najah213.com · نجاح 213




التحضير الجيد للبكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

# مسائل شاملة حول الدوال الأسية $e^x$

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2020 / 12 / 20

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

# 1
# المسائل الشاملة

- المسألة الشاملة رقم 01
- المسألة الشاملة رقم 02
- المسألة الشاملة رقم 03
- المسألة الشاملة رقم 04
- المسألة الشاملة رقم 05
- المسألة الشاملة رقم 06
- المسألة الشاملة رقم 07
- المسألة الشاملة رقم 08
- المسألة الشاملة رقم 09
- المسألة الشاملة رقم 10
- المسألة الشاملة رقم 11
- المسألة الشاملة رقم 12

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►

الخليل للرياضيات

# المسألة الشاملة رقم: 01

مشاهدة الحل

**(I)** نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x - e^{-x}$$

1) ادرس تغيرات الدالة $g$ .

2) أ/ بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$ .

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ .

**(II)** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x+1}$$

ونسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$ .

2) أ/ بيّن أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ :

$$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب/ عيّن دون حساب: $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$ فسر النتيجة هندسيا.

3) شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

4) بين أن $f(x) = x$ إذا وفقط إذا كان $g(x) = 0$ ، ثم استنتج قيمة $f(\alpha)$ .

5) مثل بيانيا $(C_f)$ .

**(III)** نعتبر الدالة $h$ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = |f(x)|$$

ونسمي $(C_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1) اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

2) انطلاقا من $(C_f)$ ، مثل بيانيا $(C_h)$

الخليل للرياضيات

najah213.com · نجاح 213

# المسألة الشاملة رقم: 02

مشاهدة الحل

**(I)** نعتبر $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$$

ونسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)]$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x)]$ .

2) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإن:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$$

3) أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ عيّن $f''(\ln 3)$ دون حساب عبارة $f''(x)$ – برر اجابتك.

4) أ/ بيّن أنّ المستقيم $(\Delta_1)$ ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ في جوار $-\infty$ .

ب/ بيّن أنّ المستقيم $(\Delta_2)$ ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ في جوار $+\infty$ .

5) ادرس الوضع النسبي بين المنحني $(C_f)$ والمستقيمين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ .

6) اكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

7) بيّن أن النقطة $A(\ln 3 ; \ln 3)$ مركز تناظر للمنحني $(C_f)$ .

8) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-1; -2[$ ، ثم عين حصرا للعدد $\alpha$ سعته $10^{-2}$ .

9) مثّل بيانيا كلا من: $(\Delta_1)$ ، $(\Delta_2)$ ،

10) ناقش بيانيا حسب القيم الوسيط الحقيقي غير المعدوم $m$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية:

$$f(-|x|) = \ln(|m|)x + 2$$

**(II)** نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = f(3x - 2)$$

(عبارة $g(x)$ غير مطلوبة).

1) ادرس تغيرات الدالة $g$ .

2) تحقق من أنّ:

$$g\left(\frac{\alpha + 2}{3}\right) = 0$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

ثم بيّن أنّ:

$$g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)=3f'(\alpha)$$

3) استنتج معادلة المماس $(d)$ لمنحني الدالة $g$ عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$.

4) تحقق من أن معادلة المستقيم $(d)$ تعطى بـ:

