najah213.com · نجاح 213



# الاشتقاقية

Prof Mustapha
KdHA-LDJ

## I]. تعاريف

### 1) تعريف نهاية دالة عند الصفر

بمفهوم مبسط نقول نهاية الدالة $f$ عند $0$ هي $l$ (حيث $l \in \mathbb{R}$) معناه $f(0) = l$ و نكتب $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = l$

### 2) قابلية اشتقاق دالة عند عدد

$f$ قابلة للاشتقاق عند العدد $x_0$ معناه: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$ أو $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l$ حيث $(h = x - x_0)$

$f$ غير قابلة للاشتقاق عند العدد $x_0$ معناه: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \infty$

* العدد المشتق: يسمى $l$ العدد المشتق للدالة $f$ عند $x_0$ و نرمز له $f'(x_0)$ أي $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

* نسبة التزايد: يسمى العدد $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نسبة التزايد للدالة $f$ بين $x_0$ و $x_0 + h$ و نرمز له ب $g(h)$

*قاعدة: الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها

### 3) الدالة المشتقة لدالة $f$

- $f$ قابلة للاشتقاق على $D_f$ معناه $f$ قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من $D_f$
- مشتقة الدالة $f$ هي الدالة التي ترفق بكل $x$ من $D_f$ العدد المشتق $f'(x)$ و نرمز لها $f'$ حيث $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

## II]. التفسير الهندسي للعدد المشتق

### 1) معادلة المماس عند نقطة:

مماس المنحني $C_f$ عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$ هو المستقيم الذي يشمل $A$ و معامل توجيهه $f'(x_0)$ ، معادلته: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

### 2) التقريب التآلفي للعدد المشتق

يمكن حساب أي قيمة تقريبية للأعداد من الشكل $a, n$ باستخدام التقريب التآلفي دون التعويض في الدالة و ذلك بكتابتها على الشكل $a + h$ حيث $a$ الجزء الصحيح و $h$ الجزء العشري ($h$ قيمة قريبة من 0) $f(a + h) = f'(a)h + f(a)$

*ملاحظة: إذا كانت لدينا معادلة المماس عند $a$ فيمكن عندها تعويض $a + h$ مباشرة في معادلة المماس

## III]. مشتقات الدوال المألوفة

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $ax + b$ | $a$ |
| $b$ | $0$ |
| $ax$ | $a$ |
| $x^2$ | $2x$ |
| $ax^n$ | $n \times ax^{n-1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $\frac{1}{x^n}$ | $-\frac{n}{x^{n+1}}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |

## VI]. عمليات على الدوال المشتقة

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $(u + v)$ | $u' + v'$ |
| $(u \times v)$ | $u'.v + v'.u$ |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u'.v - v'.u}{v^2}$ |
| $\sqrt{u}$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $u^n$ | $nu' \times u^{n-1}$ |
| $\lambda u$ | $\lambda u'$ |
| $\frac{1}{v}$ | $-\frac{v'}{v^2}$ |
| $(uov)'$ | $[u'ov] \times v'$ |
| $u(ax + b)$ | $au'(ax + b)$ |



www.dzexams.com
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213



# تطبيقات الاشتقاقية

Prof Mustapha
KdHA-LDJ

## ❶ تحديد اتجاه تغير دالة

| المشتقة $f'$ | تغيرات $f$ |
|---|---|
| $f'$ موجبة تماما على $I$ | $f$ متزايدة تماما على $I$ |
| $f'$ سالبة تماما على $I$ | $f$ متناقصة تماما على $I$ |
| $f'$ معدومة على $I$ | $f$ ثابتة على $I$ |

## ❷ معرفة القيم الحدية للدالة

- إذا انعدمت المشتقة $f'$ عند قيمة $c$ من $I$ مغيرة إشارتها فإن $f$ تقبل قيمة حدية عند النقطة $(c, f(c))$
- إذا كانت $f'$ موجبة ثم انعدمت ثم سالبة فإن $f$ تقبل قيمة حدية كبرى و إذا العكس فهي تقبل قيمة حدية صغرى
- إذا انعدمت المشتقة $f'$ عند قيمة $c$ من $I$ فإن $f$ تقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة $(c, f(c))$

## ❸ نقطة الانعطاف

- إذا انعدمت المشتقة الأولى $f'$ عند قيمة $c$ من $I$ و لا تغير إشارتها فإن $f$ تقبل نقطة انعطاف عند النقطة $(c, f(c))$
- إذا انعدمت المشتقة الثانية $f''$ عند قيمة $c$ من $I$ مغيرة إشارتها فإن $f$ تقبل نقطة انعطاف عند النقطة $(c, f(c))$
- بيانيا نقطة الانعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحني

## ❹ حصر دالة

- $f(a) \le f(x) \le f(b) \Leftarrow [a,b]$ متزايدة تماما على $f$
- $f(b) \le f(x) \le f(a) \Leftarrow [a,b]$ متناقصة تماما على $f$

## ❺ الدالة المحدودة من الأسفل أو من الأعلى

- $f(x) \le k \Leftarrow f$ محدودة من الأعلى و يسمى $k$ عنصرا حادا من الأعلى (Majorant)
- $f(x) \ge k \Leftarrow f$ محدودة من الأسفل و يسمى $k$ عنصرا حادا من الأسفل (Minorant)

*ملاحظة:

$f$ تقبل قيمة حدية كبرى عند $(c, f(c)) \Leftarrow f$ محدودة من الأعلى و $f(c)$ هو Majorant

$f$ تقبل قيمة حدية صغرى عند $(c, f(c)) \Leftarrow f$ محدودة من الأسفل و $f(c)$ هو Minorant

## ❻ نظرية القيم المتوسطة

$$f(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا } x_0 \text{ على المجال } [a,b] \Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ مستمرة و رتيبة على المجال } [a,b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{array} \right.$$

## ❼ المقارنة والوضع النسبي بين دالتين أو دالة ومستقيم

- بيانيا
  - $f(x) > g(x) \Leftarrow C_g$ فوق $C_f$
  - $f(x) < g(x) \Leftarrow C_g$ تحت $C_f$
  - $f(x) = g(x) \Leftarrow C_g$ تقطع $C_f$
- حسابيا

ندرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$

| $x$ | $a$ / $b$ | $x_0$ / $0$ | |
|---|---|---|---|
| إشارة $f(x) - g(x)$ | $-$ | | $+$ |
| الوضع النسبي بين $C_f$ و $C_g$ | $C_f$ تحت $C_g$ | $C_f$ يقطع $C_g$ | $C_f$ فوق $C_g$ |



www.dzexams.com
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com