تمارين حول الدوال اللوغاريتمية -الجزء 2-

فهرس التمارين

إيجاد مشتقة دالة لوغاريتمية: 3

التمرين 1: 3

التمرين 2: 3

التمرين 3: 3

إيجاد مشتقة دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية: 4

التمرين 4: 4

التمرين 5: 4

التمرين 6: 4

التمرين 7: 4

التمرين 8: 5

تحديد نهاية دالة لوغاريتمية: 5

التمرين 9: 5

التمرين 10: 5

التمرين 11: 5

تحديد نهاية دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية: 6

التمرين 12: 6

التمرين 13: 6

التمرين 14: 6

تشكيل جدول تغيرات دالة لوغاريتمية: 6

التمرين 15: 6

تشكيل جدول تغيرات دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية: 7

التمرين 16: 7

التمرين 17: 7

دراسة دالة لوغاريتمية: 7

التمرين 18: 7

التمرين 19: 7

التمرين 20: 7
التمرين 21: 8
التمرين 22: 8
دراسة دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية: 8
التمرين 23: 8
التمرين 24: 8
التمرين 25: 8
التمرين 26: 9

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

إيجاد مشتقة دالة لوغاريتمية:

التمرين 1:

أوجد مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية (مع ذكر مجال قابليتها للاشتقاق):

1) $f(x)=ln\left(x^2+3\right)$	2) $f(x)=ln\left(\frac{1}{x}\right)$
3) $f(x)=ln\left(e^x-2\right)$	4) $f(x)=ln(4-3x)$
5) $f(x)=ln\left(\sqrt{x-1}\right)$	6) $f(x)=ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
7) $f(x)=ln\left(x^2+4x+4\right)$	8) $f(x)=ln(-2x)$
9) $f(x)=ln\left(1+\sqrt{x}\right)$	10) $f(x)=ln\left(e^x+1\right)$

التمرين 2:

أوجد مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية (مع ذكر مجال قابليتها للاشتقاق):

1) $f(x)=ln\left(5x^3+4x^2-2x-1\right)$	2) $f(x)=ln(8x+5)$
3) $f(x)=ln\left(8x^2+x-1\right)$	4) $f(x)=-\frac{1}{3}ln(8x+5)+7ln(x+5)$
5) $f(x)=ln\left(6x^3-3x^2-5x+4\right)$	6) $f(x)=-4ln(7x+6)$
7) $f(x)=-ln\,x+3ln(4x+3)$	8) $f(x)=8ln(3-5x)$
9) $f(x)=ln\left(1+x^2\right)$	10) $f(x)=ln\left(2x-x^2\right)$

التمرين 3:

أوجد مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية (مع ذكر مجال قابليتها للاشتقاق):

1) $f(x)=ln(2x-5)$	2) $f(x)=ln(-3x+1)$
3) $f(x)=ln\left(x^2+x+1\right)$	4) $f(x)=ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
5) $f(x)=ln(ln\,x)$	6) $f(x)=ln\,x^2$
7) $f(x)=(ln\,x)^2$	8) $f(x)=ln\lvert 1-x^2\rvert$
9) $f(x)=ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$	

إيجاد مشتقة دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية:

التمرين 4:

أوجد مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية (مع ذكر مجال قابليتها للاشتقاق):

1) $f(x)=x^3 \ln x$	2) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$	3) $f(x)=2\sqrt{\ln x}$
4) $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$	5) $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{x^2}$	6) $f(x)=(\ln x+1)(\ln x-1)$
7) $f(x)=(x+1)\left(\ln\sqrt{x+1}\right)$	8) $f(x)=\dfrac{\ln\left(x^2+2x\right)}{\ln x}$	9) $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}$

التمرين 5:

أوجد مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية (مع ذكر مجال قابليتها للاشتقاق):

1) $f(x)=-3x+5-\ln x$	2) $f(x)=\left(5x^2-x+2\right)\ln x$
3) $f(x)=4\ln(x+3)+3x+3$	4) $f(x)=4x^2+2x+2\ln x$
5) $f(x)=3\ln x+5x-9$	6) $f(x)=\left(x^5-3x^2+1\right)\ln x$
7) $f(x)=3\ln x+158x^3-24x+5\sqrt{x}$	8) $f(x)=\dfrac{x+1}{\ln x+2}$

التمرين 6:

أوجد مشتقة الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

1) $f(x)=x+2\ln x$	2) $f(x)=3+x\ln x$
3) $f(x)=(x-1)\ln x$	4) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$
5) $f(x)=2x(\ln x+1)^2$	6) $f(x)=(3x+1)(\ln x)^3$

التمرين 7:

أوجد مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية (مع ذكر مجال قابليتها للاشتقاق):

1) $f(x)=2x+1+\ln x$	2) $f(x)=x\ln x-x$
3) $f(x)=\dfrac{2\ln(x+1)}{x+1}$	4) $f(x)=x^2+(\ln x)^2$
5) $f(x)=e^x \ln x$	6) $f(x)=(-4x-5)\ln x$

التمرين 8:

أوجد مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية (مع ذكر مجال قابليتها للاشتقاق):

1) $f(x)=-\frac{x}{2}+1+2\ln x$	2) $f(x)=\frac{2\ln x}{\ln 3}$	3) $f(x)=\ln(4-x)+\ln x$
4) $f(x)=x\ln x-x$	5) $f(x)=x^2\ln x$	6) $f(x)=x\ln(2x-3)$
7) $f(x)=2x(1-\ln x)$	8) $f(x)=\frac{x-\ln x}{x^2}$	9) $f(x)=(\ln x)^2-2\ln x-4$

تحديد نهاية دالة لوغاريتمية:

التمرين 9:

حدّد النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-2)-\ln(x+3)$	2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(x^2+1)$
3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(2+3e^{-x})$	4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2+3e^{-x})$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-1}{4e^x-3}\right)$	6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2x^2+3x+2)-2\ln(x-1)$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x-e^{-x})$	8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2-4x+1)$

التمرين 10:

حدّد النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$	2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$
3) $\lim\limits_{x\to0}\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$	4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln x^2$

التمرين 11:

حدّد نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها، في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\ln(1-3x)$	2) $f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$
3) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$	4) $f(x)=\ln\left(\frac{5-x}{3+x}\right)$

تحديد نهاية دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية:

التمرين 12:

حدّد النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-4)\ln x$	2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2+4x}{\ln x-7}$	3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\ln x$
4) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x}$	5) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\ln x$	6) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x+3}{\ln x}$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-4$	8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+1)(3-\ln x)$	

التمرين 13:

حدّد النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x\right)$	2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)\ln x$	3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2-3\ln x)$
4) $\lim\limits_{x\to0^+}(x-4+\ln x)$	5) $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\ln x$	6) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$
7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$	8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}-1+\ln x$	

التمرين 14:

حدّد نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها، في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\dfrac{\ln(-x)}{3x+2}$	2) $f(x)=25x^2\ln(-x)$
3) $f(x)=\dfrac{\ln(5x)}{7x-3}$	4) $f(x)=(7x-4)^2\ln(-4x)$

تشكيل جدول تغيرات دالة لوغاريتمية:

التمرين 15:

شكّل جدول تغيرات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\ln(3x-2)$	2) $f(x)=\ln\left(x^2-36\right)$	3) $f(x)=\ln\left(\dfrac{5x+2}{x-3}\right)$

تشكيل جدول تغيرات دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية:

التمرين 16:

شكّل جدول تغيرات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=2x-\ln x$	2) $f(x)=x\ln x$	3) $f(x)=\dfrac{\ln x}{3x}$
4) $f(x)=\ln x-4x^2+2$	5) $f(x)=1-\dfrac{1}{x}-2\ln x$	6) $f(x)=x\ln x-3x$

التمرين 17:

شكّل جدول تغيرات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=x-\ln x$	2) $f(x)=x\ln x-x+3$	3) $f(x)=\dfrac{x+3}{\ln x}$
4) $f(x)=x^2-2+\ln x$	5) $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$	6) $f(x)=x\ln 2-2\ln x$

دراسة دالة لوغاريتمية:

التمرين 18:

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$.

1) شكّل جدول تغيرات الدالة f، ثم أرسم (C_f) تمثيلها البياني.

2) أثبت أنه من أجل كل $x\in]-2;2[$، $f(-x)=-f(x)$. ما الذي يمكن استنتاجه بالنسبة لـ (C_f).

التمرين 19:

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\ln\left(\dfrac{5x^2}{5x^2+2}\right)$.

