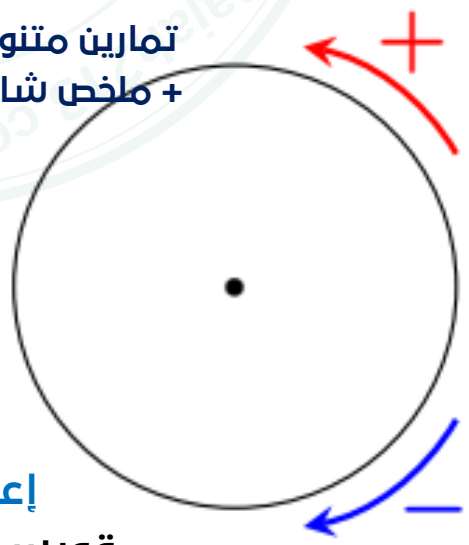
الخليل للرياضيات
قويسم

سنة ثانية ثانوي
الشعب:
علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي

سلسلة تمارين حول:
الزوايا الموجهة

تمارين متنوعة مرفقة بحلول مفصلة
+ ملخص شامل حول الزوايا الموجهة



إعداد الأستاذ:
قويسم إبراهيم الخليل

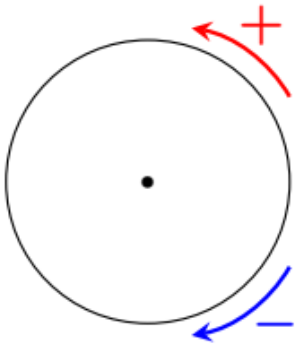
آخر تحديث:
[16 أفريل 2022]



ملخص شامل حول:
الزوايا الموجهة

najah213.com · نجاح 213

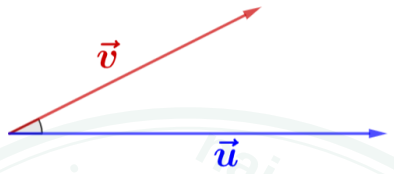
1 الزوايا الموجهة



- يوجه المستوي:
  - توجيها مباشرا (موجب) ← عكس عقارب الساعة
  - توجيها غير مباشرا (سالب) ← اتجاه عقارب الساعة
- نسمي دائرة مثلثية كل دائرة موجهة في الاتجاه المباشر والتي نصف قطرها 1

فيما يلي: $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث أشعة غير معدومة:

- نسمي الثنائية $(\vec{u};\ \vec{v})$ زاوية موجهة لشعاعين



- إذا كان x قيس للزاوية $(\vec{u};\vec{v})$ فإن كل الاعداد من الشكل $\boxed{x+2k\pi}$ هي أقياس للزاوية $(\vec{u};\vec{v})$ حيث: $k\in\mathbb{Z}$
- يوجد قيس على المجال $\boxed{]-\pi;\pi]}$ يسمى القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u};\ \vec{v})$
- إيجاد القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u};\ \vec{v})=x$:
  - يكتب الشكل العام للزاوية بـ: $\boxed{(\vec{u};\ \vec{v})=x+2k\pi}$
  - نحصر الشكل العام للزاوية بين π و $-\pi$ ، أي: $\boxed{-\pi<x+2k\pi<\pi}$
  - يكفي إيجاد k انطلاقا من هذا الحصر ثم تعويضه في الشكل العام لحساب القيس الرئيسي

ملاحظة: يوجد طريقة أخرى لإيجاد القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u};\vec{v})$ ، سنتطرق إليها خلال التمارين

تقايس الزوايا الموجهة:

ليكن α قيسا للزاوية $(\vec{u};\vec{v})$ و α' قيسا للزاوية $(\vec{u'};\vec{v'})$

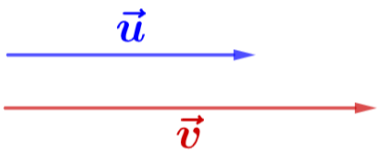
- تكون الزاويتان $(\vec{u};\vec{v})$ و $(\vec{u'};\vec{v'})$ متقايستان إذا وفقط إذا كان من أجل كل $k\in\mathbb{Z}$:

$\boxed{\alpha'=\alpha+2k\pi}$

- أي: $\alpha'-\alpha$ مضاعف لـ 2π

الارتباط الخطي في الزوايا الموجهة:

- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه:
  - $(\vec{u};\vec{v})=2k\pi$ وهذا يعني $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في نفس الاتجاه



  - $(\vec{u};\vec{v})=\pi+2k\pi$ وهذا يعني $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في اتجاهين متعاكسين



الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

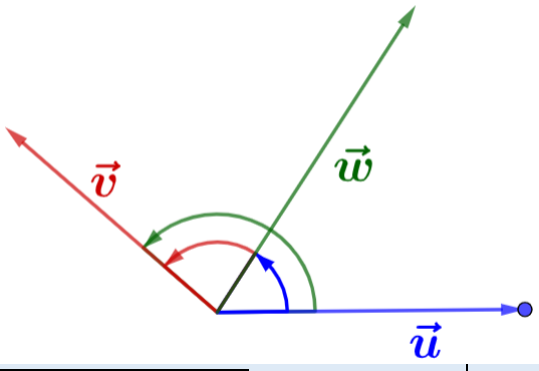
خاصية $(k;k') \in \mathbb{R}^*$

☒ **إذا كان:** k وk' **من نفس الإشارة فإن:** $(k\vec{u};k'\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v})$

☒ **إذا كان:** k وk' **مختلفين في الإشارة فإن:** $(k\vec{u};k'\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi$

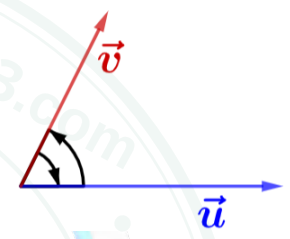
علاقة شال:

لدينا: $\boxed{(\vec{u};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{w}) + (\vec{w};\vec{v})}$

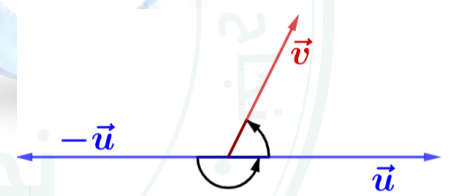


نتائج:

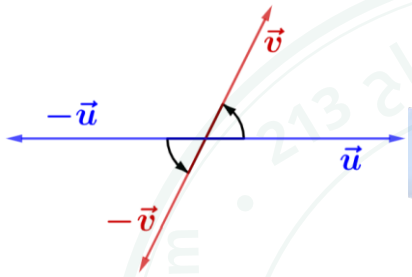
$\boxed{(\vec{u};\vec{v}) = -(\vec{v};\vec{u})}$



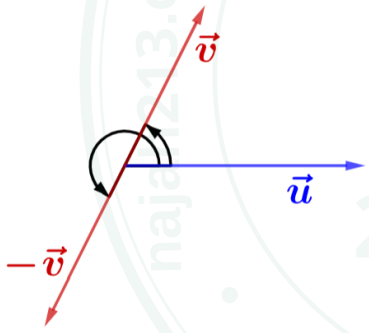
$\boxed{(-\vec{u};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi}$



$\boxed{(-\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v})}$



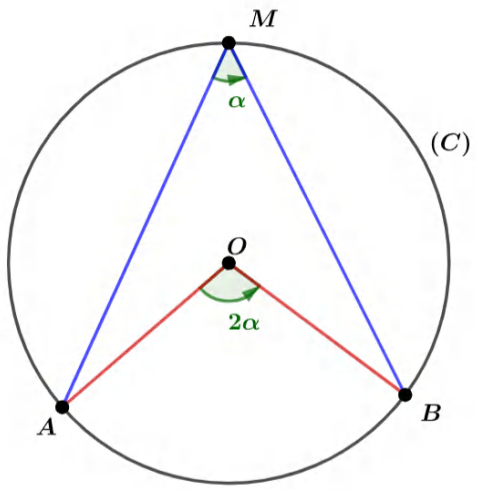
$\boxed{(\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi}$



الزاوية المحيطية

إذا كانت A ، B وM **ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى من دائرة مثلثية** (C) **مركزها** O **فإن:**

$$\boxed{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})}$$



الخليل للرياضيات
najah213.com
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

