطويلة والعمدة	التفسير الهندسي
① طويلة وعُمدة z (z **لاحقة** كل من **النقطة** M؛ وَ**الشعاع** $\overrightarrow{OM}$)	① $\begin{cases}\lvert z\rvert=OM\\ \arg(z)=(\vec{u};\overrightarrow{OM})\end{cases}$
② طويلة وعُمدة z_A (z_A **لاحقة** كل من **النقطة** A؛ وَ**الشعاع** $\overrightarrow{OA}$)	② $\begin{cases}\lvert z_A\rvert=OA\\ \arg(z_A)=(\vec{u};\overrightarrow{OA})\end{cases}$
③ طويلة وعُمدة (z_B-z_A) ($z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$ **لاحقة الشعاع** $\overrightarrow{AB}$)	③ $\begin{cases}\lvert z_B-z_A\rvert=AB\\ \arg(z_B-z_A)=(\vec{u};\overrightarrow{AB})\end{cases}$

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

④ طويلة وعُمدة $\frac{z_B}{z_A}$ $(A \neq O$ وَ $B \neq O)$ (**لاحظ أنّ:** $\frac{z_B}{z_A} = \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}$)	④ $\begin{cases} \left\|\frac{z_B}{z_A}\right\| = \frac{\|z_B\|}{\|z_A\|} = \frac{OB}{OA} \\ \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \end{cases}$؛ (المقام أولا في arg)
⑤ طويلة وعُمدة $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ $(B \neq A$ وَ $C \neq A)$	⑤ $\begin{cases} \left\|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right\| = \frac{\|z_C - z_A\|}{\|z_B - z_A\|} = \frac{AC}{AB} \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \end{cases}$؛ (المقام أولا بالعكس في arg)

❷ لاحقة المرجح

النقطة (المرجح)	لاحقتها
① لاحقة النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ (I **مرجح** A وَ B بنفس المعاملات؛ وتُأخذ 1)	① $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
② لاحقة النقطة H مركز ثقل المثلث ABC (H **مرجح** A ، B وَ C بنفس المعاملات؛ وتُأخذ 1)	② $z_H = \frac{z_A + z_B + z_C}{2}$
③ لاحقة النقطة G **مرجح** الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$	③ $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$

❸ تداور النقط

إذا كان	نستنتج أنّ
① $\|z_A\| = \|z_B\| = \|z_C\| = \|z_D\| = r$ **معناه:** $OA = OB = OC = OD = r$	① النقط A، B، C وَ D **تنتمي إلى نفس الدّائرة** ذات المركز O ونصف القطر r.
② $\|z_A - z_\omega\| = \|z_B - z_\omega\| = \|z_C - z_\omega\| = \|z_D - z_\omega\| = r$ **معناه:** $\omega A = \omega B = \omega C = \omega D = r$	② النقط A، B، C وَ D **تنتمي إلى نفس الدّائرة** ذات المركز ω ونصف القطر r.

❹ إستقامية النقط

إذا كان	نستنتج أنّ
① $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R}$؛ (حيث $B \neq A$) **معناه:** $arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = arg(k) = k\pi$؛ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) **أي:** $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = k\pi$؛ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) **زاوية مستقيمة**	① النقط A، B وَ C **في إستقامية.**
② $\frac{z_B}{z_A} = k \in \mathbb{R}$؛ (حيث $A \neq O$) $\left(\frac{z_B}{z_A} = \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = k\right)$ **معناه:** $arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = arg(k) = k\pi$؛ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) **أي:** $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = k\pi$؛ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) **زاوية مستقيمة**	② النقط O، A وَ B **على إستقامة واحدة.**

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

❺ توازي شعاعين أو مستقيمين

إذا كان	نستنتج أنّ
① $\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}=k\in\mathbb{R}^*$؛ (حيث $A\neq C$ وَ $B\neq D$)	① $\overrightarrow{BD}//\overrightarrow{AC}$ أو $(BD)//(AC)$.
تُكافئ: $z_D-z_B=k(z_C-z_A)$؛	
معناه: $z_{\overrightarrow{BD}}=kz_{\overrightarrow{AC}}$	
أي: $\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{AC}$	