1) شكّل جدول تغيرات الدالة f، ثم أرسم (C_f) تمثيلها البياني.

2) أثبت أنه من أجل كل $x\in D_f$، $f(x)<0$.

التمرين 20:

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\ln(ax+b)$، حيث: a و b عددان حقيقيان.

1) حدّد العددين a و b اللذان يكون من أجلهما (C_f) التمثيل البياني للدالة f يقطع محور الفواصل في النقطة $A(2;0)$، ويقبل عند هذه النقطة مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته $y=x$.

2) شكّل جدول تغيرات الدالة f، ثم أرسم (C_f) تمثيلها البياني.

التمرين 21:

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=ln\left(1+e^{x}\right)$.

1) شكّل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني.

2) أثبت أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $f(x)-x=ln\left(1-e^{-x}\right)$ ، و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=0$. ما الذي يمكن استنتاجه بالنسبة لـ $\left(C_f\right)$.

التمرين 22:

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)$.

1) شكّل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني.

2) برهن أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $f(x)=x+ln\left(1+e^{-2x}\right)$.

3) برهن أن المستقيم D الذي معادلته $y=x$ مماس لـ $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$.

دراسة دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية:

التمرين 23:

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=ln\,x-3(ln\,x)^{2}$.

1) شكّل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني.

2) أدرس إشارة الدالة f من أجل $x\in]0;+\infty[$.

التمرين 24:

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{1}{x\,ln\,x}$.

1) شكّل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني.

2) ما هي معادلة المماس T لـ $\left(C_f\right)$ عند النقطة التي فاصلتها e؟ أرسم T.

التمرين 25:

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^{2}-2+ln\,x$.

1) شكّل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني.

2) برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]0;+\infty[$. حدّد قيمة α بتقريب 10^{-3}.

التمرين 26:

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)$.

1) شكّل جدول تغيرات الدالة f، ثم أرسم (C_f) تمثيلها البياني.

2) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-ln2$ مماس لـ (C_f) عند $+\infty$.

3) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ Δ، ثم أرسم Δ.

4) برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α، ثم أثبت أن $\alpha\in\left]1;\frac{5}{4}\right[$.

تمّ بحمد الله وتوفيقه

حلول تمارين درس الدوال اللوغاريتمية -الجزء 2-

فهرس حلول التمارين

إيجاد مشتقة دالة لوغاريتمية: 3

حل التمرين 1: 3

حل التمرين 2: 3

حل التمرين 3: 4

إيجاد مشتقة دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية: 5

حل التمرين 4: 5

حل التمرين 5: 6

حل التمرين 6: 7

حل التمرين 7: 7

حل التمرين 8: 7

تحديد نهاية دالة لوغاريتمية: 8

حل التمرين 9: 8

حل التمرين 10: 9

حل التمرين 11: 9

تحديد نهاية دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية: 10

حل التمرين 12: 10

حل التمرين 13: 10

حل التمرين 14: 11

تشكيل جدول تغيرات دالة لوغاريتمية: 12

حل التمرين 15: 12

تشكيل جدول تغيرات دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية: 14

حل التمرين 16: 14

حل التمرين 17: 17

دراسة دالة لوغاريتمية: 21

حل التمرين 18: 21

حل التمرين 19: 22

حل التمرين 20: 23

حل التمرين 21: 23

حل التمرين 22: 24

دراسة دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية: 25

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

حل التمرين 23: 25
حل التمرين 24: 26
حل التمرين 25: 28
حل التمرين 26: 29

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

إيجاد مشتقة دالة لوغاريتمية:

حل التمرين 1:

1) $\forall x\in\mathbb{R};f(x)=ln\left(x^2+3\right)\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+3}$.

2) $\forall x\in\left]0;+\infty\right[;f(x)=ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}}=-\dfrac{1}{x}$.

3) $\forall x\in\left]ln\,2;+\infty\right[;f(x)=ln\left(e^x-2\right)\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x-2}$.

4) $\forall x\in\left]-\infty;\dfrac{4}{3}\right[;f(x)=ln(4-3x)\Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{3}{4-3x}$.

5) $\forall x\in\left]1;+\infty\right[;f(x)=ln\left(\sqrt{x-1}\right)\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{2x-2}$.

6) $\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[;f(x)=ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}}{\dfrac{x+1}{x-1}}$

$\Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^2}\times\dfrac{x-1}{x+1}=-\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$.

7) $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-2\};f(x)=ln\left(x^2+4x+4\right)\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+4x+4}$.

8) $\forall x\in\left]-\infty;0\right[;f(x)=ln(-2x)\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{-2}{-2x}=\dfrac{1}{x}$.

9) $\forall x\in\left]0;+\infty\right[;f(x)=ln\left(1+\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}=\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x}+x\right)}$.

10) $\forall x\in\mathbb{R};f(x)=ln\left(e^x+1\right)\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

حل التمرين 2:

1) $\forall x\in\left]-1;\dfrac{1-\sqrt{21}}{10}\right[\cup\left]\dfrac{1+\sqrt{21}}{10};+\infty\right[;f(x)=ln\left(5x^3+4x^2-2x-1\right)$

$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{15x^2+8x-2}{5x^3+4x^2-2x-1}$.

2) $\forall x\in\left]-\dfrac{5}{8};+\infty\right[;f(x)=ln(8x+5)\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{8}{8x+5}$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

3) $\forall x \in \left]-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{33}}{16}\right[\cup \left]\dfrac{\sqrt{33}-1}{16};+\infty\right[; f(x)=ln\left(8x^2+x-1\right) \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{16x+1}{8x^2+x-1}$.

4) $\forall x \in \left]-\dfrac{5}{8};+\infty\right[; f(x)=-\dfrac{1}{3}ln(8x+5)+7ln(x+5) \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{-8}{3(8x+5)}+\dfrac{7}{x+5}$

$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{-8(x+5)+21(8x+5)}{3(8x+5)(x+5)}=\dfrac{160x+65}{3(8x+5)(x+5)}$.

5) $\forall x \in]-1;+\infty[; f(x)=ln\left(6x^3-3x^2-5x+4\right) \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{18x^2-6x-5}{6x^3-3x^2-5x+4}$.

6) $\forall x \in \left]-\dfrac{6}{7};+\infty\right[; f(x)=-4ln(7x+6) \Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{28}{7x+6}$.

7) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x)=-ln\,x+3ln(4x+3) \Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{12}{4x+3}=\dfrac{8x-3}{x(4x+3)}$.

8) $\forall x \in \left]-\infty;\dfrac{3}{5}\right[; f(x)=8ln(3-5x) \Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{40}{3-5x}$.

9) $\forall x \in \mathbb{R}; f(x)=ln\left(1+x^2\right) \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

10) $\forall x \in]0;2[; f(x)=ln\left(2x-x^2\right) \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2(1-x)}{2x-x^2}$.

حل التمرين 3:

1) $\forall x \in \left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[; f(x)=ln(2x-5) \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2}{2x-5}$.

2) $\forall x \in \left]-\infty;\dfrac{1}{3}\right[; f(x)=ln(-3x+1) \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{-3}{1-3x}$.

3) $\forall x \in \mathbb{R}; f(x)=ln\left(x^2+x+1\right) \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

4) $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[; f(x)=ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}}{\dfrac{x-1}{x+1}}$

$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}\times\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$.

5) $\forall x \in]1;+\infty[; f(x)=ln(ln\,x) \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}}{ln\,x}=\dfrac{1}{x\,ln\,x}$.

6) $\forall x \in \mathbb{R}^* ; f(x)=ln\,x^2 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2x}{x^2}=\dfrac{2}{x}$.

7) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x)=(ln\,x)^2 \Leftrightarrow f'(x)=2\times\dfrac{1}{x}(ln\,x)=\dfrac{2\,ln\,x}{x}$.

8) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

❖ $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[; f(x) = ln|1-x^2| = ln(x^2-1) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$.

❖ $\forall x \in]-1;1[; f(x) = ln|1-x^2| = ln(1-x^2) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{-2x}{1-x^2} = \dfrac{2x}{x^2-1}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}; f(x) = ln|1-x^2| \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$.

9) $\forall x \in]3;+\infty[; f(x) = ln\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{\dfrac{(x-3)-(x+2)}{(x-3)^2}}{\dfrac{x+2}{x-3}}$

$\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{-5}{(x-3)^2} \times \dfrac{x-3}{x+2} = -\dfrac{5}{(x-3)(x+2)}$.

إيجاد مشتقة دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية:

حل التمرين 4:

1) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = x^3 ln\, x \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 ln\, x + \dfrac{1}{x}x^3 = 3x^2 ln\, x + x^2$.

