أسئلة
الدوال الأصلية
و الحساب التكاملي
في البكالوريا
مع حلولها

لشعبة : علوم تجريبية
من 2008 إلى 2019

✍إعداد و تقديم : خالد بخاخشة

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

أسئلة الدوال الأصلية و التكاملات

التمرين [1] [باك 2008][م1]

g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.

- H الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان .

ـ عيّن α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$. استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0

التمرين[2] [باك 2008][م2]

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$.

- أكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=x+a+\dfrac{b}{(x-1)^2}$ حيث a و b عددان حقيقيان.
- عيّن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ و التي تحقق $F(1)=2$.

التمرين [3] [باك 2009][م1]

k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $k(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}$ ، (C_k) تمثيلها البياني.

- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=\dfrac{1}{2}$ ، $x=-\dfrac{1}{2}$.

التمرين [4] [باك 2009][م2]

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=x-1$ ، $x=0$ و $x=1$.

التمرين [5] [باك 2011][م1]

g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ ، و f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

- α عدد حقيقي . بيّن أن الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.
- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=1-\dfrac{2}{x+1}$ ثم عيّن دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$

التمرين [6] [باك 2011][م2]

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^x-ex-1$. (C_f) تمثيلها البياني .

- أحسب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ ؛ $x=\alpha$. ($\alpha\in]1{,}75;1{,}76[$ و يحقق $f(\alpha)=0$)
- أثبت أن : $A(\alpha)=\left(\dfrac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$ (ua هي وحدة المساحات)

التمرين [7] [باك 2012][م1]

f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي : $f(x)=x+5+6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

- لتكن g الدالة المعرّفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g(x)=\dfrac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

بيّن أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

التمرين [8] [باك 2012][م2]

g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-xe^{x}$.

- h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=(ax+b)e^{x}$

أ ـ عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{x}$ على $\mathbb{R}$.

بـ ـ إستنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

التمرين [9] [باك 2015][م1]

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$.

- F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1)=-3$.

1) بيّن أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

2) بيّن أن $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$ ، ثم إستنتج عبارة الدالة F .

التمرين [10] [باك 2015][م2]

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.
- إستنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

التمرين [11] [باك 2016][الدورة الأولى][م1]

f الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x-1$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

- أ ـ جد دالة أصلية للدالة $x\mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

بـ ـ أحسب I_n مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$ حيث n عدد طبيعي $(n>1)$.

جـ ـ عيّن أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n>n_0$ فإن : $I_n>2$.

التمرين [12] [باك 2016][الدورة الأولى][م2]

f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

- h و H الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=x+f(x)$ و $H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

2) أ ـ أحسب التكامل التالي : $A(\lambda)=\int_0^{\lambda}h(x)dx$ ، حيث λ عدد حقيقي موجب تماما و فسّر النتيجة هندسيا .

بـ ـ أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.

التمرين [13] [باك 2016]][الدورة الثانية][[م1]

f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

- بيّن أنّ الدالة $x\mapsto \frac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$
- أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

التمرين [14] [باك 2017][الدورة العادية][م2]

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

- F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x)=2x+\left(x^2+2x+2\right)e^{1-x}$.

تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$، ثم أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f)، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

التمرين [15] [باك 2017][الدورة الإستثنائية][م2]

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=e^{-x}-2-\dfrac{e}{x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

(γ) المنحنى الذي معادلته: $y=e^{-x}-2$.

- ليكن n عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (γ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=-e^n$ و $x=-e^{n+1}$.

أحسب العدد الحقيقي l حيث: $l=A(0)+A(1)+....+A(2016)$.

التمرين [16] [باك 2018][م1]

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

- باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$.
- أحسب العدد A مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=3$ و $y=2x+1$

التمرين [17] [باك 2018][م2]

f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

- n عدد طبيعي حيث $n>1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

2) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (I_n).

التمرين [18] [باك 2019][م1]

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\ln x$. (C_f) تمثيلها البياني.

- H الدالة المعرفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ: $H(x)=\int_3^x \ln(t)dt$ حيث t متغيّر حقيقي موجب تماما.

أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة، عيّن عبارة $H(x)$ بدلالة x.

بـ- أحسب A مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين: $x=3$ و $x=4$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

حلول مقترحة

حل مقترح للتمرين[1]

g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.

H الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان

ـ تعيين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$.

الدالة H قابلة للإشتقاق على المجال $]-2;+\infty[$ ، و $H'(x)=\alpha e^{-x}+\left(-e^{-x}\right)(\alpha x+\beta)=(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}$.