$$y=\frac{3\alpha^2}{4}x-\frac{\alpha^2(\alpha+2)}{4}$$

najah213.com • نجاح 213

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

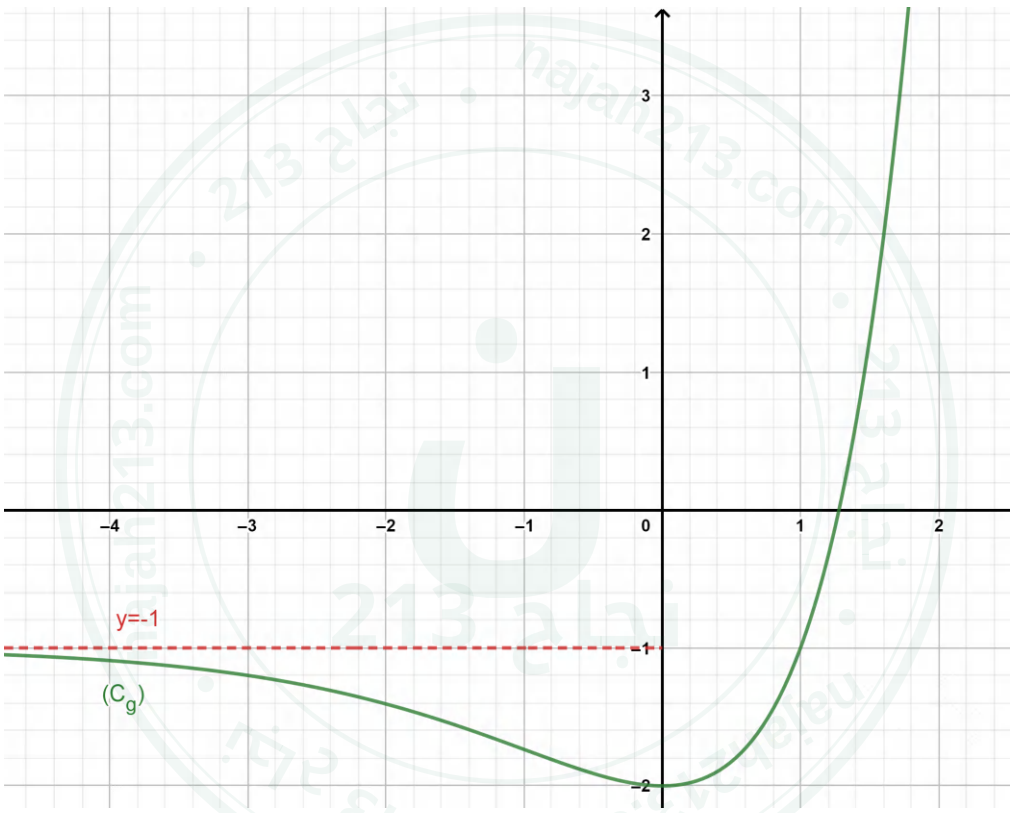
# المسألة الشاملة رقم: 03

مشاهدة الحل

**(I)** $a$ ، $b$ و $c$ أعداد حقيقية، نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = (ax + b)e^x + c$$

ونسمي $(C_g)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$. كما في الشكل أدناه:




1) بقراءة بيانية، أوجد ما يلي:

أ/ $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)]$ .

ب/ $g(0)$ و $g'(0)$ .

2) مما سبق أوجد $a$ ، $b$ و $c$.

3) نضع: $g(x) = (x-1)e^x - 1$.

أ/ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق من أن: $1.2 < \alpha < 1.3$ .

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ .

**(II)** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

ونسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستو السابق.

1) أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا .

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$ .

2) أ/ بيّن أنّه من اجل كل $x$ حقيقي:

$$f'(x)=-\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) عيّن دون حساب:

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$$

ثم فسّر النتيجة هندسيا.

4) بيّن أنّ المنحني $(C_f)$ يقبل مماسا وحيدا $(T)$ يمر من المبدأ، يُطلب كتابة معادلة له.

5) بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha-1$ ، ثم اوجد حصرا لـ $f(\alpha)$ بتقريب $10^{-2}$ .

6) أ/ بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $-\infty$ .

ب/ ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ .

7) مثّل بيانيا المماس $(T)$ والمستقيم $(\Delta)$ ثم المنحني $(C_f)$ .

8) $m$ وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$

الخليل للرياضيات

najah213.com · نجاح 213

# المسألة الشاملة رقم: 04

مشاهدة الحل

**(I)** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ/ بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

ب/ ادرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني $(C_f)$ ؟

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

2) برهن أنّ النقطة $A(0; 1)$ مركز تناظر المنحني $(C_f)$ .

3) أ/ بيّن أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$ ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني $(C_f)$ ؟

4) بيّن أنّ المنحني $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ حيث:
$-2.77 < \alpha < -2.76$ .

5) مثّل بيانيا $(C_f)$ .

**(II)** نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = f(4x + 1)$$

(عبارة $g$ غير مطلوبة).

1) ما هو اتجاه تغير الدالة $g$ .

2) تحقق من أنّ:

$$g\left(\frac{\alpha - 1}{4}\right) = 0$$

ثم بيّن أن:

$$g'\left(\frac{\alpha - 1}{4}\right) = 4f'(\alpha)$$

3) استنتج معادلة المماس $(T)$ لمنحني الدالة $g$ في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha-1}{4}$.

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

4) تحقق من أن معادلة المماس $(T)$ تعطى بـ:

$$y = (1+\alpha)^2 x - \frac{(1+\alpha)(\alpha^2-1)}{4}$$

**(III)** نعتبر الدالة $k$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$k(x) = f(|x|)$$

ونسمي $(C_k)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

1) بيّن أن الدالة $k$ زوجية .

2) أ/ بيّن كيف تمثيل $(C_k)$ انطلاقا من $(C_f)$ .

ب/ انطلاقا من $(C_f)$ ، مثل بيانيا $(C_k)$ .

**(IV)** نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = x + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسمي $(C_h)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) تحقق من أنه كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $h(x) = f(x) + 1$ .

2) أ/ استنتج أن $(C_h)$ هو صورة $(C_f)$ بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه.

ب/ انطلاقا من $(C_f)$ ، مثل بيانيا $(C_h)$

najah213.com · نجاح 213

# المسألة الشاملة رقم: 05

مشاهدة الحل

**(I)** نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x + 2 - e^x$$

1) ادرس تغيرات الدالة $g$ .

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلان $\alpha$ و $\beta$ حيث: $1.14 < \alpha < 1.15$ و $-1.9 < \beta < -1.8$ .

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ .

**(II)** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

ونسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x)]$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)]$ . ثم فسر ذلك هندسيا.

2) بيّن أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ :

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$$

3) ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4) عيّن دون حساب كل من : $\lim\limits_{x \to \alpha} \left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$ وَ $\lim\limits_{x \to \beta} \left[\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\right]$

ثم فسّر النتيجتين هندسيا.