2) $\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[; f(x) = \dfrac{1}{ln\, x} \Leftrightarrow f'(x) = -\dfrac{\dfrac{1}{x}}{(ln\, x)^2} = -\dfrac{1}{x(ln\, x)^2}$.

3) $\forall x \in]1;+\infty[; f(x) = 2\sqrt{ln\, x} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{2\times\dfrac{1}{x}}{2\sqrt{ln\, x}} = \dfrac{1}{x\sqrt{ln\, x}}$.

4) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = \dfrac{1}{x} ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x^2} ln\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}}\right)$

$\Leftrightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} ln\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} ln\, x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{ln(x)-1}{x^2}$.

5) $\forall x \in]-2;0[\cup]0;+\infty[; f(x) = \dfrac{ln(x+2)}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{\left(\dfrac{1}{x+2}\right)x^2 - ln(x+2)\times 2x}{x^4}$

$f'(x) = \dfrac{\dfrac{x}{x+2} - 2\, ln(x+2)}{x^3} = \dfrac{x - 2(x+2)ln(x+2)}{x^3(x+2)}$.

6) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = (ln\, x+1)(ln\, x-1) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}(ln\, x-1) + (ln\, x+1)\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{2\, ln\, x}{x}$.

7) $\forall x \in]-1;+\infty[; f(x) = (x+1)\left(ln\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow f'(x) = 1\left(ln\sqrt{x+1}\right) + (x+1) \times \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}$

$\Leftrightarrow f'(x) = ln\sqrt{x+1} + \dfrac{x+1}{2(x+1)} = \dfrac{1}{2} + ln\sqrt{x+1}$.

8) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = \dfrac{ln\left(x^2+2x\right)}{ln\,x} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{\left(\dfrac{2x+2}{x^2+2x}\right)ln\,x - \dfrac{1}{x}ln\left(x^2+2x\right)}{(ln\,x)^2}$

$\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{(2x+2)ln\,x - (x+2)ln\left(x^2+2x\right)}{\left(x^2+2x\right)(ln\,x)^2}$.

9) $\forall x \in]e;+\infty[; f(x) = \dfrac{ln\,x+1}{ln\,x-1} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(ln\,x-1) - \frac{1}{x}(ln\,x+1)}{(ln\,x-1)^2} = -\dfrac{2}{x(ln\,x-1)^2}$.

حل التمرين 5:

1) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = -3x+5-ln\,x \Leftrightarrow f'(x) = -3 - \dfrac{1}{x}$.

2) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = \left(5x^2-x+2\right)ln\,x \Leftrightarrow f'(x) = (10x-1)ln\,x + \dfrac{5x^2-x+2}{x}$.

3) $\forall x \in]-3;+\infty[; f(x) = 4ln(x+3)+3x+3 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{4}{x+3}+3$.

4) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = 4x^2+2x+2ln\,x \Leftrightarrow f'(x) = 8x+2+\dfrac{2}{x}$.

5) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = 3ln\,x+5x-9 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{3}{x}+5$.

6) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = \left(x^5-3x^2+1\right)ln\,x \Leftrightarrow f'(x) = \left(5x^4-6x\right)ln\,x + \dfrac{x^5-3x^2+1}{x}$.

7) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = 3ln\,x+158x^3-24x+5\sqrt{x} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{3}{x}+474x^2-24+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}$.

8) $\forall x \in \left]0;e^{-2}\right[\cup \left]e^{-2};+\infty\right[; f(x) = \dfrac{x+1}{ln\,x+2} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1\times(ln\,x+2) - (x+1)\times\frac{1}{x}}{(ln\,x+2)^2}$

$\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{ln\,x+2-1-\frac{1}{x}}{(ln\,x+2)^2} = \dfrac{x(ln\,x+1)-1}{x(ln\,x+2)^2} = \dfrac{x\,ln\,x+x-1}{x(ln\,x+2)^2}$.

حل التمرين 6:

1) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = x + 2\ln x \Leftrightarrow f'(x) = 1 + \frac{2}{x}$.

2) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = 3 + x\ln x \Leftrightarrow f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} \times x = \ln x + 1$

3) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = (x-1)\ln x \Leftrightarrow f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$.

4) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

5) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = 2x(\ln x + 1)^2 \Leftrightarrow f'(x) = 2(\ln x + 1)^2 + 2x \times 2\frac{1}{x}(\ln x + 1)$

$\Leftrightarrow f'(x) = 2(\ln x + 1)^2 + 4(\ln x + 1) = 2(\ln x + 1)(\ln x + 1 + 2) = 2(\ln x + 1)(\ln x + 3)$.

6) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = (3x+1)(\ln x)^3 \Leftrightarrow f'(x) = 3(\ln x)^3 + (3x+1) \times 3 \times \frac{1}{x}(\ln x)^2$

$\Leftrightarrow f'(x) = 3(\ln x)^2\left(\ln x + 3 + \frac{1}{x}\right)$.

حل التمرين 7:

1) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = 2x + 1 + \ln x \Leftrightarrow f'(x) = 2 + \frac{1}{x}$.

2) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = x\ln x - x \Leftrightarrow f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.

3) $\forall x \in]-1;+\infty[; f(x) = \frac{2\ln(x+1)}{x+1} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2\left(\frac{1}{x+1}(x+1) - 1 \times \ln(x+1)\right)}{(x+1)^2}$

$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{2(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}$.

4) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = x^2 + (\ln x)^2 \Leftrightarrow f'(x) = 2x + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = 2x + \frac{2\ln x}{x}$.

5) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = e^x \ln x \Leftrightarrow f'(x) = e^x \ln x + \frac{1}{x}e^x = e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$.

6) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = (-4x-5)\ln x \Leftrightarrow f'(x) = -4\ln x + (-4x-5) \times \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow f'(x) = -4\ln x - \frac{4x+5}{x} = -4\ln x - 4 - \frac{5}{x} = -4(\ln x + 1) - \frac{5}{x}$.

حل التمرين 8:

1) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + 2\ln x \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{x} = \frac{4-x}{2x}$.

2) $\forall x\in\left]0;+\infty\right[;f(x)=\dfrac{2\ln x}{\ln 3}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2}{\ln 3}\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x\ln 3}$.

3) $\forall x\in\left]0;4\right[;f(x)=\ln(4-x)+\ln x\Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{4-x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{4-2x}{x(4-x)}=\dfrac{2(2-x)}{x(4-x)}$.

4) $\forall x\in\left]0;+\infty\right[;f(x)=x\ln x-x\Leftrightarrow f'(x)=1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\ln x$.

5) $\forall x\in\left]0;+\infty\right[;f(x)=x^2\ln x\Leftrightarrow f'(x)=2x\ln x+x^2\times\dfrac{1}{x}=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$.

6) $\forall x\in\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[;f(x)=x\ln(2x-3)\Leftrightarrow f'(x)=1\times\ln(2x-3)+x\times\dfrac{2}{2x-3}$

$\Leftrightarrow f'(x)=\ln(2x-3)+\dfrac{2x}{2x-3}=\dfrac{(2x-3)\ln(2x-3)+2x}{2x-3}$.

7) $\forall x\in\left]0;+\infty\right[;f(x)=2x(1-\ln x)\Leftrightarrow f'(x)=2(1-\ln x)+2x\left(-\dfrac{1}{x}\right)$

$\Leftrightarrow f'(x)=2(1-\ln x)-2=2(1-\ln x-1)=-2\ln x$.

8) $\forall x\in\left]0;+\infty\right[;f(x)=\dfrac{x-\ln x}{x^2}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)x^2-(x-\ln x)2x}{x^4}$

$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{x^2-x-2x^2+2x\ln x}{x^4}=\dfrac{-x^2-x+2x\ln x}{x^4}=\dfrac{2\ln x-x-1}{x^3}$.

9) $\forall x\in\left]0;+\infty\right[;f(x)=(\ln x)^2-2\ln x-4\Leftrightarrow f'(x)=2\times\dfrac{1}{x}\ln x-2\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2(\ln x-1)}{x}$.

تحديد نهاية دالة لوغاريتمية:

حل التمرين 9:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-2)-\ln(x+3)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)=\ln 1=0$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(x^2+1\right)=+\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+3e^{-x}\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(2+3e^{-x}\right)=+\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+3e^{-x}\right)=2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(2+3e^{-x}\right)=\ln 2$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x-1}{4e^x-3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x\left(1-e^{-x}\right)}{e^x\left(4-3e^{-x}\right)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-e^{-x}}{4-3e^{-x}}\right)=\dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{4e^x-3}\right)=\ln\dfrac{1}{4}=-\ln 4$.