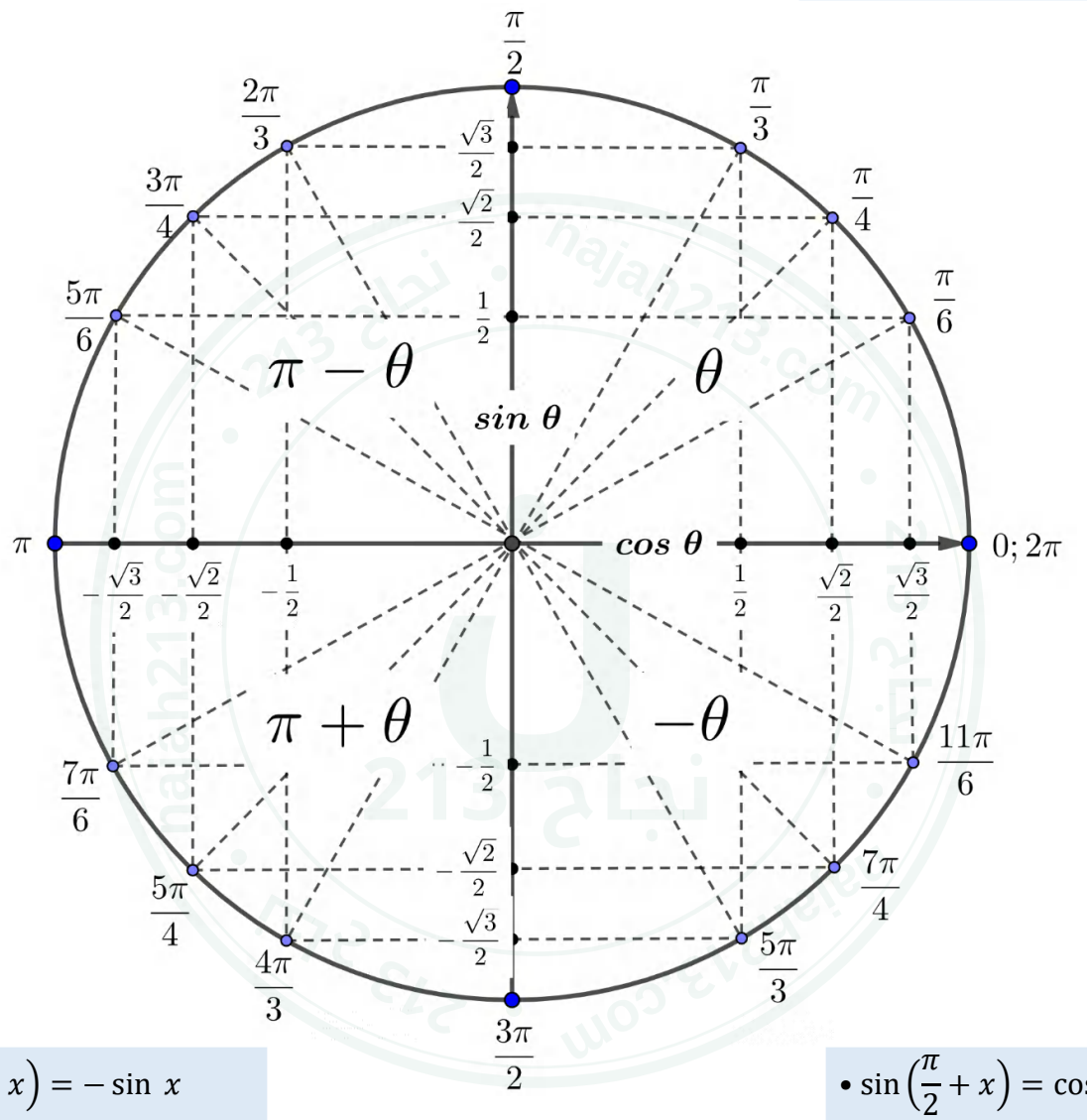
2 حساب المثلثات

الدائرة المثلثية

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$

- $\cos(\pi + x) = -\cos\ x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos\ x$

- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$



- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\ x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\ x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

جدول الزوايا الشهيرة

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

بعض العلاقات المثلثية الشهرية

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

- $-1 \leq \cos^2 x < 1$
- $-1 \leq \sin^2 x < 1$

- $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
  $= 2\cos^2 x - 1$
  $= 1 - 2\sin^2 x$
- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
- $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$
- $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$

- $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

معادلات خاصة:

من أجل $k \in \mathbb{Z}$ لدينا:

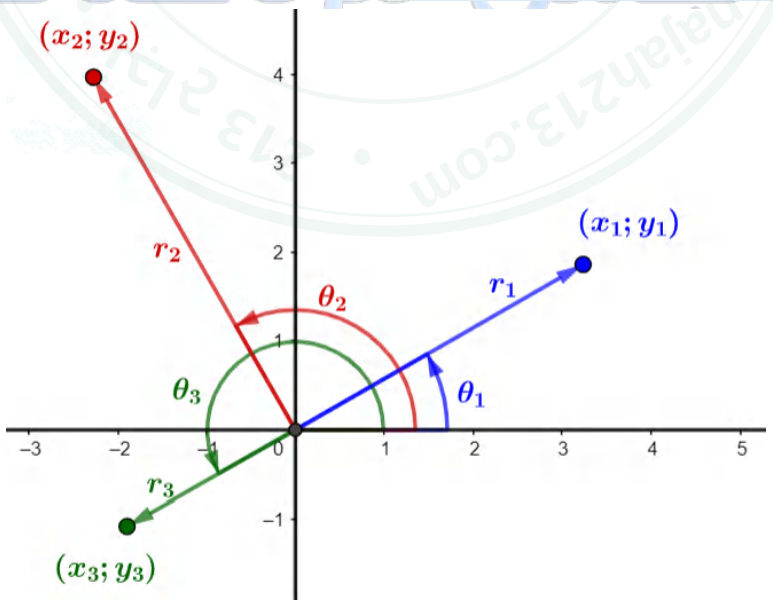
- $\sin x = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- $\sin x = 0 \Longrightarrow x = k\pi$
- $\sin x = -1 \Longrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

- $\cos x = 1 \Longrightarrow x = 2k\pi$
- $\cos x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $\cos x = -1 \Longrightarrow x = \pi + 2k\pi$

3 الاحداثيات القطبية والديكارتية

ليكن $(o; \vec{i}, \vec{j})$ معلم مباشر متعامد متجانس، ولتكن M نقطة من المستوي تختلف عن O

- **تسمى الثنائية $M(x; y)$ الاحداثيات الديكارتية للنقطة M**
- **تسمى الثنائية $M(r; \theta)$ الاحداثيات القطبية للنقطة M حيث $\boxed{r = OM}$ و $\boxed{\theta = (\vec{i}; \overrightarrow{OM})}$**



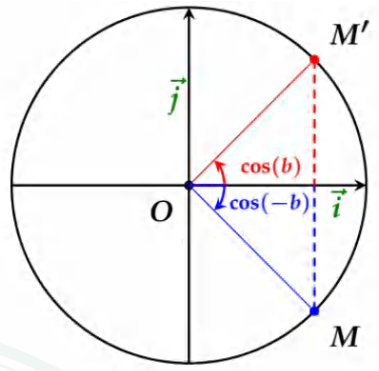
العلاقة بين الاحداثيات القطبية والديكارتية

$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$ ، $\boxed{x = r\cos\theta}$ ، $\boxed{y = r\sin\theta}$

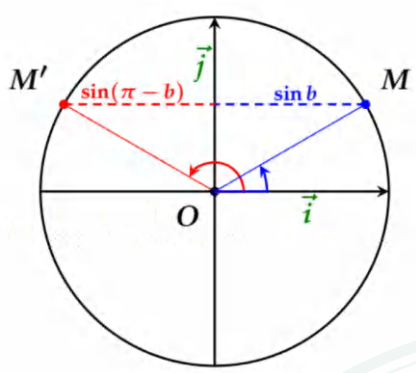
الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

4 المعادلات المثلثية

$\cos a = \cos b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = -b + 2k\pi \end{cases}$



$\sin a = \sin b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = \pi - b + 2k\pi \end{cases}$



المعادلات من الشكل: $\cos x = a$

☒ **إذا كان** $a \notin [a;b]$ **فالمعادلة لا تقبل حلولا في** $\mathbb{R}$

☒ **إذا كان** $a \in [a;b]$ **:**

1. **نبحث عن القيس الرئيسي** b **حيث:** $\cos b = a$
2. **الحلول هي:** $\begin{cases} x = b + 2k\pi \\ x = -b + 2k\pi \end{cases}$