❻ تعامد مستقيمين أو شعاعين

إذا كان	نستنتج أنّ
① $\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}=iy;(y\in\mathbb{R}^*)$؛ (حيث $A\neq C$ وَ $B\neq D$)	① $\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AC}$ أو $(BD)\perp(AC)$.
معناه: $\boldsymbol{arg\left(\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}\right)=arg(iy)=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi}$؛ (حيث $k\in\mathbb{Z}$)	
أي: $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BD}\right)=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$؛ (حيث $k\in\mathbb{Z}$) زاوية قائمة	
② $\frac{z_B}{z_A}=iy;(y\in\mathbb{R}^*)$؛ (حيث $A\neq O$ وَ $B\neq O$)	② $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OA}$ أو $(OB)\perp(OA)$.
معناه: $\boldsymbol{arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=arg(iy)=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi}$؛ (حيث $k\in\mathbb{Z}$)	
أي: $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$؛ (حيث $k\in\mathbb{Z}$) زاوية قائمة	

❼ طبيعة مثلث

بصفة عامة

☜ طبيعة المثلث OAB؛ حسب طويلة وَعُمدة $\frac{z_B}{z_A}$، وَطبيعة المثلث ABC؛ حسب طويلة وَعُمدة $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

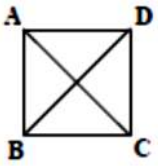
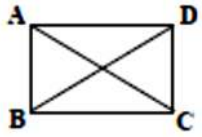
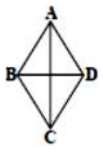
لدينا	معناه (التفسير الهندسي للطويلة والعُمدة)	إذن
① $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\pm i$ $(B\neq A$ وَ $C\neq A)$	① $\begin{cases}\left\|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right\|=\frac{AC}{AB}=\|\pm i\|=1\\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg(\pm i)\end{cases}$ أي: $\begin{cases}AC=AB\\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$ (حيث $k\in\mathbb{Z}$)	① المثلث ABC قائم في A، وَمتساوي الساقين.
② $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=yi\,;y\in\mathbb{R}^*-\{\pm1\}$ $(B\neq A$ وَ $C\neq A)$	② $\begin{cases}\left\|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right\|=\frac{AC}{AB}=\|yi\|\neq1\\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg(yi)\end{cases}$ أي: $\begin{cases}AC\neq AB\\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$ (حيث $k\in\mathbb{Z}$)	② المثلث ABC قائم في A.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

③ $(B \neq A$ وَ $C \neq A)$ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$	③ $\begin{cases}\left\|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right\| = \frac{AC}{AB} = \left\|e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\right\| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) = \arg\left(e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\right)\end{cases}$ **أي:** $\begin{cases}AC = AB \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\end{cases}$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)	③ المثلث ABC **متقايس الأضلاع**.
④ $\lvert z_C - z_A\rvert = \lvert z_C - z_B\rvert = \lvert z_B - z_A\rvert$	④ $AC = BC = AB$	④ المثلث ABC **متساوي الأضلاع**.
⑤ $\lvert z_C - z_A\rvert = \lvert z_B - z_A\rvert$ (العلاقة **غير كافية**؛ للحكم على **طبيعة المثلث**)	⑤ $AC = AB$	⑤ **مُرعاة شروط أخرى (العُمدة)**

تذكّر أنه: **كل** عدد مركب **طويلته 1**؛ وَ **θ عُمدة له**، يُكتب من الشكل $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (ترميز أولر).