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(2x^2+3x+2\right)-2ln\left(x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\dfrac{2x^2+3x+2}{\left(x-1\right)^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\dfrac{2x^2+3x+2}{x^2-2x+1}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x+2}{x^2-2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x^2}\right)=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\dfrac{2x^2+3x+2}{x^2-2x+1}\right)=ln2$.

7) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0\end{cases}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-e^{-x}\right)=+\infty\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(e^x-e^{-x}\right)=+\infty$.

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-4x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(x^2-4x+1\right)=+\infty$.

حل التمرين 10:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x^2\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)=+\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+x^2\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty} ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)=+\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to0} 1+x^2=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)=2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0} ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)=ln2$.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty} ln\,x^2=+\infty$.

حل التمرين 11:

1) $f\left(x\right)=ln\left(1-3x\right)\Leftrightarrow D_f=\left]-\infty;\dfrac{1}{3}\right[$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-3x\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty} ln\left(1-3x\right)=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{1}{3}}\left(1-3x\right)=0^+\Leftrightarrow\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{1}{3}} ln\left(1-3x\right)=-\infty$.

2) $f\left(x\right)=ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)\Leftrightarrow D_f=\mathbb{R}$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty} ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)=ln\dfrac{1}{2}$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)=+\infty$.

3) $f\left(x\right)=\sqrt{x}\,ln\,x\Leftrightarrow D_f=\left]0;+\infty\right[$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\sqrt{x}=0$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} ln\,x=-\infty$ ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل "$0\times\infty$":

- $\forall x\in\left]0;+\infty\right[; f\left(x\right)=\sqrt{x}\,ln\,x=\sqrt{x}\,ln\left(\sqrt{x}\right)^2=2\sqrt{x}\,ln\left(\sqrt{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 2\sqrt{x}\,ln\left(\sqrt{x}\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f\left(x\right)=0$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\,ln\,x=+\infty$.

4) $f(x)=ln\left(\frac{5-x}{3+x}\right) \Leftrightarrow D_f=]-3;5[$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-3}\left(\frac{5-x}{3+x}\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-3} ln\left(\frac{5-x}{3+x}\right)=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}5}\left(\frac{5-x}{3+x}\right)=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}5} ln\left(\frac{5-x}{3+x}\right)=-\infty$.

تحديد نهاية دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية:

حل التمرين 12:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-4)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(-x-4)ln\,x=-\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to0^+} ln\,x-7=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} x^2+4x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2+4x}{ln\,x-7}=0$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right)=-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right)ln\,x=-\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to0^+} ln\,x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+}\frac{ln\,x}{x}=-\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-1\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} ln\,x=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-1\right)ln\,x=-\infty$.

6) $\lim\limits_{x\to0^+} 2x+3=3$; $\lim\limits_{x\to0^+} ln\,x=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x+3}{ln\,x}=0$.

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2-4=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x+\frac{1}{2}x^2-4=+\infty$.

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(ln\,x+1)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-ln\,x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(ln\,x+1)(3-ln\,x)=-\infty$.

حل التمرين 13:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+ln\,x\right)=+\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)ln\,x=-\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(ln\,2-3ln\,x)=-\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to0^+}(x-4)=-4$; $\lim\limits_{x\to0^+} ln\,x=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+}(x-4+ln\,x)=-\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x=+\infty$ ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل "$\infty-\infty$":

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x-ln\,x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{ln\,x}{x}\right)$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln\,x}{x}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{ln\,x}{x}=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{ln\,x}{x}\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x-ln\,x=+\infty$.

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\ln 1=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل "$0\times\infty$":

نضع $X=\frac{1}{x}$ ومنه فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} X=0^+$. و $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ تصبح $\lim\limits_{X\xrightarrow{>}0} \frac{1}{X}\ln(1+X)$. ومن خلال الدرس لدينا $\lim\limits_{X\xrightarrow{>}0} \frac{\ln(1+X)}{X}=1$ ، ومنه فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$.

7) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x}=+\infty$ و $\ln 1=0$ $\lim\limits_{x\to0} \ln(1+2x)$ ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل "$0\times\infty$":

نضع: $X=2x$. ومنه فإن $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$ تصبح $\lim\limits_{X\to0} \frac{2\ln(1+X)}{X}$ ، وبما أن:

$\lim\limits_{X\xrightarrow{>}0} \frac{\ln(1+X)}{X}=1$ فإن $\lim\limits_{X\to0} \frac{2\ln(1+X)}{X}=2$ ، ومنه فإن $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+2x)}{x}=2$.

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}-1=-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}-1+\ln x=+\infty$.

حل التمرين 14:

1) $f(x)=\frac{\ln(-x)}{3x+2} \Leftrightarrow D_f=\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[\cup\left]-\frac{2}{3};0\right[$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(-x)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x+2=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)}{3x+2}=0$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-\frac{2}{3}} \ln(-x)=\ln\left(\frac{2}{3}\right)<0$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-\frac{2}{3}} 3x+2=0^-$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-\frac{2}{3}} \frac{\ln(-x)}{3x+2}=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-\frac{2}{3}} \ln(-x)=\ln\left(\frac{2}{3}\right)<0$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-\frac{2}{3}} 3x+2=0^+$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-\frac{2}{3}} \frac{\ln(-x)}{3x+2}=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} \ln(-x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} 3x+2=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} \frac{\ln(-x)}{3x+2}=-\infty$.

2) $f(x)=25x^2\ln(-x) \Leftrightarrow D_f=]-\infty;0[$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} 25x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(-x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} 25x^2\ln(-x)=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to0} 25x^2=0$ و $\lim\limits_{x\to0} \ln(-x)=-\infty$ ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل "$0\times\infty$": نطبق طريقة "l'hôpital" لنزع حالة عدم التعيين.

• $\lim\limits_{x\to0} 25x^2\ln(-x)=25\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\ln(-x)}{\frac{1}{x^2}}\right)=25\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{(\ln(-x))'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}\right)=25\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}\right)$

$=25\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{-x^2}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0} 25x^2\ln(-x)=0$.

3) $f(x)=\dfrac{ln(5x)}{7x-3} \Leftrightarrow D_f=\left]0;\dfrac{3}{7}\right[\cup\left]\dfrac{3}{7};+\infty\right[$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} ln(5x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(7x-3)=-3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{ln(5x)}{7x-3}=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{3}{7}} ln(5x)=ln\left(\dfrac{15}{7}\right)$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{3}{7}}(7x-3)=0^-\Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{3}{7}}\dfrac{ln(5x)}{7x-3}=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{3}{7}} ln(5x)=ln\left(\dfrac{15}{7}\right)$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{3}{7}}(7x-3)=0^+\Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{3}{7}}\dfrac{ln(5x)}{7x-3}=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(5x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(7x-3)=+\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل "$\dfrac{\infty}{\infty}$":
نقسم الكسر على أكبر حد في المقام، فنتحصل على:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ln(5x)}{7x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{ln(5x)}{x}}{7-\dfrac{3}{x}}$

❖ نطبق طريقة "l'hôpital" على الكسر الأعلى لنزع حالة عدم التعيين:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ln(5x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(ln(5x))'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{x}}{1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}7-\dfrac{3}{x}=7-0=7$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{ln(5x)}{x}}{7-\dfrac{3}{x}}=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ln(5x)}{7x-3}=0$.

4) $f(x)=(7x-4)^2\,ln(-4x)\Leftrightarrow D_f=]-\infty;0[$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}(7x-4)^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} ln(-4x)=+\infty\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(7x-4)^2\,ln(-4x)=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to0}(7x-4)^2=16$; $\lim\limits_{x\to0} ln(-4x)=-\infty\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}(7x-4)^2\,ln(-4x)=-\infty$.

تشكيل جدول تغيرات دالة لوغاريتمية:

حل التمرين 15:

1) $f(x)=ln(3x-2)\Leftrightarrow D_f=\left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$.

❖ $\forall x\in\left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$; $f(x)=ln(3x-2)\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{3}{3x-2}>0$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{2}{3}}(3x-2)=0^+\Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{2}{3}} ln(3x-2)=-\infty$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-2)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln(3x-2)=+\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
f	$\|$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2) $f(x)=ln(x^2-36) \Leftrightarrow D_f=]-\infty;-6[\cup]6;+\infty[$.

❖ $\forall x\in D_f; f(x)=ln(x^2-36) \Leftrightarrow f'(x)=\frac{2x}{x^2-36}$.