المعادلات من الشكل: $\sin x = a$

☒ **إذا كان** $a \notin [a;b]$ **فالمعادلة لا تقبل حلولا في** $\mathbb{R}$

☒ **إذا كان** $a \in [a;b]$ **:**

1. **نبحث عن القيس الرئيسي** b **حيث:** $\sin b = a$
2. **الحلول هي:** $\begin{cases} x = b + 2k\pi \\ x = \pi - b + 2k\pi \end{cases}$

المعادلات من الشكل: $\cos a = \sin b$

☒ **إما أن نحول** sin **إلى** cos **بالقانون** $\sin b = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$

فتصبح المعادلة $\cos a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$ **أي من الشكل:** $\cos a = \cos b$

☒ **أو نحول** cos **إلى** sin **بطريقتين:**

- **بالقانون** $\cos\ a = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$

فتصبح المعادلة $\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$ **أي من الشكل:** $\sin a = \sin b$

- **بالقانون** $\cos\ a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$

فتصبح المعادلة $\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ **أي من الشكل:** $\sin a = \sin b$

الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

2

تمارين متنوعة:
مرفقة بحلول مفصلة

najah213.com
نجاح 213
الخليل للرياضيات

التمرين 01

لتكن (C) الدائرة المثلثية المرفقة بالمعلم المتعامد المتجانس $(o;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$، ولتكن النقطتين A و B من (C) حيث:

$$(\overrightarrow{OI};\ \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad (\overrightarrow{OI};\ \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4}$$

عيّن قيسا للزاوية الموجهة:

❶ $(\overrightarrow{OJ};\ \overrightarrow{OA})$ ❷ $(\overrightarrow{OJ};\ \overrightarrow{OB})$ ❸ $(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB})$

التمرين 02

أوجد في كل حالة من الحالات التالية القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$ التي قيسها α

❶ $\alpha = 2007rad$ ❷ $\alpha = \frac{14\pi}{3}$ ❸ $\alpha = -\frac{35\pi}{2}$

التمرين 03

أوجد في كل حالة من الحالات التالية القيس الرئيسي للزاوية الموجهة التي قيسها α

❶ $\alpha = -\frac{189\pi}{4}$ ❷ $\alpha = \frac{65\pi}{8}$

❸ $\alpha = \frac{721\pi}{5}$ ❹ $\alpha = \frac{2007\pi}{3}$

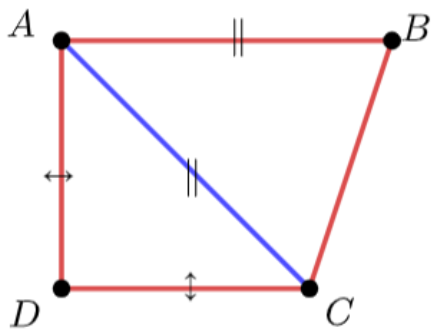
التمرين 04

❶ هل العددان $\frac{41\pi}{8}$ و $\frac{9\pi}{8}$ قيسان لزاوية موجهة لشعاعين؟

❷ هل العددان $\frac{1924\pi}{5}$ و $-\frac{4\pi}{5}$ قيسان لنفس الزاوية؟

التمرين 05

$ABCD$ شبه منحرف قائم حيث: $DC = AD$ و $AB = AC$



عين القيس الرئيسي للزوايا الموجهة التالية:

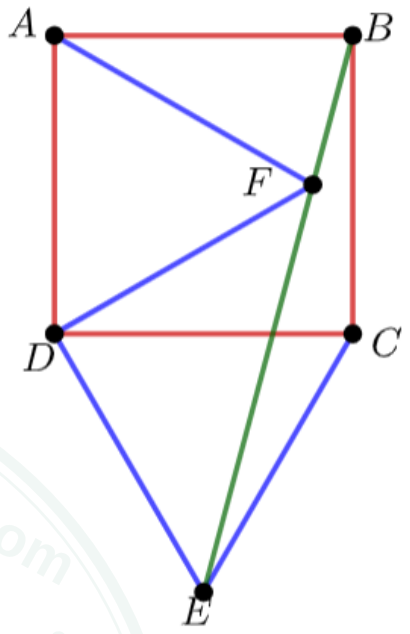
❶ $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$ ❷ $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC})$

❸ $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA})$ ❹ $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AD})$

الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

التمرين 06

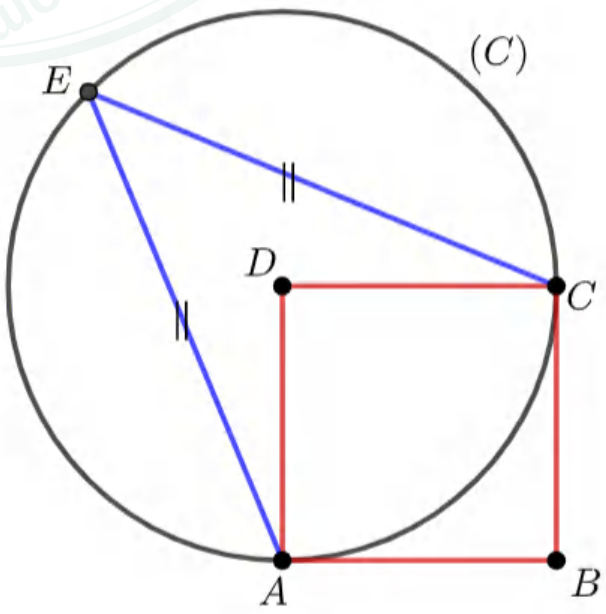
$ABCD$ مربع غير مباشر من المستوي حيث $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{2}$. E نقطة خارج المربع $ABCD$ حيث: ECD مثلث متقايس الأضلاع، ولتكن النقطة F داخل المربع $ABCD$ حيث: AFD مثلث متقايس الأضلاع



1. أثبت أنّ المثلث ABF متقايس الساقين
2. عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FB};\overrightarrow{FA})$
3. عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DF})$، ثم استنتج قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FD};\overrightarrow{FE})$
4. عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FB};\overrightarrow{FE})$
5. استنتج أنّ النقط E، F و B على استقامة واحدة

التمرين 07

في المستوي الموجه، $ABCD$ مربع و ACE مثلث متساوي الساقين، (C) الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها DC كما في الشكل المقابل:



الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

1. عين قيسا لكل من الزاويتين الموجهتين $\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right)$ و$\left(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EC}\right)$
2. بيّن أن المثلثين EDC و EDA متقايسان
3. عيّن قيسا لكل من الزاويتين الموجهتين $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}\right)$ و$\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DA}\right)$
4. بيّن أنّ $\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}\right)=\pi$
5. ماذا يمكنك القول عن النقط E، D و B. علل إجابتك.

التمرين 08

بدون استعمال الآلة الحاسبة، عيّن القيم المضبوطة لكل من:

1. $\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right)$
2. $\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right)$
3. $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$
4. $\cos\left(-\frac{31\pi}{3}\right)$

التمرين 09

1. بدون استعمال الآلة الحاسبة، عيّن القيم المضبوطة لـ $\cos x$ إذا علمت أنّ: $\sin x=\frac{3}{5}$ و $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$
2. باستعمال آلة حاسبة عين مدور لـ x إلى 10^{-2}

التمرين 10

بدون استعمال الآلة الحاسبة، عيّن القيم المضبوطة لكل من:

1. $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$
2. $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$

التمرين 11

علما أنّ $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ دون استعمال الآلة الحاسبة، عيّن القيم المضبوطة لـ $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

ثم استنتج $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

لاحظ أن: $\frac{\sqrt{3}+2}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$

التمرين 12

$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ معلم متعامد متجانس

1. $\left(2;\frac{19\pi}{3}\right)$ هي الاحداثيات القطبية للنقطة A في المعلم القطبي $(O;\vec{\imath})$. عيّن الاحداثيات الديكارتية للنقطة A
2. لتكن النقطة B التي احداثييها الديكارتية $(-\sqrt{3};-1)$. عيّن احداثيات قطبية للنقطة B في المعلم القطبي $(O;\vec{\imath})$

الخليل للرياضيات
الخليل الرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

التمرين 13

عيّن في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقط التالية المعرفة بإحداثييها القطبية:

$A\left(1;\frac{\pi}{6}\right)$ ، $B\left(2;-\frac{5\pi}{6}\right)$ ، $C\left(3;\frac{\pi}{6}\right)$ ، $D\left(4;\frac{\pi}{2}\right)$

التمرين 14

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ ، ثم مثّل الحلول على الدائرة المثلثية، للمعادلتين ذات المجهول x ، التاليتين:

❶ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ❷ $\sin x = -\frac{1}{2}$

التمرين 15

علما أن قيس الزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$ هو $-\frac{\pi}{3}$ ، عيّن قيس الزوايا الموجهة التالية:

❶ $(\vec{v};\vec{u})$ ❷ $(5\vec{u};3\vec{v})$

❸ $(-6\vec{u};5\vec{v})$ ❹ $(2\vec{v};-\vec{u})$

التمرين 16

عين قيمة كل من $\cos x$ و $\sin x$ للزاوية x في كل حالة مما يلي:

❶ $x = -\frac{945\pi}{2}$ ❷ $x = \frac{-5\pi}{6}$

❸ $x = \frac{-17\pi}{4}$ ❹ $x = \frac{2\pi}{3}$

التمرين 17

بسط العبارات التالية:

❶ $A = \sin x + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x)$

❷ $B = \sin x + \sin(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x$

❸ $C = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin(x + 5\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

❹ $D = \cos(\pi - x) - \cos x + \sin(\pi + x) + \cos\left(x + \frac{7\pi}{2}\right)$

❺ $E = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

❻ $F = \tan(\pi + x) + \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \cot an(2x)$

الخليل للرياضيات

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

التمرين 18

x عدد حقيقي، أثبت العبارات التالية:

1. $\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)-3\sin(x-3\pi)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x$
2. $\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$
3. $\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$
4. $\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}=1$

التمرين 19

حل في المجال I المعادلات التالية:

1. $\cos x=\frac{1}{2}$ ، $I=]-\pi;\pi]$
2. $\cos x-2=0$ ، $I=\mathbb{R}$
3. $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $I=]-\pi;\pi]$
4. $2\cos 2x=-\sqrt{2}$ ، $I=[0;2\pi[$
5. $\cos^2 x=\frac{1}{2}$ ، $I=\mathbb{R}$
6. $2\sqrt{2}\sin x+2=0$ ، $I=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$
7. $\cos 2x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ ، $I=\mathbb{R}$
8. $\cos x\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)=0$ ، $I=[-\pi;2\pi[$

التمرين 20

حل في المجال I المتراجحات التالية:

1. $\cos x\leq\frac{1}{2}$ ، $I=]-\pi;\pi]$
2. $2\sin x+\sqrt{3}\leq 0$ ، $I=[0;3\pi]$
3. $\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $I=\left]-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$
4. $-2\cos 2x+\sqrt{3}\leq 0$ ، $I=[0;2\pi[$
5. $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1\leq 0$ ، $I=]0;\pi]$
6. $\sqrt{2}\sin x+1>0$ ، $I=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$

الخليل للرياضيات

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

التمرين 21

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1. $\cos x = \sin x$
2. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
3. $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$

بالتوفيق

❤ لا تنسونا من صالح دعائكم ❤

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل

الخليل للرياضيات

najah213.com
الخليل للرياضيات

3

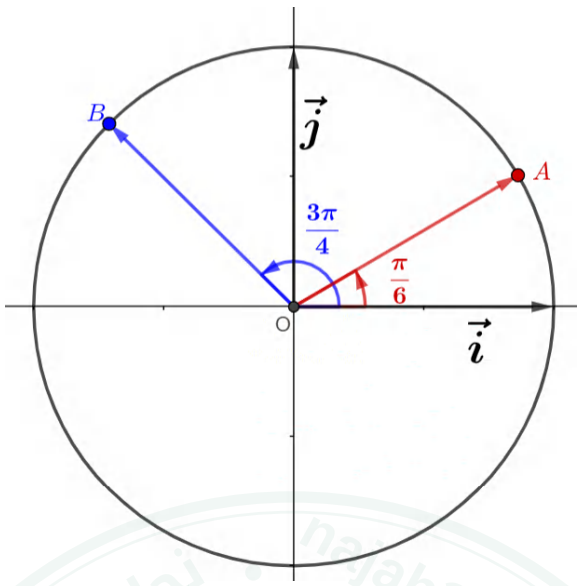
حلول التمارين:

حلول مقترحة مفصلة

najah213.com • نجاح 213 • الخليل للرياضيات

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

حل التمرين 01



- تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OJ};\ \overrightarrow{OA})$:

لدينا:

$$(\overrightarrow{OI};\ \overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OJ})=\frac{\pi}{2}\Rightarrow -(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OJ})=(\overrightarrow{OI};\ \overrightarrow{OA})-\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow (\overrightarrow{OJ};\ \overrightarrow{OA})=(\overrightarrow{OI};\ \overrightarrow{OA})-\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow (\overrightarrow{OJ};\ \overrightarrow{OA})=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{OJ};\ \overrightarrow{OA})=-\frac{\pi}{3}}$$

- تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OJ};\ \overrightarrow{OB})$:

لدينا:

$$(\overrightarrow{OI};\ \overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OI};\ \overrightarrow{OJ})+(\overrightarrow{OJ};\ \overrightarrow{OB})\Rightarrow (\overrightarrow{OJ};\ \overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OI};\ \overrightarrow{OB})-(\overrightarrow{OI};\ \overrightarrow{OJ})$$
$$\Rightarrow (\overrightarrow{OJ};\ \overrightarrow{OB})=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{OJ};\ \overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{4}}$$

- تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB})$:

لدينا:

$$(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OJ})+(\overrightarrow{OJ};\ \overrightarrow{OB})\Rightarrow (\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB})=-(\overrightarrow{OJ};\ \overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OJ};\ \overrightarrow{OB})$$
$$\Rightarrow (\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB})=-\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB})=\frac{7\pi}{12}}$$

حل التمرين 02

- إيجاد في كل حالة من الحالات التالية القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u};\ \vec{v})$ التي قيسها α:

$\alpha = 2007rad$

لدينا:

$$-\pi < 2007 + 2k\pi \leq \pi \Rightarrow -\pi - 2007 < 2k\pi \leq \pi - 2007$$

الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$\Rightarrow \frac{-\pi - 2007}{2\pi} < k \leq \frac{\pi - 2007}{2\pi}$$
$$\Rightarrow -319.92 < k \leq -318.92$$
$$\Rightarrow k = -319$$

إذن القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$ هو:

$$2007 + 2(-319)\pi = \boxed{2.66rad}$$

$$\alpha = \frac{14\pi}{3}$$

لدينا:

$$-\pi < \frac{14\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi \Rightarrow -1 < \frac{14}{3} + 2k \leq 1$$
$$\Rightarrow -1 - \frac{14}{3} < 2k \leq 1 - \frac{14}{3}$$
$$\Rightarrow \frac{-1 - \frac{14}{3}}{2} < k \leq \frac{1 - \frac{14}{3}}{2}$$
$$\Rightarrow -2.8 < k \leq -1.8$$
$$\Rightarrow k = -1$$

إذن القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$ هو:

$$\frac{14\pi}{3} + 2(-1)\pi = \boxed{\frac{8\pi}{3}}$$

$$\alpha = -\frac{35\pi}{2}$$

لدينا:

$$-\pi < -\frac{35\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi \Rightarrow -1 < -\frac{35}{2} + 2k \leq 1$$
$$\Rightarrow \frac{-1 + \frac{35}{2}}{2} < k \leq \frac{1 + \frac{35}{2}}{2}$$
$$\Rightarrow 8.25 < k \leq 9.25$$
$$\Rightarrow k = 9$$

إذن القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$ هو:

$$-\frac{35\pi}{2} + 2(9)\pi = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

حل التمرين 03

إيجاد في كل حالة من الحالات التالية القيس الرئيسي للزاوية الموجهة التي قيسها α

$$\alpha = -\frac{189\pi}{4}$$

لدينا:

$$\alpha = -\frac{189\pi}{4} = -\frac{188\pi + \pi}{4} = -47\pi - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\alpha = \frac{65\pi}{8}$$

لدينا:

$$\alpha = \frac{65\pi}{8} = \frac{64\pi + \pi}{8} = 8\pi + \frac{\pi}{8} = \boxed{\frac{\pi}{8}}$$

الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$\alpha = \dfrac{721\pi}{5}$

$$\alpha = \frac{721\pi}{5} = \frac{720\pi + \pi}{5} = 144\pi + \frac{\pi}{5} = \boxed{\frac{\pi}{5}}$$

$\alpha = \dfrac{2007\pi}{3}$

$$\alpha = \frac{2007\pi}{3} = 699\pi = \boxed{\pi}$$

حل التمرين 04

حتى يكون عددان حقيقان α و β قيسان لزاوية موجهة لشعاعين يكفي أن يكون $\alpha - \beta$ من مضاعفات 2π

- $\dfrac{41\pi}{8}$ و $\dfrac{9\pi}{8}$

لدينا:

$$\frac{41\pi}{8} - \frac{9\pi}{8} = \frac{32\pi}{8} = 4\pi = 2 \times 2\pi$$

إذن $\frac{41\pi}{8}$ و $\frac{9\pi}{8}$ قيسان لنفس الزاوية

- $\dfrac{1924\pi}{5}$ و $-\dfrac{4\pi}{5}$

لدينا:

$$\frac{1924\pi}{5} - \left(-\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1928\pi}{5} = \frac{1925\pi + 3\pi}{5} = 385\pi + \frac{3\pi}{5} = \pi + \frac{3\pi}{5} = \frac{8\pi}{5}$$

إذن $\frac{1924\pi}{5}$ و $-\frac{4\pi}{5}$ ليسا قيسان لنفس الزاوية

حل التمرين 05

تعيين القيس الرئيسي للزوايا الموجهة التالية:

❶ $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$

لدينا:

$$(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{4}$$

ولدينا:

$$(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \pi \Longrightarrow (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi - (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})}{2}$$

$$\Longrightarrow (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{3\pi}{8}}$$

❷ $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC})$

$$\boxed{(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}}$$

❸ $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA})$

$$\boxed{(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA}) = \pi}$$

❹ $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AD})$

الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$$\boxed{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{2}}$$

حل التمرين 06

❶ اثبات أنّ المثلث ABF متقايس الساقين :

لدينا: $AD = AF$ لأن: AFD مثلث متقايس الأضلاع

لدينا: $AD = AB$ لأن: $ABCD$ مربع

ومنه: $AF = AB$

وعليه: ABF مثلث متساوي الساقين.

❷ تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FA})$:

لدينا: $(\overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AF}) = \frac{\pi}{3}$

ومنه: $(\overrightarrow{AF};\ \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{6}$

ولدينا:

$$2(\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FA}) + (\overrightarrow{AF};\ \overrightarrow{AB}) = \pi \Longrightarrow (\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FA}) = \frac{\pi - (\overrightarrow{AF};\ \overrightarrow{AB})}{2}$$

$$\Longrightarrow (\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FA}) = \frac{\pi - \frac{\pi}{6}}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{(\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FA}) = \frac{5\pi}{12}}$$

❸ تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{DE};\ \overrightarrow{DF})$:

لدينا: $(\overrightarrow{DE};\ \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{3}$

ولدينا: $(\overrightarrow{DC};\ \overrightarrow{DF}) = \frac{\pi}{6}$

ولدينا:

$$(\overrightarrow{DE};\ \overrightarrow{DF}) = (\overrightarrow{DE};\ \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC};\ \overrightarrow{DF})$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

- استنتاج قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FD};\ \overrightarrow{FE})$

لدينا: $(\overrightarrow{DE};\ \overrightarrow{DF}) = \frac{\pi}{2}$

ولدينا: $DE = DF$

إذن المثلث DEF قائم في D ومتساوي الساقين

ومنه:

$$(\overrightarrow{DE};\ \overrightarrow{DF}) + 2(\overrightarrow{FD};\ \overrightarrow{FE}) = \pi \Longrightarrow (\overrightarrow{FD};\ \overrightarrow{FE}) = \frac{\pi - (\overrightarrow{DE};\ \overrightarrow{DF})}{2}$$

$$\Longrightarrow (\overrightarrow{FD};\ \overrightarrow{FE}) = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{(\overrightarrow{FD};\ \overrightarrow{FE}) = \frac{\pi}{4}}$$

❹ تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FE})$:

$$(\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FE}) = (\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FA}) + (\overrightarrow{FA};\ \overrightarrow{FE})$$

الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$= (\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FA}) + (\overrightarrow{FA};\ \overrightarrow{FD}) + (\overrightarrow{FD};\ \overrightarrow{FE})$$
$$= \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$
$$= \boxed{\pi}$$

❺ استنتاج أنّ النقط E، F و B على استقامة واحدة:

بما أنّ $(\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FE}) = \pi$ فإنّ النقط E، F و B على استقامة واحدة

حل التمرين 07

❶ تعيين قيسا لكل من الزاويتين الموجهتين $(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC})$ و$(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EC})$:

لدينا $ABCD$ مربع ومنه

$$\boxed{(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{2}}$$

ولدينا حسب نظرية الزاوية المحيطية:

$$2(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EC}) = (\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}) \Longrightarrow (\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC})$$
$$\Longrightarrow \boxed{(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EC}) = \frac{\pi}{4}}$$

❷ تبيين أن المثلثين EDC و EDA متقايسان:

لدينا: ACE مثلث متساوي الساقين ومنه: $EA = EC$

لدينا: $ABCD$ مربع ومنه: $AD = DC$

إذن: المثلثان EDC و EDA متقايسان

❸ تعيين قيسا لكل من الزاويتين الموجهتين $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE})$ و$(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DA})$:

لدينا:

$$(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EC}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$$

ولدينا: المثلث DCE متساوي الساقين

ومنه:

$$(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}) + 2(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EC}) = \pi \Longrightarrow (\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}) = \pi - 2(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EC})$$
$$\Longrightarrow (\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}) = \pi - 2(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EC})$$
$$\Longrightarrow (\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}) = \pi - 2\frac{\pi}{8}$$
$$\Longrightarrow \boxed{(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}) = \frac{3\pi}{4}}$$

أيضا نجد أنّ:

$$\boxed{(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DA}) = \frac{3\pi}{4}}$$

❹ تبيين أنّ $(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}) = \pi$:

لدينا $ABCD$ مربع ومنه $(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{4}$

ومنه:

$$(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}) = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \boxed{\pi}$$

❺ تبرير ماذا يمكننا القول عن النقط E، D و B:

الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

حسب علاقة شال لدينا:

$$\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}\right)=\pi \Longrightarrow \left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DE}\right)=\pi$$

ومنه النقط E، D و B على استقامية

حل التمرين 08

بدون استعمال الآلة الحاسبة، تعيين القيم المضبوطة لكل من:

- $\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{8\pi+\pi}{4}\right)=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$
- $\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{24\pi+\pi}{6}\right)=\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\boxed{\frac{1}{2}}$
- $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{12\pi-\pi}{3}\right)=\sin\left(-4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$
- $\cos\left(-\frac{31\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{30\pi+\pi}{3}\right)=\cos\left(-10\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\boxed{\frac{1}{2}}$

حل التمرين 09

❶ **تعيين القيم المضبوطة لـ $\cos x$**

لدينا:

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1 \Longrightarrow \cos^2 x+\left(\frac{3}{5}\right)^2=1$$
$$\Longrightarrow \cos^2 x=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2$$
$$\Longrightarrow \cos^2 x=\frac{16}{25}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases}\cos x=\frac{4}{5}\\ \text{أو}\\ \cos x=-\frac{4}{5}\end{cases}$$

ولدينا: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$

أي: $\cos x<0$

ومنه: $\cos x=-\frac{4}{5}$

❷ **تعيين القيم المضبوطة لـ $\cos x$**

يظهر لنا في الآلة الحاسبة بعد كتابة $\cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)$ القيمة 2.49809

ومنه مدور x إلى 10^{-2} هو $x=2.5$

حل التمرين 10

بدون استعمال الآلة الحاسبة، تعيين القيم المضبوطة لكل من:

- $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{12\pi-\pi}{6}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

- $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{6\pi+\pi}{3}\right) = \sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

حل التمرين 11

تعيين القيم المضبوطة لـ $\sin\frac{7\pi}{12}$:

لدينا:

$$\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 \Rightarrow \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$
$$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2$$
$$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 - \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$
$$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$
$$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$$
$$\Rightarrow \boxed{\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

استنتاج $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$:

$$\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{6\pi+7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$$

استنتاج $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{6\pi-7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$$

حل التمرين 12

❶ تعيين الاحداثيات الديكارتية للنقطة A:

لدينا: $r = 2$

ولدينا:

$$\frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi+\pi}{3} = 6\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

ومنه:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ y = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$$

إذن:

$$\boxed{A(1;\sqrt{3})}$$

❷ تعيين احداثيات قطبية للنقطة B:

لدينا:

الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$$

ومنه:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

إذن:

$$\boxed{B\left(2; \frac{7\pi}{6}\right)}$$

حل التمرين 13

تعيين في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ النقط التالية المعرفة بإحداثييها القطبية:

$A\left(1; \frac{\pi}{6}\right)$

لدينا: $r = 1$ و $\theta = \frac{\pi}{6}$

ومنه:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ y = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

إذن:

$$\boxed{A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)}$$

$B\left(2; -\frac{5\pi}{6}\right)$

لدينا: $r = 2$

ولدينا:

$$-\frac{5\pi}{6} = \frac{-6\pi + \pi}{6} = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

ومنه:

$$\begin{cases} x = 2\cos\left(-\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) \\ y = 2\sin\left(-\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ y = -2\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ y = -2\left(\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases}$$

إذن:

$$\boxed{B(-1; -\sqrt{3})}$$

$C\left(3; \frac{\pi}{6}\right)$

لدينا: $r = 3$ و $\theta = \frac{\pi}{6}$

ومنه:

الخليل للرياضيات

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$\begin{cases} x = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ y = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

إذن:

$$\boxed{C\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)}$$

$D\left(4;\frac{\pi}{2}\right)$

لدينا: $r = 4$ و $\theta = \frac{\pi}{2}$

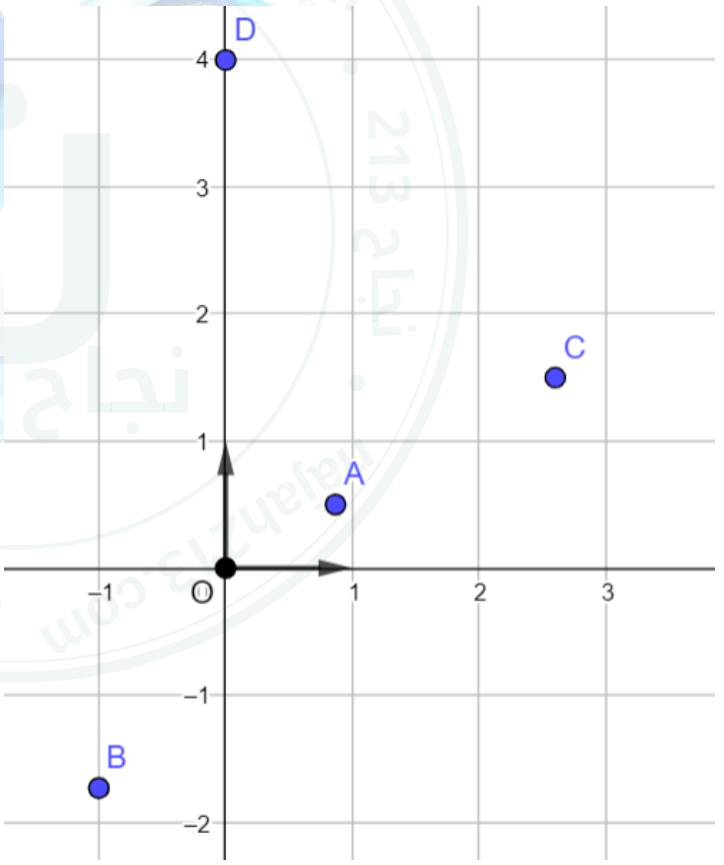
ومنه:

$$\begin{cases} x = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ y = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

إذن:

$$\boxed{D(0;4)}$$

ومنه:



حل التمرين 14

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلتين ذات المجهول x ، التاليتين:

- $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

إذن:

$$S = \boxed{\left\{\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right); \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) /k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

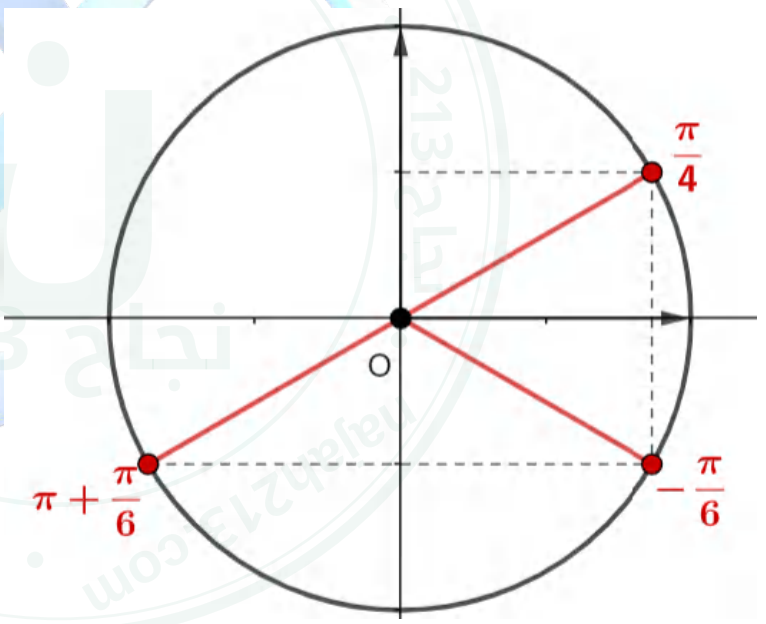
- $\sin x = -\frac{1}{2}$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

إذن:

$$S = \boxed{\left\{\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right); \left(\pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) /k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

- تمثيل الحلول:



حل التمرين 15

- تعيين قيس الزوايا الموجهة التالية:

لدينا:

$$(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{\pi}{3}$$

ومنه:

- $(\vec{v}; \vec{u}) = -(\vec{u}; \vec{v}) = -\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$
- $(5\vec{u}; 3\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) = \boxed{-\frac{\pi}{3}}$

الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

- $(-6\vec{u};5\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi = -\dfrac{\pi}{3} + \pi = \boxed{\dfrac{2\pi}{3}}$
- $(2\vec{v};-\vec{u}) = (\vec{v};\vec{u}) + \pi = -(\vec{u};\vec{v}) + \pi = -\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \pi = \boxed{\dfrac{4\pi}{3}}$

حل التمرين 16

تعيين قيمة كل من $\cos x$ و $\sin x$ للزاوية x في كل حالة مما يلي:

❶ $x = -\dfrac{945\pi}{2}$

لدينا:

$$x = -\frac{945\pi}{2} = -\frac{-\pi + 946\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 473\pi = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$$

ومنه:

- $\cos x = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$
- $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

❷ $x = \dfrac{-5\pi}{6}$

لدينا:

$$x = \frac{-5\pi}{6} = \frac{-6\pi + \pi}{6} = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

ومنه:

- $\cos x = \cos\left(-\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin x = \sin\left(-\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)\right) = -\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

❸ $x = \dfrac{-17\pi}{4}$

لدينا:

$$x = \frac{-16\pi - \pi}{4} = -4\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

ومنه:

- $\cos x = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

❹ $x = \dfrac{2\pi}{3}$

لدينا:

$$x = \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$$

ومنه:

- $\cos x = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$
- $\sin x = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

حل التمرين 17

تبسيط العبارات التالية:

$$A = \sin x + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x)$$
$$= \sin x - \cos x - \cos x$$
$$= \boxed{\sin x - 2\cos x}$$

$$B = \sin x + \sin(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x$$
$$= \sin x + \sin x + \cos x - \cos x$$
$$= \boxed{2\sin x}$$

$$C = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin(x + 5\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$= \sin\left(\frac{2\pi + \pi}{2} - x\right) + \sin(x + \pi) + \sin x$$
$$= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x + \sin x$$
$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$= \boxed{-\cos x}$$

$$D = \cos(\pi - x) + \cos x + \sin(\pi + x) + \cos\left(x + \frac{7\pi}{2}\right)$$
$$= -\cos x + \cos x - \sin x + \cos\left(x + \frac{6\pi + \pi}{2}\right)$$
$$= -\sin x + \cos\left(x + 3\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\sin x + \cos\left(x + \pi + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\sin x - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\sin x + \sin x$$
$$= \boxed{0}$$

$$E = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\sin x - \sin x - \cos x + \cos x$$
$$= \boxed{-2\sin x}$$

$$F = \tan(\pi + x) + \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{cotan}(2x)$$
$$= \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} + \frac{\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)} + \operatorname{cotan}(2x)$$
$$= \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} + \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} + \operatorname{cotan}(2x)$$
$$= \frac{-\sin x}{-\cos x} + \frac{-\cos(2x)}{\sin(2x)} + \operatorname{cotan}(2x)$$
$$= \tan x - \operatorname{cotan}(2x) + \operatorname{cotan}(2x)$$
$$= \boxed{\tan x}$$

الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

حل التمرين 18

اثبات العبارات الآتية:

❶ $\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)-3\sin(x-3\pi)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)-3\sin(x-3\pi)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\cdots$$
$$=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(10\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)-3\sin(-(\pi-x))+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)$$
$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+3\sin(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$
$$=\cos(x)-2\sin(x)+3\sin(x)-\cos(x)$$
$$=\sin(x)$$

❷ $\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

$$\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos x+\cos\left(x+\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\cos x-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\cos x-\left[\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]-\left[\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$=\cos x-\left[\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right]-\left[\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right]$$
$$=\cos x-\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)$$
$$=0$$

❸ $\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

$$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\sin x+\sin\left(x+\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\sin x-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\sin x-\left[\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]-\left[\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$=\sin x-\left[\frac{1}{2}\sin(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)\right]-\left[\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)\right]$$
$$=\sin x-\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}\sin(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)$$
$$=0$$

❹ $\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}=1$

$$\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}=\frac{\sin^2 x\,(1-\sin^2 x)}{\cos^2 x\,(1-\cos^2 x)}$$
$$=\frac{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}$$
$$=1$$

الخليل للرياضيات

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

حل التمرين 19

حل في المجال I المعادلات التالية:

❶ $\cos x = \frac{1}{2}$ ، $I =]-\pi;\pi]$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Longrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

لدينا: $-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$

ومنه: $\frac{-1-\frac{1}{3}}{2} < k \leq \frac{1-\frac{1}{3}}{2}$

ومنه: $-0.6 < k \leq 0.3$

ومنه: $k = 0$

ولدينا: $-\pi < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$

ومنه: $\frac{-1+\frac{1}{3}}{2} < k \leq \frac{1+\frac{1}{3}}{2}$

ومنه: $-0.3 < k \leq 0.6$

ومنه: $k = 0$

إذن:

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{\pi}{3}\right); \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}}$$

❷ $\cos x - 2 = 0$ ، $I = \mathbb{R}$

$$\cos x - 2 = 0 \Longrightarrow \cos x = 2$$

المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ لأنّ $2 \notin [-1;1]$

❸ $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $I =]-\pi;\pi]$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

لدينا: $-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$

ومنه: $-\frac{2}{3} < k \leq \frac{1}{3}$

ومنه: $-0.6 < k \leq 0.3$

ومنه: $k = 0$

ولدينا: $-\pi < \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$

ومنه: $-\frac{5}{6} < k \leq \frac{1}{6}$

ومنه: $-0.83 < k \leq 0.16$

ومنه: $k = 0$

الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

إذن:

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{\pi}{3}\right); \left(\frac{2\pi}{3}\right)\right\}}$$

❹ $2\cos 2x = -\sqrt{2}$ ، $I = [0; 2\pi[$

$$2\cos 2x = -\sqrt{2} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases}$$

لدينا: $0 \leq \frac{3\pi}{8} + k\pi < 2\pi$

ومنه: $-\frac{3}{8} \leq k < \frac{16}{8}$

ومنه: $-0.37 < k \leq 1.62$

ومنه: $k = \{0; 1\}$

ولدينا: $0 \leq -\frac{3}{8} + k\pi < 2\pi$

ومنه: $\frac{3}{8} \leq k < \frac{19}{8}$

ومنه: $0.37 < k \leq 2.3$

ومنه: $k = \{1; 2\}$

إذن:

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{3\pi}{8}\right); \left(\frac{11\pi}{8}\right); \left(\frac{5\pi}{8}\right); \left(\frac{13\pi}{8}\right)\right\}}$$

❺ $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ ، $I = \mathbb{R}$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \ldots(*) \\ \text{أو} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ldots(**) \end{cases}$$

نحل المعادلة $(*)$:

الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

نحل المعادلة (**):

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

إذن:

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right); \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right); \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right); \left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) / k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

❻ $2\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$ ، $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

$$2\sqrt{2}\sin x + 2 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

لدينا: $-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq \frac{5\pi}{2}$

ومنه: $-0.125 \leq k \leq 1.375$

ومنه: $k = \{0; 1\}$

ولدينا: $-\frac{1}{2} \leq \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq \frac{5}{2}$

ومنه: $-0.875 \leq k \leq 0.625$

ومنه: $k = 0$

إذن:

$$\boxed{S = \left\{\left(-\frac{\pi}{4}\right); \left(\frac{7\pi}{4}\right); \left(\frac{5\pi}{4}\right)\right\}}$$

❼ $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ، $I = \mathbb{R}$

$$\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

إذن:

$$\boxed{S = \left\{\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right); \left(\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi\right) / k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

❽ $\cos x\left(\sqrt{2}\sin x - 1\right) = 0$ ، $I = [-\pi; 2\pi[$

الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$\cos x\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)=0 \Longrightarrow \begin{cases}\cos x=0\\ \text{أو}\\ \sqrt{2}\sin x-1=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\cos x=0 \quad \ldots(*)\\ \text{أو}\\ \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ldots(**)\end{cases}$$

نحل المعادلة $(*)$:

$$\cos x=0 \Longrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad /k\in\mathbb{Z}$$

لدينا: $-\pi\leq\dfrac{\pi}{2}+k\pi<2\pi$

ومنه: $-1.5\leq k<1.5$

ومنه: $k=\{-1;0;1\}$

نحل المعادلة $(**)$:

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow \sin x=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\Longrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\\ \text{أو} \quad /k\in\mathbb{Z}\\ x=\pi-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$$

لدينا: $-\pi\leq\dfrac{\pi}{4}+2k\pi<2\pi$

ومنه: $-0.625\leq k<0.875$

ومنه: $k=0$

ولدينا: $-\pi\leq\pi-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi<2\pi$

ومنه: $-0.875\leq k<0.625$

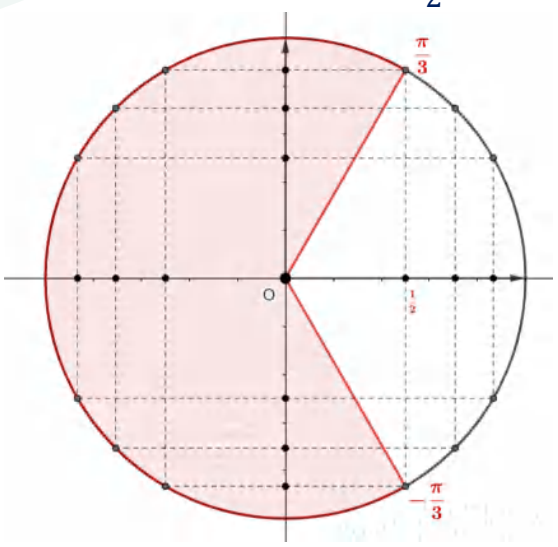
ومنه: $k=0$

إذن:

$$\boxed{S=\left\{\left(\frac{-\pi}{2}\right);\left(\frac{\pi}{2}\right);\left(\frac{3\pi}{2}\right);\left(\frac{\pi}{4}\right);\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right\}}$$

حل التمرين 20

❶ $\cos x\leq\dfrac{1}{2}$ ، $I=]-\pi;\pi]$



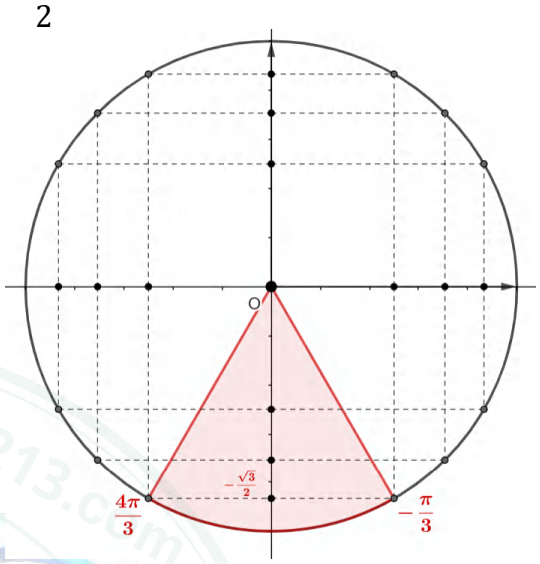
الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