H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$ معناه : $(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$ ومنه نجد : $\alpha=1$ و $\beta=2$.

لدينا: $g(x)=g(x)+1-1=H'(x)+1$ ومنه الدالة الأصلية للدالة g من الشكل : $G(x)=H(x)+x+c$

الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند 0 هي : $G(x)=(x+2)e^{-x}+x+2$.

حل مقترح للتمرين[2]

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$.

كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=x+a+\dfrac{b}{(x-1)^2}$ حيث a و b عددان حقيقيان.

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}=\frac{x^3+3x^2+3x+1+1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^3+1}{(x+1)^2}=x+1+\frac{1}{(x+1)^2}$$

تعيين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تحقق $F(1)=2$.

الدالة f مستمرة على $]-1;+\infty[$ وبالتالي فدالتها الأصلية التي تحقق $F(1)=2$ هي الدالة F المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ :

$$F(x)=\int_1^x\left(t+1+\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+t-\frac{1}{t+1}\right]_1^x=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x+1}+1$$ ومنه : $F(x)=\int_1^x f(t)dt$.

حل مقترح للتمرين[3]

حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) والمستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=\dfrac{1}{2}$ ، $x=-\dfrac{1}{2}$.

$$A=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}k(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}g(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{4}{x+1}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+4\ln(x+1)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2+4\ln(x+1)\right]_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}+4\ln 3\,uv$$

حل مقترح للتمرين[4]

f دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

حساب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $y=x-1$ ، $x=0$ و $x=1$.

$$S=\int_0^1\left[(x-1)-f(x)\right]dx=\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx=\left[\frac{1}{2}\left(\ln(x+1)\right)^2\right]_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

حل مقترح للتمرين[5]

g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ ، و f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

- تبيان أن الدالة h بحيث $x-\ln(x-\alpha)$ هي دالة أصلية للدالة $h(x)=(x-\alpha)\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $]\alpha;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]\alpha;+\infty[$:

$$h'(x)=1\times\ln(x-\alpha)+\frac{1}{x-\alpha}\times(x-\alpha)-1=\ln(x-\alpha)$$

- التحقق :

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{x+1-2}{x+1}=\dfrac{x+1}{x+1}-\dfrac{2}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}$.

تعيين دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=1-\dfrac{2}{x+1}+\ln(x-1)-\ln(x+1)$

و بالتالي دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$ من الشكل :

$$F(x)=x-2\ln(x+1)+\left[(x-1)\ln(x-1)-x\right]-\left[(x+1)\ln(x+1)-x\right]=x-(x+3)\ln(x+1)+(x-1)\ln(x-1)$$

حل مقترح للتمرين[6]

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^x-ex-1$. (C_f) تمثيلها البياني .

- حساب ، بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ ، $x=\alpha$.

$$A(\alpha)=-\int_0^{\alpha}f(x)dx=-\int_0^{\alpha}(e^x-ex-1)dx=-\left[e^x-\frac{1}{2}ex^2-x\right]_0^{\alpha}=1-\left(e^{\alpha}-\frac{1}{2}e\alpha^2-\alpha\right)$$

- إثبات أن : $A(\alpha)=\left(\dfrac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$ (ua هي وحدة المساحات)

لدينا : $f(\alpha)=0$ ومنه $e^{\alpha}-e\alpha-1=0$ أي $e^{\alpha}=e\alpha+1$ و بالتالي :

$$A(\alpha)=-e^{\alpha}+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha+1=-(e\alpha+1)+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha+1=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$$

حل مقترح للتمرين[7]

f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي : $f(x)=x+5+6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

- لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g(x)=\dfrac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

تبيان أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و من أجل كل $x\in]-\infty;0[$:

$$g'(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{6x}{x(x-1)}-\frac{6}{1-x}=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{6}{x-1}+\frac{6}{x-1}=f(x)$$

و منه الدالة g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

حل مقترح للتمرين[8]

g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-xe^x$.

h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=(ax+b)e^x$.

أ ـ تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $h'(x)=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$.

الدالة h أصلية للدالة $x\mapsto xe^x$ يعني: $h'(x)=xe^x$ ، و منه بالمطابقة نجد: $a=1$ و $b=-1$. أي $h(x)=(x-1)e^x$.

بـ ـ إستنتاج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$:

لدينا: $g(x)=1-xe^x$ و منه دالة أصلية للدالة g من الشكل: $G(x)=x-(x-1)e^x$.