• $\forall x\in D_f; x^2-36>0 \Leftrightarrow \begin{cases}\forall x\in D_f; f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x>0 \Leftrightarrow x\in]6;+\infty[\\ \forall x\in D_f; f'(x)<0 \Leftrightarrow 2x<0 \Leftrightarrow x<0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;-6[\end{cases}$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-36)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} ln(x^2-36)=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-6}(x^2-36)=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}-6} ln(x^2-36)=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}6}(x^2-36)=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}6} ln(x^2-36)=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-36)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln(x^2-36)=+\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		-6		6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$		$+$		
f	$+\infty$	↘	$\|\|$		↗		$+\infty$
			$\|\|$	$-\infty$		$-\infty$	

3) $f(x)=ln\left(\frac{5x+2}{x-3}\right) \Leftrightarrow D_f=\left]-\infty;-\frac{2}{5}\right[\cup]3;+\infty[$.

❖ $\forall x\in D_f; f(x)=ln\left(\frac{5x+2}{x-3}\right) \Leftrightarrow f'(x)=\frac{5\times(x-3)-(5x+2)\times 1}{\frac{(x-3)^2}{\frac{5x+2}{x-3}}}$

$\Leftrightarrow f'(x)=-\frac{17}{(x-3)^2}\times\frac{x-3}{5x+2}=\frac{-17}{(x-3)(5x+2)}$

$\Leftrightarrow \forall x\in D_f; f'(x)=\frac{-17}{(x-3)(5x+2)}<0$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5x+2}{x-3}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5x}{x}\right)=5 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} ln\left(\frac{5x+2}{x-3}\right)=ln5$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -\frac{2}{5}} (5x+2) = 0^+$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -\frac{2}{5}} (x-3) = -\frac{17}{5} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} -\frac{2}{5}} \left(\frac{5x+2}{x-3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} -\frac{2}{5}} ln\left(\frac{5x+2}{x-3}\right) = -\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} (5x+2) = 17$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} (x-3) = 0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} \left(\frac{5x+2}{x-3}\right) = +\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} ln\left(\frac{5x+2}{x-3}\right) = +\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{5x+2}{x-3}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{5x}{x}\right) = 5 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} ln\left(\frac{5x+2}{x-3}\right) = ln\,5$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	‖		$-$	
f	$ln\,5$	↘	‖	‖		↘	$ln\,5$
		$-\infty$	‖	‖	$+\infty$		

تشكيل جدول تغيرات دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية:

حل التمرين 16:

1) $f(x) = 2x - ln\,x \Leftrightarrow D_f =]0;+\infty[$.

❖ $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = 2x - ln\,x \Leftrightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x-1}{x}$.

• $\forall x \in]0;+\infty[; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow 2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

❖ $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - ln\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + ln\,2$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 2x = 0$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} ln\,x = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} -ln\,x = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 2x - ln\,x = +\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} ln\,x = +\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $"\infty - \infty"$:

• $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - ln\,x = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(2 - \frac{ln\,x}{x}\right)$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln\,x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{ln\,x}{x}\right) = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(2 - \frac{ln\,x}{x}\right) = +\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} 2x - ln\,x = +\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	$1+\ln 2$	↗	$+\infty$

2) $f(x)=x\ln x \Leftrightarrow D_f=]0;+\infty[$.

❖ $\forall x\in]0;+\infty[\,;f(x)=x\ln x \Leftrightarrow f'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \forall x\in]0;+\infty[\,;f'(x)=\ln x+1$.

• $\forall x\in]0;+\infty[\,;f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x+1>0 \Leftrightarrow x>e^{-1} \Leftrightarrow x\in]e^{-1};+\infty[$.

❖ $f(e^{-1})=(e^{-1})\ln(e^{-1})=-e^{-1}=-\frac{1}{e}$.

❖ من خلال الدرس نعلم أن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x\ln x=0$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ 0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

3) $f(x)=\frac{\ln x}{3x} \Leftrightarrow D_f=]0;+\infty[$.

❖ $\forall x\in]0;+\infty[\,;f(x)=\frac{\ln x}{3x} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{3x\left(\frac{1}{x}\right)-3\ln x}{(3x)^2}=\frac{3-3\ln x}{9x^2}$

$\Leftrightarrow \forall x\in]0;+\infty[\,;f'(x)=\frac{1-\ln x}{3x^2}$.

• $\forall x\in]0;+\infty[\,;f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-\ln x>0 \Leftrightarrow x<e \Leftrightarrow x\in]0;e[$.

❖ $f(e)=\frac{\ln e}{3e}=\frac{1}{3e}$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{3x}=0$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 3x=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln x}{3x}=-\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{3e}$	↘	0

4) $f(x)=\ln x-4x^2+2 \Leftrightarrow D_f=]0;+\infty[$.

❖ $\forall x\in]0;+\infty[; f(x)=\ln x-4x^2+2 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{x}-8x$

$\Leftrightarrow \forall x\in]0;+\infty[; f'(x)=\frac{1-8x^2}{x}$.

• $\forall x\in]0;+\infty[; f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-8x^2}{x}>0 \Leftrightarrow 1-8x^2>0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x\in\left]0;\frac{1}{2\sqrt{2}}\right[$.

❖ $f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\ln\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)-4\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+2=-\ln\left(2\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}-\ln\left(2\sqrt{2}\right)$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(-4x^2+2\right)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x-4x^2+2=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-4x^2+2=-\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل "$\infty-\infty$":

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-4x^2+2=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln x}{x}-4x+\frac{2}{x}\right)$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-4x+\frac{2}{x}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln x}{x}-4x+\frac{2}{x}\right)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-4x^2+2=-\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{3}{2}-\ln\left(2\sqrt{2}\right)$	↘	$-\infty$

5) $f(x)=1-\frac{1}{x}-2\ln x \Leftrightarrow D_f=]0;+\infty[$.

❖ $\forall x\in]0;+\infty[; f(x)=1-\frac{1}{x}-2\ln x \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}$

$\Leftrightarrow \forall x\in]0;+\infty[; f'(x)=\frac{1-2x}{x^2}$.

• $\forall x\in]0;+\infty[; f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x^2}>0 \Leftrightarrow 1-2x>0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$.

❖ $f\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}-2\ln\left(\frac{1}{2}\right)=1-2+2\ln 2=2\ln 2-1$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}1-\frac{1}{x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}-2\ln x=+\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل "$\infty-\infty$":

• $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}1-\frac{1}{x}-2\ln x=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}1-\frac{1}{x}(1+2x\ln x)$.

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left(x\ln x\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left(1+2x\ln x\right)=1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 1-\frac{1}{x}\left(1+2x\ln x\right)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 1-\frac{1}{x}-2\ln x=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2\ln x\right)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}-2\ln x\right)=-\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$2\ln 2-1$	↘	$-\infty$

6) $f\left(x\right)=x\ln x-3x \Leftrightarrow D_f=\left]0;+\infty\right[$.

❖ $\forall x\in\left]0;+\infty\right[; f\left(x\right)=x\ln x-3x \Leftrightarrow f'\left(x\right)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}-3$

$\Leftrightarrow \forall x\in\left]0;+\infty\right[; f'\left(x\right)=\ln x-2$.

- $\forall x\in\left]0;+\infty\right[; f'\left(x\right)>0 \Leftrightarrow \ln x-2>0 \Leftrightarrow x>e^2 \Leftrightarrow x\in\left]e^2;+\infty\right[$.

❖ $f\left(e^2\right)=\left(e^2\right)\ln\left(e^2\right)-3\left(e^2\right)=2e^2-3e^2=-e^2$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln x=0$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} -3x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln x-3x=0$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x=+\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $"\infty-\infty"$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x-3x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x\left(1-\frac{3}{\ln x}\right)$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{\ln x}\right)=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x\left(1-\frac{3}{\ln x}\right)=+\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x-3x=+\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ 0	↘	$-e^2$	↗	$+\infty$

حل التمرين 17:

1) $f\left(x\right)=x-\ln x \Leftrightarrow D_f=\left]0;+\infty\right[$.

❖ $\forall x\in\left]0;+\infty\right[; f\left(x\right)=x-\ln x \Leftrightarrow f'\left(x\right)=1-\frac{1}{x} \Leftrightarrow \forall x\in\left]0;+\infty\right[; f'\left(x\right)=\frac{x-1}{x}$.

- $\forall x\in\left]0;+\infty\right[; f'\left(x\right)>0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}>0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1 \Leftrightarrow x\in\left]1;+\infty\right[$.

❖ $f\left(1\right)=1-\ln 1=1$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x = 0$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (-\ln x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x - \ln x = +\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل "$\infty - \infty$":

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln x = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln x = +\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

2) $f(x) = x\ln x - x + 3 \Leftrightarrow D_f =]0;+\infty[$.