⑧ طبيعة رباعي 🖐 بصفة عامة

نُثبت أنّ ☜ / لإثبات أن الرباعي 🖐	الطريقة الأولى	الطريقة الثانية
① $ABCD$ **متوازي أضلاع**. 	① شعاعان متقابلان في نفس الإتجاه متساويان؛ **نُثبت ـمثلاً** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ **معناه:** $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ **أي:** $z_B - z_A = z_C - z_D$.	① **القطران متناصفان**. **أي:** $\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{z_B+z_D}{2}$.
② $ABCD$ **مربع**. 	② شعاعان متقابلان في نفس الإتجاه متساويان؛ وَضلعان متتابعان متقايسان ومتعامدان. **نُثبت ـمثلاً** $\begin{cases}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ AB = AD \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}\end{cases}$ **أي:** $\begin{cases}z_B - z_A = z_C - z_D \\ \lvert z_B - z_A\rvert = \lvert z_D - z_A\rvert \\ \arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\end{cases}$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)	② **القطران متناصفان وَمتقايسان وَمتعامدان**. **أي:** $\begin{cases}\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{z_B+z_D}{2} \\ \lvert z_C - z_A\rvert = \lvert z_D - z_B\rvert \\ \arg\left(\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\end{cases}$
③ $ABCD$ **مستطيل**. 	③ شعاعان متقابلان في نفس الإتجاه متساويان؛ وَضلعان متتابعان متعامدان. **نُثبت ـمثلاً** $\begin{cases}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}\end{cases}$ **أي:** $\begin{cases}z_B - z_A = z_C - z_D \\ \arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\end{cases}$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)	③ **القطران متناصفان وَمتقايسان**. **أي:** $\begin{cases}\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{z_B+z_D}{2} \\ \lvert z_C - z_A\rvert = \lvert z_D - z_B\rvert\end{cases}$
④ $ABCD$ **معين**. 	④ شعاعان متقابلان في نفس الإتجاه متساويان؛ وَضلعان متتابعان متقايسان. **نُثبت ـمثلاً** $\begin{cases}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ AB = AD\end{cases}$ **أي:** $\begin{cases}z_B - z_A = z_C - z_D \\ \lvert z_B - z_A\rvert = \lvert z_D - z_A\rvert\end{cases}$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)	④ **القطران متناصفان وَمتعامدان؛ أي:** $\begin{cases}\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{z_B+z_D}{2} \\ \arg\left(\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\end{cases}$

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

6 توظيف الأعداد المركبة في التحويلات النقطية:

f تحويل نقطي يُرفق بكل نقطة $M(z)$، النقطة $M'(z')$؛ نكتب: $f: M(z) \to M'(z')$ أو $M' = f(M)$.

التحويل f	إنسحاب	تحاكي	دوران	تشابه مباشر
التعريف $M' = f(M)$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$\overrightarrow{\Omega M'} = a\overrightarrow{\Omega M}$	$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$	$\begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$
العبارة المركبة للتحويل f	العبارة ❶ $z' = \boxed{a}z + b$			
إذا كان	$a = 1$	$a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$	$\lvert a\rvert = 1$ وَ $a \in \mathbb{C}^*$	$\lvert a\rvert \neq 1$ وَ $a \in \mathbb{C}^*$
العناصر المميزة للتحويل f	① شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $z_{\vec{u}} = b$.	① نسبته a، ② وَمركزه النقطة الصامدة $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$.	①زاويته $\theta = \arg(a)$، ② وَمركزه النقطة الصامدة $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$.	① نسبته $k = \lvert a\rvert > 0$، ② وَزاويته $\theta = \arg(a)$، ③ وَمركزه النقطة الصامدة $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$.
في حالة $\begin{cases} A' = f(A) \\ B' = f(B) \end{cases}$	تعيين تحويل يُحوّل نقطتين: بالتعويض: $\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \quad (1) \\ z_{B'} = az_B + b \quad (2) \end{cases}$؛ وبالطرح: $a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$ العبارة ❷، ويكون: $z_{B'} - z_{A'} = a(z_B - z_A)$ العبارة ❸.			
في حالة $\begin{cases} A' = f(A) \\ \Omega = f(\Omega) \end{cases}$	تخص التحويلات ذوات المركز: بالتعويض: $\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \quad (1) \\ z_\Omega = az_\Omega + b \quad (2) \end{cases}$؛ وبالطرح: $a = \frac{z_{B'} - z_\Omega}{z_B - z_\Omega}$ العبارة ❹، ويكون: $z_{B'} - z_\Omega = a(z_B - z_\Omega)$ العبارة ❺.			
كتابات أخرى لـ a			في إحدى العبارات **الخمس** $a = e^{i\theta}$	في إحدى العبارات **الخمس** $a = ke^{i\theta}$
إستعمال العلاقات	تُعرف **طبيعة التحويل** f، وَ**عناصره المميزة** من العدد a. نقطة صورة أخرى بالتحويل f، عُد إلى العلاقات الخمس وخاصة ❷، ❸، ❹، وَ ❺.			