ومنه:

$$S_{]-\pi;\pi]} = \left]-\pi; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$$

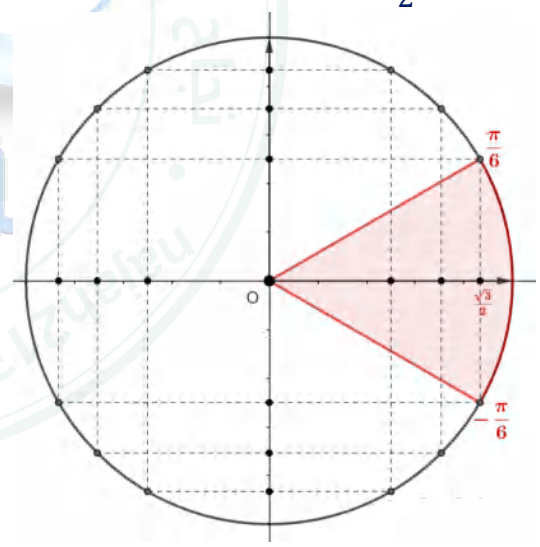
❷ $I = [0; 3\pi]$ ، $2\sin x + \sqrt{3} \leq 0$

$$2\sin x + \sqrt{3} \leq 0 \Longrightarrow \sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$S_{[0;3\pi]} = \left[\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{3} + 2\pi\right] = \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$$

❸ $I = \left]-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ ، $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$



$$S_{]-\frac{\pi}{2};2\pi]} = \left]-\frac{\pi}{6}; 0\right]$$

❹ $I = [0; 2\pi[$ ، $-2\cos 2x + \sqrt{3} \leq 0$

$$-2\cos 2x + \sqrt{3} \leq 0 \Longrightarrow \cos 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نضع: $2x = y$

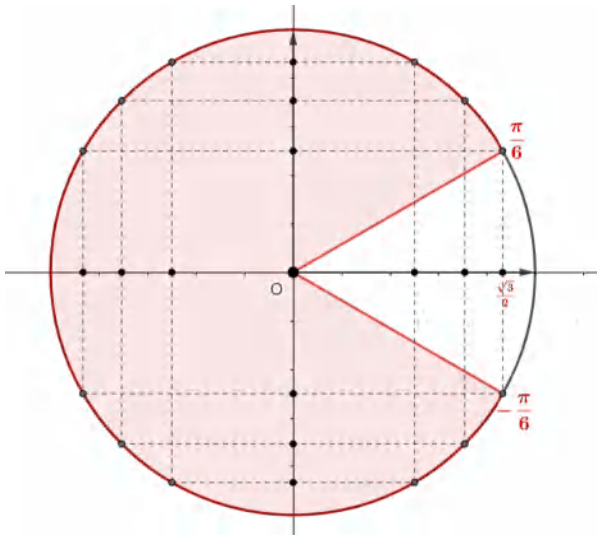
ومنه:

$$\cos 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \cos y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

لدينا: $x \in [0; 2\pi[$ ومنه $2x = [0; 4\pi[$

الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

أي: $y = [0; 4\pi[$



$$S'_{[0;4\pi[} = \left[\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi; -\frac{\pi}{6} + 4\pi\right]$$
$$= \left[\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{13\pi}{6}; \frac{23\pi}{6}\right]$$

ومنه:

$$\boxed{S_{[0;2\pi[} = \left[\frac{\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{13\pi}{12}; \frac{23\pi}{12}\right]}$$

❺ $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 1 \leq 0$ ، $I =]0; \pi]$

$$2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 1 \leq 0 \Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{1}{2}$$

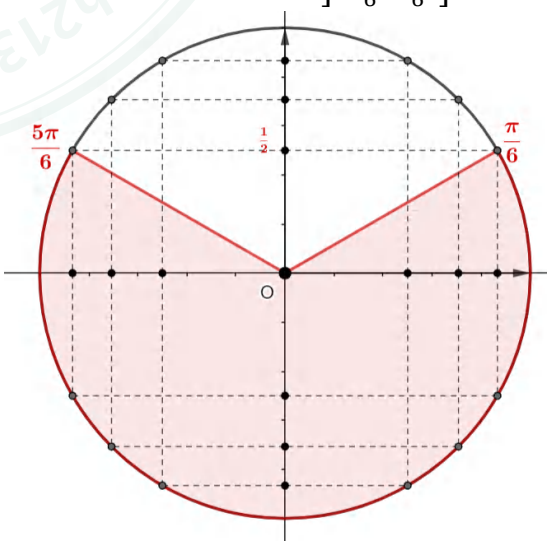
نضع: $y = 2x - \frac{\pi}{6}$

ومنه:

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \sin y \leq \frac{1}{2}$$

لدينا: $x \in]0; \pi]$ ومنه: $2x \in]0; 2\pi]$ ومنه: $\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \in \left]-\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$

ومنه $y = \left]-\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$



$$S'_{\left]-\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right]} = \left]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$$

ومنه:

الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

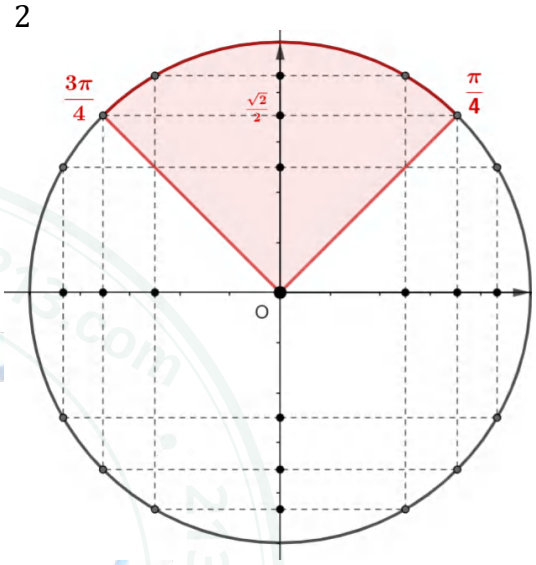
$$S_{]0;\pi]} = \left[\frac{-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}}{2};\frac{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}}{2}\right] \cup \left[\frac{\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6}}{2};\frac{\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{6}}{2}\right]$$

$$= \boxed{\left]0;\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]}$$

❻ $I = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ ، $\sqrt{2}\sin x + 1 > 0$

$$\sqrt{2}\sin x + 1 > 0 \Longrightarrow \sin x > \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$S_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]} = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left[\frac{\pi}{4}+2\pi;\frac{5\pi}{2}\right] = \boxed{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left[\frac{9\pi}{4};\frac{5\pi}{2}\right]}$$

حل التمرين 21

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

❶ $\cos x = \sin x$

$$\cos x = \sin x \Longrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ 0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ /k \in \mathbb{Z}$$

إذن:

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) /k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

الخليل للرياضيات
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

❷ $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\frac{\pi}{3}-x=2x+\frac{\pi}{3}+2k\pi$$
$$\Rightarrow \quad \text{أو} \quad /k\in\mathbb{Z}$$
$$\frac{\pi}{3}-x=-\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi$$
$$x=-\frac{2}{3}k\pi$$
$$\Rightarrow \quad \text{أو} \quad /k\in\mathbb{Z}$$
$$x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

إذن:

$$\boxed{S=\left\{\left(-\frac{2}{3}k\pi\right);\left(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\ /k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

❸ $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$\Rightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$$
$$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}-3x+2k\pi$$
$$\Rightarrow \quad \text{أو} \quad /k\in\mathbb{Z}$$
$$x-\frac{\pi}{4}=-\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)+2k\pi$$
$$x=\frac{5\pi}{48}+\frac{1}{2}k\pi$$
$$\Rightarrow \quad \text{أو} \quad /k\in\mathbb{Z}$$
$$x=-\frac{\pi}{24}-k\pi$$

إذن:

$$\boxed{S=\left\{\left(\frac{5\pi}{48}+\frac{1}{2}k\pi\right);\left(-\frac{\pi}{24}-k\pi\right)\ /k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

بالتوفيق

❤ **لا تنسونا من صالح دعائكم** ❤

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل

الخليل للرياضيات

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com