❖ $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = x\ln x - x + 3 \Leftrightarrow f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1$

$\Leftrightarrow \forall x \in]0;+\infty[; f'(x) = \ln x$.

- $\forall x \in]0;+\infty[; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in]1;+\infty[$.

❖ $f(1) = 1 \times \ln 1 - 1 + 3 = 2$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln x = 0$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} -x + 3 = 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln x - x + 3 = 3$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln x = +\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل "$\infty - \infty$":

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln x - x + 3 = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\ln x - 1 + \dfrac{3}{x}\right)$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln x - 1 + \dfrac{3}{x}\right) = +\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\ln x - 1 + \dfrac{3}{x}\right) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x\ln x - x + 3 = +\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ 3	↘	2	↗	$+\infty$

3) $f(x) = \dfrac{x+3}{\ln x} \Leftrightarrow D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

❖ $\forall x \in D_f ; f(x) = \dfrac{x+3}{\ln x} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1 \times \ln x - x \times \dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} \Leftrightarrow \forall x \in D_f ; f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$.

- $\forall x \in D_f ; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > e \Leftrightarrow x \in]e;+\infty[$.

❖ $f(e) = \dfrac{e+3}{\ln e} = e+3$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x+3 = 3$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{x+3}{\ln x} = 0$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} x+3 = 4$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \ln x = 0^- \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \dfrac{x+3}{\ln x} = -\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} x+3 = 4$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \ln x = 0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \dfrac{x+3}{\ln x} = +\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} x+3 = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $"\dfrac{\infty}{\infty}"$:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+3}{\ln x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{\ln x} + \dfrac{3}{\ln x} \right)$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x)'}{(\ln x)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{\ln x} = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+3}{\ln x} = +\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|\|$	$-$		0	$+$	
f	0	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$e+3$	$\nearrow$	$+\infty$
			$-\infty$				

4) $f(x) = x^2 - 2 + \ln x \Leftrightarrow D_f =]0;+\infty[$.

❖ $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = x^2 - 2 + \ln x \Leftrightarrow f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in]0;+\infty[; f'(x) = \dfrac{2x^2+1}{x} > 0$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^2 - 2 = -2$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^2 - 2 + \ln x = -\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2 + \ln x = +\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f		$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$		

5) $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x} \Leftrightarrow D_f =]0;+\infty[$.

❖ $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1(1+\ln x)}{x^2} = \dfrac{1-1-\ln x}{x^2}$

$\Leftrightarrow \forall x \in]0;+\infty[; f'(x) = -\dfrac{\ln x}{x^2}$.

- $\forall x \in]0;+\infty[; f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln x > 0 \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow x \in]0;1[$.

❖ $f(1) = \dfrac{1+\ln 1}{1} = 1$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{1+\ln x}{x} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (1+\ln x) \times \dfrac{1}{x}$.

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (1+\ln x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{1}{x} = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (1+\ln x) \times \dfrac{1}{x} = -\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{1+\ln x}{x} = -\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\ln x}{x} = 0$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

6) $f(x) = x\ln 2 - 2\ln x \Leftrightarrow D_f =]0;+\infty[$.

❖ $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = x\ln 2 - 2\ln x \Leftrightarrow f'(x) = \ln 2 - \dfrac{2}{x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in]0;+\infty[; f'(x) = \dfrac{x\ln 2 - 2}{x}$.

- $\forall x \in]0;+\infty[; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x\ln 2 - 2}{x} > 0 \Leftrightarrow x\ln 2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{2}{\ln 2} \Leftrightarrow x \in \left]\dfrac{2}{\ln 2};+\infty\right[$

❖ $f\left(\dfrac{2}{\ln 2}\right) = \left(\dfrac{2}{\ln 2}\right)\ln 2 - 2\ln\left(\dfrac{2}{\ln 2}\right) = 2 - 2\ln\left(\dfrac{2}{\ln 2}\right)$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (x\ln 2) = 0$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (-2\ln x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln 2 - 2\ln x = +\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln 2 = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ ، ومنه فإننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $"\infty - \infty"$:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln 2 - 2\ln x = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\ln 2 - \dfrac{2\ln x}{x}\right)$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln 2 - \dfrac{2\ln x}{x}\right) = \ln 2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\ln 2 - \dfrac{2\ln x}{x}\right) = +\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x\ln 2 - 2\ln x = +\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		$\frac{2}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$2-2\ln\left(\frac{2}{\ln 2}\right)$	↗	$+\infty$

دراسة دالة لوغاريتمية:

حل التمرين 18:

الدالة f معرفة بـ: $f(x)=\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$.

1) $f(x)=\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) \Leftrightarrow D_f=]-2;2[$.

❖ $\forall x\in D_f; f(x)=\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) \Leftrightarrow f'(x)=\frac{\frac{1\times(2-x)-(2+x)(-1)}{(2-x)^2}}{\frac{2+x}{2-x}}=\frac{4}{(2-x)^2}\times\frac{2-x}{2+x}$

$\Leftrightarrow \forall x\in D_f; f'(x)=\frac{4}{(2-x)(2+x)}>0$.

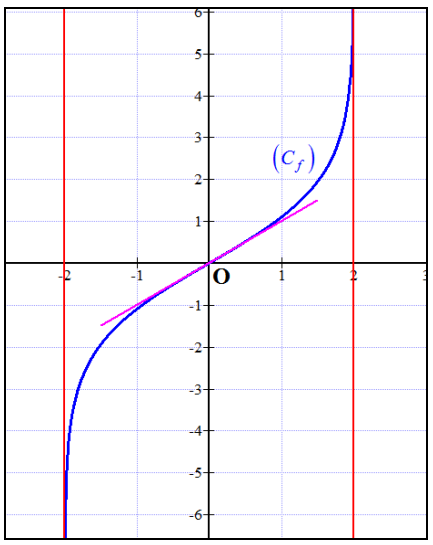
❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} 2+x=0^+$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} 2-x=-4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)=0^- \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)=-\infty$

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} 2+x=4$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} 2-x=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)=+\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	-2		2
$f'(x)$	‖	$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f :



2) $x \in]-2;2[\Leftrightarrow (-x) \in]-2;2[$.

❖ $\forall (-x) \in]-2;2[; f(-x) = ln\left(\frac{2+(-x)}{2-(-x)}\right) = ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = -ln\left(\frac{1}{\frac{2-x}{2+x}}\right)$

$= -ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = -f(x)$.

❖ نستنتج أنه من أجل كل نقطة $M(x;f(x))$ من (C_f)، فإن نظيرتها $M'(-x;-f(x))$ بالنسبة للنقطة O مبدأ المعلم، تنتمي أيضا لـ (C_f).

ومنه فإن: (C_f) يقبل النقطة O مبدأ المعلم كمركز تناظر.

حل التمرين 19:

الدالة f معرفة بـ: $f(x) = ln\left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right)$.

1) $f(x) = ln\left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right) \Leftrightarrow D_f = \mathbb{R}^*$.

❖ $\forall x \in \mathbb{R}^* ; f(x) = ln\left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{10x(5x^2+2)-5x^2(10x)}{(5x^2+2)^2}}{\frac{5x^2}{5x^2+2}}$

$= \frac{20x}{(5x^2+2)^2} \times \frac{5x^2+2}{5x^2} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^* ; f'(x) = \frac{4}{x(5x^2+2)}$.

❖ $\forall x \in \mathbb{R}^* ; f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x(5x^2+2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in]0;+\infty[$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{5+\frac{2}{x^2}}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} ln\left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right) = 0$.

❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} ln\left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right) = -\infty$.

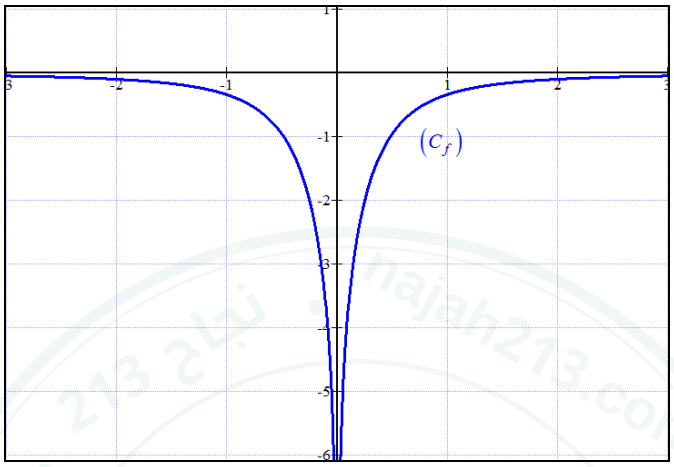
❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} ln\left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right) = -\infty$

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{5+\frac{2}{x^2}}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\frac{5x^2}{5x^2+2}\right) = 0$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
f	0	↘	‖	↗	0
		$-\infty$	‖	$-\infty$	

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f :



2) $\forall x \in \mathbb{R}^*; 0 < 5x^2 < 5x^2 + 2 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{5x^2}{5x^2+2} < 1 \Leftrightarrow ln\left(\dfrac{5x^2}{5x^2+2}\right) < 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*; f(x) < 0$.