7 مجموعات النقط:

❶ المرجح ومجموعات النقط

تحويل العبارة الشعاعية (أو العددية)

إذا كان	فإنّ	ملاحظة
$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$	$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$	حيث G **مرجح** الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$
$\alpha + \beta + \gamma = 0$	$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} =$ شعاع ثابت	بإدخال إحدى النقط **المعلومة** وَاستعمال علاقة **' شال '**؛ نحصل على **شعاع ثابت** (مستقل عن M)
$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$	$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2$	حيث G **مرجح** الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$

تذكّر أنّ: $\left\|(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}\right\| = \lvert\alpha + \beta + \gamma\rvert\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \lvert\alpha + \beta + \gamma\rvert MG$

www.dzexams.com
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

❷ تعيين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي تُحقق شرط معين: 👈

الشرط	مجموعة النقط هي	التعليل
$\|z\| = k$	▪ **دائرة** مركزها O ونصف قطرها $r = k$، (في حالة $k > 0$) ▪ **النقطة** O أي: $(\Gamma) = \{O\}$، (في حالة $k = 0$) ▪ **مجموعة خالية** $\emptyset$ أي: $(\Gamma) = \emptyset$، (في حالة $k = 0$)	$\|z\| = k$ **تُكافئ:** $\boxed{OM = k}$
$\|z - z_A\| = k$	▪ **دائرة** مركزها A ونصف قطرها $r = k$، (في حالة $k > 0$) ▪ **النقطة** A أي: $(\Gamma) = \{A\}$، (في حالة $k = 0$) ▪ **مجموعة خالية** $\emptyset$ أي: $(\Gamma) = \emptyset$، (في حالة $k = 0$)	$\|z - z_A\| = k$ **تُكافئ:** $\boxed{AM = k}$
$\|z - z_A\| = \|z - z_B\|$	▪ **محور** القطعة المستقيمة $[AB]$.	$\|z - z_A\| = \|z - z_B\|$ **تُكافئ:** $\boxed{AM = BM}$

عبارة من الشكل $z = z_\Omega + ke^{i\theta}$ (حيث $\theta \in \mathbb{R}$ و $k \in \mathbb{R}_+^*$)

الشرط	مجموعة النقط هي	التعليل
θ متغيّر و k ثابت	▪ **دائرة** مركزها Ω ونصف قطرها $r = k$.	$\|z - z_\Omega\| = \|ke^{i\theta}\|$ **تُكافئ:** $\boxed{\Omega M = k}$
θ ثابت و k متغيّر	▪ **نصف المستقيم** $[\Omega B)$ **بإستثناء** Ω (لأنّ: $k > 0$، (أي: $\boxed{(\Gamma) = [\Omega B) - \{\Omega\}}$) حيث $B \in (\Gamma)$	$\arg(z - z_\Omega) = \arg(ke^{i\theta})$ **تُكافئ:** $\boxed{(\vec{u}; \overrightarrow{\Omega M}) = \theta + 2k\pi}$

عبارة من الشكل $Z = \frac{z - z_B}{z - z_A}$: (مجموعات نقط تُستخدم فيها العُمدة)

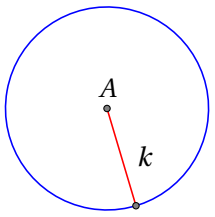
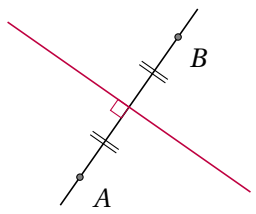
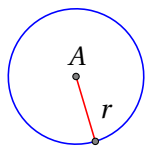
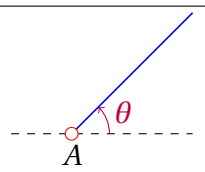
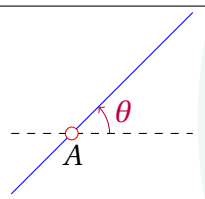
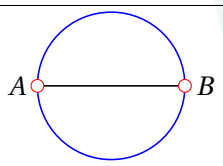
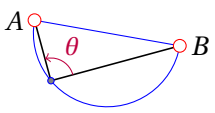
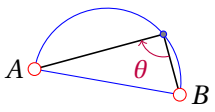
الشرط	مجموعة النقط هي	التعليل
$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف	▪ **الدائرة** ذات القطر $[AB]$، **بإستثناء** A.	$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ **تخيلي صرف** **معناه:** $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ **أو** $\frac{z - z_B}{z - z_A} = 0$ **أي:** $\boxed{(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi}$ **أو** $\boxed{M = B}$
$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف وَجزئه التخيلي موجب	▪ **نصف الدائرة** الذي يشمل C، وَالذي طرفاه A وَ B؛ **بإستثناء** A. (حيث: $\boxed{C \in (\Gamma)}$)	$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ **تخيلي صرف وَجزئه التخيلي موجب** **معناه:** $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ **أو** $\frac{z - z_B}{z - z_A} = 0$ **أي:** $\boxed{(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ **أو** $\boxed{M = B}$
$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف وَجزئه التخيلي سالب	▪ **نصف الدائرة** الذي يشمل D، وَالذي طرفاه A وَ B؛ **بإستثناء** A. (حيث: $\boxed{D \in (\Gamma)}$)	$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ **تخيلي صرف وَجزئه التخيلي سالب** **معناه:** $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ **أو** $\frac{z - z_B}{z - z_A} = 0$ **أي:**