حل مقترح للتمرين[9]

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$.

F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1)=-3$.

تبيان أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ يعني: من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $F'(x)=f(x)$.

$F'(x)=0$ تكافئ $f(x)=0$ تكافئ: $x=1$ أو $x=e^2$ ، و منه منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^2 .

تبيان أن $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln x$ على $]0;+\infty[$:

نضع: $u(x)=x\ln x-x$

الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $u'(x)=\ln x+\frac{1}{x}\times x-1=\ln x$.

و منه الدالة u هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln x$ على $]0;+\infty[$.

إستنتاج عبارة الدالة F :

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x\left(\ln t-2-\frac{\ln t}{t}+\frac{2}{t}\right)dt=\left[t\ln t-t-2t-\frac{1}{2}(\ln t)^2-2\ln t\right]_1^x=(2+x)\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^2-3x$$

حل مقترح للتمرين[10]

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

التحقق: من أجل كل عدد حقيقي x:

$$2f(x)+f'(x)-f''(x)=2xe^{2x+2}-2x+2+e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1-(4x+4)e^{2x+2}=1-2x-3e^{2x+2}$$

إستنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

لدينا: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

و منه $f(x)=-\frac{1}{2}f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}-x-\frac{3}{2}e^{2x+2}$.

و بالتالي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ من الشكل: $F(x)=\frac{1}{2}\left[-f(x)+f'(x)+x-x^2-\frac{3}{2}e^{2x+2}\right]+c$

أي: $F(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x+2}-\frac{1}{2}x^2+x-1+c$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

حل مقترح للتمرين[11]

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+x-1$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

أ- إيجاد دالة أصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

دالة أصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ على $]0;+\infty[$ من الشكل: $x\mapsto\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$. (لاحظ أن $x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ من الشكل $u'\times u$)

بـ- حساب I_n مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f)، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$ حيث n عدد طبيعي $(n>1)$.

$$I_n=\int_1^n\left[f(x)-(x-1)\right]dx=\int_1^n\frac{\ln x}{x}dx=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^n=\frac{1}{2}(\ln n)^2$$

جـ- تعيين أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n>n_0$ فإن: $I_n>2$.

$I_n>2$ معناه $(\ln n)^2>4$ أي $\ln n>2$ أو $\ln n<-2$ (مرفوض) ومنه $n>e^2$ وعليه: أصغر قيمة لـ n_0 هي $n_0=8$.

حل مقترح للتمرين[12]

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=x+f(x)=(x^2+2x+3)e^{-x}$ و $H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

1) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$:

H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ يعني: من أجل كل عدد حقيقي x ، $H'(x)=h(x)$.

الدالة H قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x ،

$$H'(x)=(2ax+b)e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}=(-ax^2+(2a-b)x+b-c)e^{-x}$$

ومنه بالمطابقة نجد: $a=-1$ ، $b=-5$ و $c=-7$ أي $H(x)=(-x^2-5x-7)e^{-x}$.

2) أ- حساب التكامل: $A(\lambda)=\int_0^{\lambda}h(x)dx$ ، حيث $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$.

$$A(\lambda)=\int_0^{\lambda}h(x)dx=\left[H(x)\right]_0^{\lambda}=(-\lambda^2-5\lambda-7)e^{-\lambda}+7$$

التفسير الهندسي:

$A(\lambda)$ يمثل مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$.

بـ- $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[(-\lambda^2-5\lambda-7)e^{-\lambda}+7\right]=7$.

حل مقترح للتمرين[13]

f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

تبيان أن الدالة $x\mapsto\dfrac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$

نضع: $h(x)=\dfrac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ ، الدالة h قابلة للإشتقاق على $]-1;+\infty[$ ومن أجل كل $x\in]-1;+\infty[$:

$$h'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}\left[1+\ln(x+1)\right]+\left(\frac{1}{x+1}\right)\times\left(\frac{-1}{x+1}\right)=\frac{1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

بـ حساب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left[\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]dx=\left[e\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]\right]_0^1=\frac{1+(2e-1)\ln 2}{2}$$

حل مقترح للتمرين[14]

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$.

- التحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

الدالة F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x:

$$F'(x)=2+(2x+2)e^{1-x}-(x^2+2x+2)e^{1-x}=2-x^2e^{1-x}=f(x)$$

- حساب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f)، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^1=F(1)-F(0)=(7-2e)u.a$$

حل مقترح للتمرين[15]

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=e^{-x}-2-\frac{e}{x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني. (γ) المنحنى الذي معادلته: $y=e^{-x}-2$.

n عدد طبيعي و $A(n)$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (γ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما:

$x=-e^n$ و $x=-e^{n+1}$.

$$A(n)=\int_{-e^{n+1}}^{-e^n}\left[f(x)-e^{-x}+2\right]dx=\int_{-e^{n+1}}^{-e^n}\left(-\frac{e}{x}\right)dx=-e\int_{-e^{n+1}}^{-e^n}\left(\frac{1}{x}\right)dx=-e\left[\ln|x|\right]_{-e^{n+1}}^{-e^n}=e$$

حساب العدد الحقيقي l: $l=A(0)+A(1)+....+A(2016)=2017e$.

حل مقترح للتمرين[16]

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

تعيين دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$.

الدالة $x\mapsto xe^{-x}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالتالي فدالتها الأصلية التي تنعدم عند 1 هي الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=\int_1^x te^{-t}\,dt$.

نضع $u(t)=t$ ، $v'(t)=e^{-t}$ ومنه $u'(t)=1$ ، $v(t)=-e^{-t}$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا:

$$F(x)=\left[-te^{-t}\right]_1^x-\int_1^x -e^{-t}\,dt=-xe^{-x}+e^{-1}-\int_1^x -e^{-t}\,dt=-xe^{-x}+e^{-1}-e^{-x}+e^{-1}=(-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$$

و منه الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$ هي: $F(x)=(-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$.

حساب العدد A مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=3$ و $y=2x+1$

$$A=\int_1^3\left((2x+1)-f(x)\right)dx=\int_1^3 xe^{-x}dx=F(3)-F(1)=2e^{-1}-4e^{-3}(u.a)$$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

حل مقترح للتمرين[17]

f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

n عدد طبيعي حيث $n>1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

لدينا : $I_n=\int_1^n f(x)dx=\int_1^n\left(\dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)dx=\left[\ln(1+x\ln x)\right]_1^n=\ln(1+n\ln n)$.(لاحظ أن f من الشكل : $\dfrac{u'}{u}$)

2) دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (I_n) :

ندرس إشارة الفرق : $I_{n+1}-I_n$

لدينا : $I_{n+1}-I_n=\int_1^{n+1}f(x)dx-\int_1^n f(x)dx=\int_1^n f(x)dx+\int_n^{n+1}f(x)dx-\int_1^n f(x)dx=\int_n^{n+1}f(x)dx$

ومن أجل $n>1$: $\int_n^{n+1}f(x)dx>0$ وبالتالي المتتالية (I_n) متزايدة تماما .

حل مقترح للتمرين[18]

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\ln x$. (C_f) تمثيلها البياني .

1) H الدالة المعرّفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ : $H(x)=\int_3^x\ln(t)dt$ حيث t متغيّر حقيقي موجب تماما .

أ ـ تعيين عبارة $H(x)$ بدلالة x .

نضع $u(t)=\ln(t)$ ، $v'(t)=1$ و منه $u'(t)=\dfrac{1}{t}$ ، $v(t)=t$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا :

$$H(x)=[t\ln t]_3^x-\int_3^x\frac{1}{t}\times t\,dt=x\ln x-3\ln 3-\int_3^x dt=x\ln x-3\ln 3-[t]_3^x$$

ومنه $H(x)=x\ln x-3\ln 3-(x-3)$ أي : $H(x)=-x+3+x\ln x-3\ln 3$.

بـ ـ حساب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين : $x=3$ و $x=4$.

$$A=\int_3^4 f(x)dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}+\ln x\right)dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}\right)dx+\int_3^4\ln x\,dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}\right)dx+H(4)=\left[\ln|x-2|\right]_3^4+H(4)$$

ومنه $A=\ln 2+4\ln 4-4-3\ln 3+3$ أي : $A=(-1+9\ln 2-3\ln 3)(u.a)$.

بالتوفيق للجميع في بكالوريا 2020

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

الموقع الأول لتحضير الفروض والاختبارات في الجزائر

القسم التحضيري	
السنة الأولى ابتدائي	
السنة الثانية ابتدائي	
السنة الثالثة ابتدائي	
السنة الرابعة ابتدائي	
السنة الخامسة ابتدائي	
شهادة التعليم الابتدائي	
السنة الأولى متوسط	
السنة الثانية متوسط	
السنة الثالثة متوسط	
السنة الرابعة متوسط	
شهادة التعليم المتوسط	
السنة الأولى ثانوي	
السنة الثانية ثانوي	
السنة الثالثة ثانوي	
شهادة البكالوريا	