حل التمرين 20:

الدالة f معرفة بـ: $f(x) = ln(ax+b)$ ، حيث: a و b عددان حقيقيان.

❖ (C_f) التمثيل البياني للدالة f يقطع محور الفواصل في النقطة $A(2;0)$ ، معناه:

$$f(2) = 0 \Leftrightarrow ln(2a+b) = 0 \Leftrightarrow 2a+b = 1 \quad (1)$$

❖ و (C_f) يقبل عند النقطة $A(2;0)$ مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته $y = x$ ، معناه: $f'(2) = 1$.

• وبما أنه من أجل كل $x \in D_f$ ، $f'(x) = \dfrac{a}{ax+b}$ ، يكون لدينا: $\dfrac{a}{2a+b} = 1$. (2)

❖ من (1) و(2) نستنتج أن: $a = 1$ ، و $b = -1$. ومنه فإن: $f(x) = ln(x-1)$.

حل التمرين 21:

الدالة f معرفة بـ: $f(x) = ln\left(1+e^x\right)$.

1) $f(x) = ln\left(1+e^x\right) \Leftrightarrow D_f = \mathbb{R}$.

❖ $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = ln\left(1+e^x\right) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} > 0$.

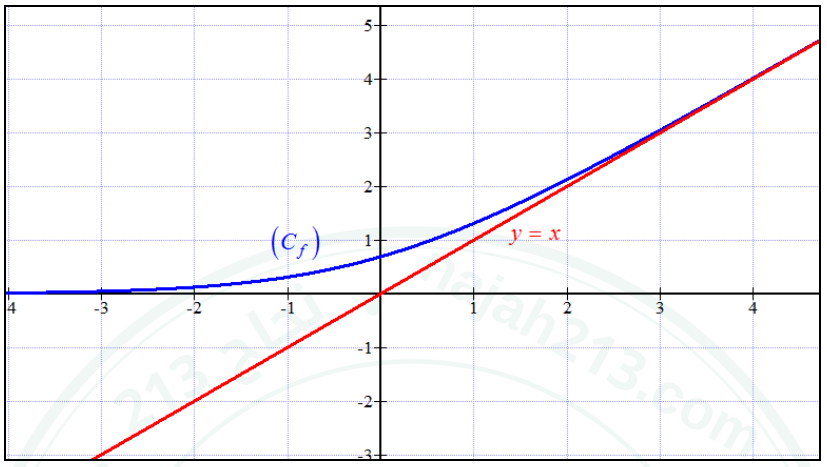
❖ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1+e^x\right) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} ln\left(1+e^x\right) = 0$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+e^x\right) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} ln\left(1+e^x\right) = +\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	↗	$+\infty$

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f والمستقيم الذي معادلته $y=x$:



2) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)-x=ln\left(1+e^x\right)-x=ln\left(1+e^x\right)-ln\left(e^x\right)=ln\left(\dfrac{1+e^x}{e^x}\right)$

$=ln\left(\dfrac{1}{e^x}+1\right)=ln\left(1+e^{-x}\right)$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(1+e^{-x}\right)=ln1=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=0$.

❖ نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y=x$ مماس مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

حل التمرين 22:

الدالة f معرفة بـ: $f(x)=ln\left(e^x+e^{-x}\right)$.

1) $f(x)=ln\left(e^x+e^{-x}\right)\Leftrightarrow D_f=\mathbb{R}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=ln\left(e^x+e^{-x}\right)\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^x-\dfrac{1}{e^x}}{e^x+\dfrac{1}{e^x}}=\dfrac{\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}}{\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}; f'(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

❖ $\forall x\in\mathbb{R}; f'(x)>0\Leftrightarrow \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}>0\Leftrightarrow e^{2x}-1>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x\in\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

❖ $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=ln\left(e^{\frac{1}{2}}+e^{-\frac{1}{2}}\right)=ln\left(\sqrt{e}+\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)\simeq 0{,}8$.

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+e^{-x}\right)=+\infty\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} ln\left(e^x+e^{-x}\right)=+\infty$.

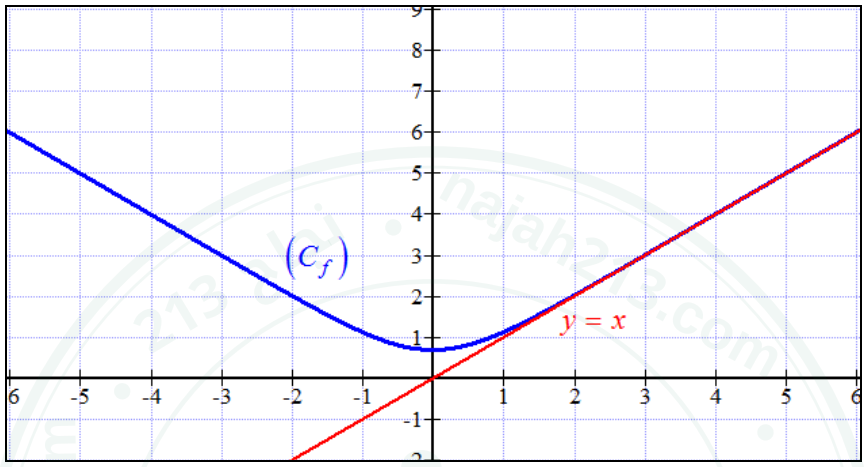
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}+e^{-x}\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)=+\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$ln\left(\sqrt{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	↗	$+\infty$

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f والمستقيم الذي معادلته $y=x$:



2) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)=ln\left(e^{x}\left(1+e^{-2x}\right)\right)=ln\left(e^{x}\right)+ln\left(1+e^{-2x}\right)$

$=x+ln\left(1+e^{-2x}\right)$.

3) $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)-x=ln\left(1+e^{-2x}\right)$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-2x}\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^{-2x}\right)=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(1+e^{-2x}\right)=ln1=0$.

❖ ومنه فإن المستقيم D الذي معادلته $y=x$ مماس مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

دراسة دالة مرجعية تتضمن عبارة لوغاريتمية:

حل التمرين 23:

الدالة f معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=ln\,x-3(ln\,x)^2$.

1) $\forall x\in]0;+\infty[; f(x)=ln\,x-3(ln\,x)^2 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{x}-6\times\frac{1}{x}\times ln\,x$

$\Leftrightarrow \forall x\in]0;+\infty[; f'(x)=\frac{1-6ln\,x}{x}$.

❖ $\forall x\in]0;+\infty[; f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-6ln\,x}{x}>0 \Leftrightarrow 1-6ln\,x>0 \Leftrightarrow x<e^{\frac{1}{6}} \Leftrightarrow x\in\left]0;e^{\frac{1}{6}}\right[$.

❖ $f\left(e^{\frac{1}{6}}\right)=ln\left(e^{\frac{1}{6}}\right)-3\left(ln\left(e^{\frac{1}{6}}\right)\right)^2=\frac{1}{6}-3\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{12}$.

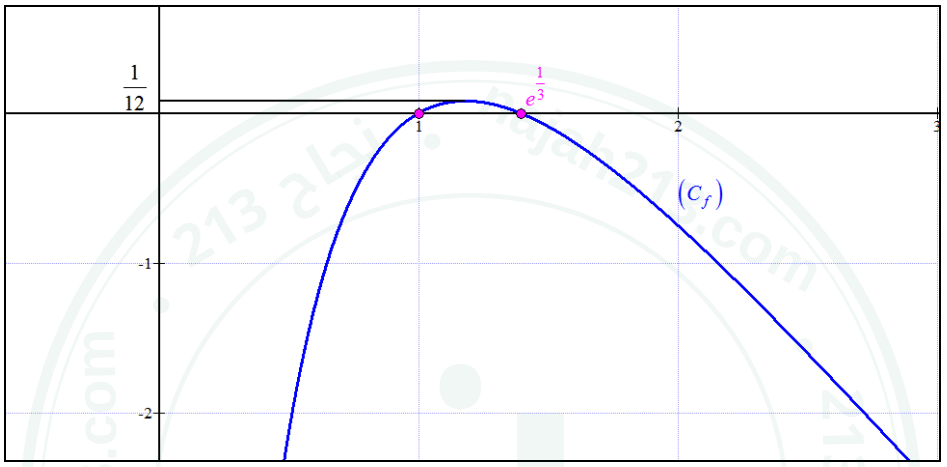
❖ $\forall x\in]0;+\infty[; f(x)=ln\,x-3(ln\,x)^2=ln\,x(1-3ln\,x)$.