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

		$M = B$ أو $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$\frac{z-z_B}{z-z_A}$ حقيقي	▪ **المستقيم** (AB)، **بإستثناء** النقطة A. (أي: $(\Gamma) = (AB) - \{A\}$)	$\frac{z-z_B}{z-z_A} \in \mathbb{R}$ **معناه:** $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = k\pi$ **أي:** $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = k\pi / k \in \mathbb{Z}$
$\frac{z-z_B}{z-z_A}$ حقيقي موجب تماما	▪ **المستقيم** (AB)، **بإستثناء** القطعة المستقيمة $[AB]$. (أي: $(\Gamma) = (AB) - [AB]$)	$\frac{z-z_B}{z-z_A} \in \mathbb{R}_+^*$ **معناه:** $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = 2k\pi$ **أي:** $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$
$\frac{z-z_B}{z-z_A}$ حقيقي سالب تماما	▪ **القطعة المستقيمة** $[AB]$، **بإستثناء** النقطتين A وَ B. (أي: $(\Gamma) = [AB] - \{A; B\}$)	$\frac{z-z_B}{z-z_A} \in \mathbb{R}_-^*$ **معناه:** $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \pi + 2k\pi$ **أي:** $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = \pi + 2k\pi$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

مجموعة النقط في الأعداد المركبة

العبارة المركبة	مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z	التمثيل البياني
$\lvert z-z_A\rvert = k$	❀ $k<0$: مجموعة خالية. ❀ $k=0$: مجموعة النقط هي النقطة A . ❀ $k>0$: مجموعة النقط هي دائرة مركزها A ونصف قطرها k.	
$\lvert z-z_A\rvert = \lvert z-z_B\rvert$	مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$	
$z-z_A = re^{i\theta}$ r ثابت موجب تماماً و $\theta \in \mathbb{R}$	مجموعة النقط هي دائرة مركزها A ونصف قطرها r.	
$z-z_A = re^{i\theta}$ $\arg(z-z_A) = \theta + 2k\pi$ θ ثابت و $r \in \mathbb{R}_+^*$	مجموعة النقط هي نصف مستقيم $[AM)$ باستثناء النقطة A حيث $\left(\vec{i};\overrightarrow{AM}\right) = \theta$	
$\arg(z-z_A) = \theta + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	مجموعة النقط هي المستقيم (AM) باستثناء النقطة A حيث $\left(\vec{i};\overrightarrow{AM}\right) = \theta$	
$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\frac{z-z_A}{z-z_B}$ تخيلي صرف , $k \in \mathbb{Z}$	مجموعة النقط هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B .	
$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	نصف دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B بحيث $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.	
$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	نصف دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B بحيث $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.	
$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = k\pi$ $\frac{z-z_A}{z-z_B}$ حقيقي , $k \in \mathbb{Z}$	المستقيم (AB) باستثناء النقطة B.	
$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \pi + 2k\pi$ $\frac{z-z_A}{z-z_B}$ حقيقي سالب تماما , $k \in \mathbb{Z}$	القطعة المستقيمة $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B.	
$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = 2k\pi$ $\frac{z-z_A}{z-z_B}$ حقيقي موجب تماما $k \in \mathbb{Z}$	المستقيم (AB) باستثناء القطعة $[AB]$.	