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 1-3\ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x(1-3\ln x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} 1-3\ln x = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x(1-3\ln x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		$e^{\frac{1}{6}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{12}$	↘	$-\infty$

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f :



2) $\forall x \in]0;+\infty[; f(x) = \ln x - 3(\ln x)^2 = \ln x(1-3\ln x)$.

❖ $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

❖ $1-3\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{3}}$.

❖ ومنه فإن جدول إشارة الدالة f يكون كالتالي:

x	0		1		$e^{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$1-3\ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه فإن:

❖ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $x = e^{\frac{1}{3}}$.

❖ $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0;1[\cup]e^{\frac{1}{3}};+\infty[$.

❖ $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1;e^{\frac{1}{3}}[$.

حل التمرين 24:

الدالة f معرفة بـ: $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$.

1) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x} \Leftrightarrow D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

❖ $\forall x \in D_f ; f(x) = \dfrac{1}{x \ln x} \Leftrightarrow f'(x) = -\dfrac{1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x}}{(x \ln x)^2}$

$\Leftrightarrow \forall x \in D_f ; f'(x) = -\dfrac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2}$.

❖ $\forall x \in D_f ; f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2} > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1$

$\Leftrightarrow x < e^{-1} \Leftrightarrow x \in]0; e^{-1}[$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x \ln x = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{1}{x \ln x} = +\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} (x \ln x) = 0^- \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \dfrac{1}{x \ln x} = -\infty$

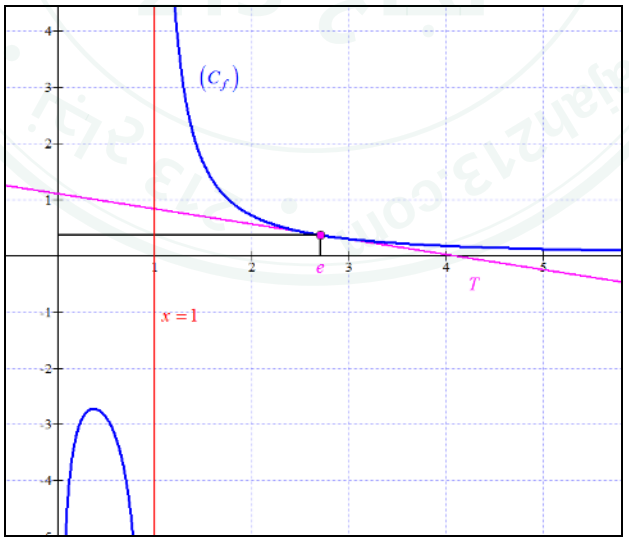
❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} (x \ln x) = 0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \dfrac{1}{x \ln x} = +\infty$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x \ln x} = 0$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
f	‖ $+\infty$	↘	0

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f والمماس T:



2) معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها e هي: $y = f'(e)(x-e) + f(e)$.

❖ $f(e) = \dfrac{1}{e \ln e} = \dfrac{1}{e}$.

❖ $f'(e) = -\dfrac{\ln e + 1}{(e \ln e)^2} = -\dfrac{2}{e^2}$.

❖ $y=\left(-\frac{2}{e^2}\right)(x-e)+\frac{1}{e}=-\frac{2}{e^2}x+\frac{3}{e}$.

❖ ومنه فإن معادلة المماس T لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها e هي: $y=-\frac{2}{e^2}x+\frac{3}{e}$.

حل التمرين 25:

الدالة f معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^2-2+\ln x$.

1) $\forall x\in]0;+\infty[\,;f(x)=x^2-2+\ln x \Leftrightarrow f'(x)=2x+\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \forall x\in]0;+\infty[\,;f'(x)=\frac{2x^2+1}{x}>0$.

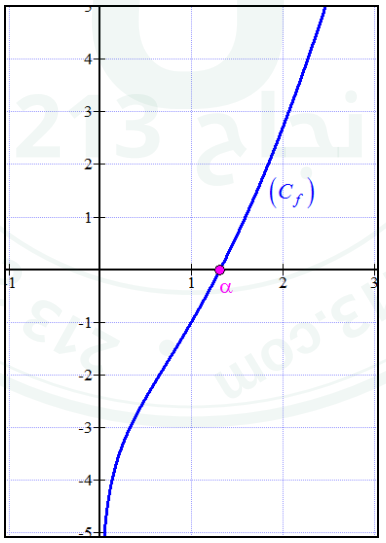
❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x^2-2=-2$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x^2-2+\ln x=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2+\ln x=+\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f:



2) بما أن الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$، و $0\in\left]\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$، فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]0;+\infty[$.

❖ من خلال جدول القيم التالي، نلاحظ أن $1,314<\alpha<1,315$.

x	1,25	1,3	1,31	1,314	1,315	1,32
$f(x)$	−0,2144	−0,0476	−0,0139	−0,0003	0,0031	0,02

حل التمرين 26:

الدالة f معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)$.

1) $\forall x\in]0;+\infty[\,;f(x)=x+ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)\Leftrightarrow f'(x)=1+\frac{\frac{1\times(2x+1)-x\times 2}{(2x+1)^2}}{\frac{x}{2x+1}}$

$\Leftrightarrow \forall x\in]0;+\infty[\,;f'(x)=1+\frac{1}{x(2x+1)}>0$.

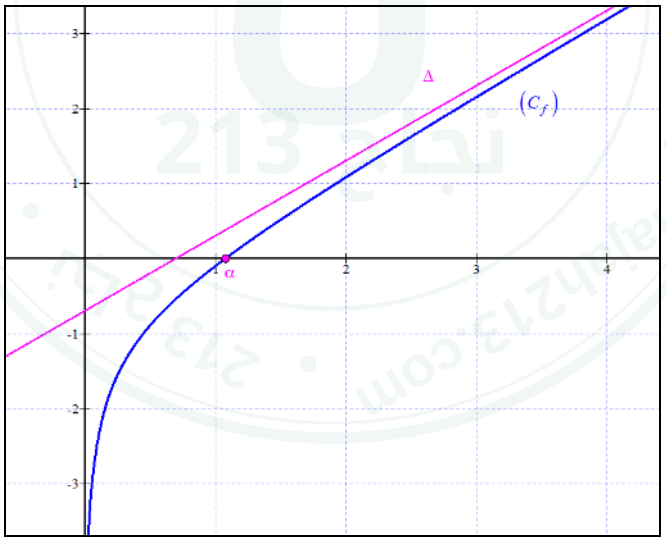
❖ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{x}{2x+1}\right)=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)=-\infty\Leftrightarrow \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x+ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)=ln\frac{1}{2}=-ln 2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x+ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)=+\infty$.

❖ ومنه فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

❖ الشكل الموالي يمثل (C_f) التمثيل البياني للدالة f والمستقيم Δ:



2) $f(x)-(x-ln 2)=x+ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)-x+ln 2=ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)+ln 2=ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x+1}=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)=ln 1=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-ln 2)=0$.

❖ ومنه فإن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-ln 2$ مماس مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

3) $\forall x\in]0;+\infty[\,;ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)=ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2x}}\right)$.

❖ $\forall x \in]0;+\infty[; \frac{1}{2x} > 0 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{2x} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{2x}} < 1 \Leftrightarrow ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2x}}\right) < 0$

$\Leftrightarrow f(x)-(x-ln2)<0$.

❖ ومنه فإنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ ، (C_f) يقع تحت المستقيم Δ .

(4

❖ $f(1)=1+ln\left(\frac{1}{3}\right)=1-ln3 \simeq -0,1<0$.

❖ $f\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{5}{4}+ln\left(\frac{\frac{5}{4}}{2\left(\frac{5}{4}\right)+1}\right)=\frac{5}{4}+ln\left(\frac{5}{14}\right) \simeq 0,2>0$.

❖ بما أن الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، و $0 \in \left]f(1);f\left(\frac{5}{4}\right)\right[$ ، فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in \left]1;\frac{5}{4}\right[$.

تمّ بحمد الله وتوفيقه