5) بيّن أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$ ، ثم أوجد حصرا لـ $f(\alpha)$ سعته $10^{-1}$ .

6) نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = e^x - xe^x - 1$$

- بيّن أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $h(x) \leq 0$ .

7) نضع من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ :

$$p(x) = (x^2 + 1)e^{2x} + xe^x - 2e^x + 1$$

- تحقق من أنّ: $p(0) = 0$ .

8) أ/ بيّن أن المنحني $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 5$.

ب/ اكتب معادلة للمماس $(T)$ .

ج/ ادرس وضعية المنحني $(C_f)$ بالنسبة للمماس $(T)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني $(C_f)$ ؟



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

9) نأخذ: $f(\beta) \cong -1.195$ .

مثّل بيانيا المستقيم $(T)$ والمنحني $(C_f)$ .

10) $m$ وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ التالية:

$$e^x(1 - mx^2) + mx - 1 = 0$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

# المسألة الشاملة رقم: 06

مشاهدة الحل

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$$

ونسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1) ادرس تغيرات الدالة $f'$ .

2) احسب $f'(1)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$ .

3) ادرس تغيرات الدالة $f$ .

4) أ/ بيّن أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $-\infty$ .

ب/ ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ .

5) أ/ بين أن المنحني $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي المستقيم $(\Delta)$ في نقطة يُطلب تعيين إحداثييها.

ب/ بين أن المنحني $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما $\alpha$ و $\beta$ حيث:

$1.9 < \alpha < 2$ و $-0.6 < \beta < -0.5$ .

6) مثل بيانيا: $(\Delta)$ ، $(T)$ و المنحني $(C_f)$ .

7) نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ والوسيط الحقيقي الموجب تماما $m$ التالية:

$$f(x) = 2x + \ln m \ldots (E)$$

- ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة $(E)$ .

الخليل للرياضيات

najah213.com · نجاح 213

# المسألة الشاملة رقم: 07

مشاهدة الحل

**(I)** نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = (2x+1)e^x - 1$$

1) ادرس تغيرات الدالة $g'$ :

2) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ .

**(II)** $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = x(e^x - 1)^2$$

ونسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ .

1) احسب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) أ/ بيّن أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحي $(C_f)$ عند $-\infty$ .

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحني $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ .

3) أ/ بيّن أنه يوجد من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا:

$$f'(x) = (e^x - 1)g(x)$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ وشكل جدول تغيراتها .

4) اكتب معادلة ديكارتية للمماس $(T)$ للمنحني $(C_f)$ عند المبدأ.

5) مثّل بيانيا كلا من $(T)$ ، $(\Delta)$ و $(C_f)$ .

6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد واشارة حلول المعادلة $(E)$ ذات المجهول الحقيقي $x$ :

$$(E): f(x) = mx$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# المسألة الشاملة رقم: 08

مشاهدة الحل

نعرف الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

ونسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$ .

1) أ/ بين أنه من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ :

$$\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$$

ب/ استنتج أن الدالة $f$ فردية.

2) احسب نهايات الدالة $f$ عند أطرف مجموعة تعريفها.

3) أ/ بين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ :

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

ثم ادرس إشارة $f'(x)$ .

ب/ ماذا تستنتج بالنسبة لـ $(C_f)$ ؟

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

4) أ/ بين أن : $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) + \frac{1}{2}x - 1\right] 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) + \frac{1}{2}x + 1\right]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

5) ادرس الوضع النسبي بين المنحني $(C_f)$ والمستقيم $(d)$ ذو المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + 1$ .

6) مثل بيانيا $(C_f)$ .

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# المسألة الشاملة رقم: 09

مشاهدة الحل

نعتبر الدالة $f$ المعرفة $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

ونسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$ .

1) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = -\infty$ .

2) أ/ بيّن أنّ المستقيم المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = -x + \frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحني $(C_f)$ .

ب/ حل المعادلة : $e^{x-2} - 4 = 0$ ، ثم بيّن أنّ المنحني $(C_f)$ يقع فوق المستقيم $(\Delta)$ على المجال $]-\infty; 2 + \ln 4]$ وتحته على المجال $[2 + \ln 4; +\infty[$

3) أ/ بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ :

$$f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

4) احسب $f''(x)$ ، ثم بين أن $A(2; 2)$ نقطة انعطاف للمنحني $(C_f)$ .

5) اثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$ .

6) مثّل بيانيا $(\Delta)$ والمنحني $(C_f)$ .



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

# المسألة الشاملة رقم: 10

مشاهدة الحل

**(I)** نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = e^x + x + 2$$

1) ادرس تغيرات الدالة $g$ على $\mathbb{R}$ .

2) أ/ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا $\alpha$ في $\mathbb{R}$ ـ ثم تحقق أن $-2.2 < \alpha < -2.1$

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ .

**(II)** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{1 - xe^x}{e^x + 1}$$

ونسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$ .

1) أ/ احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ بيّن أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = \frac{e^{-x} - x}{e^{-x} + 1}$$

ثم احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)]$ .

2) تحقق أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ :

$$f'(x) = \frac{-g(x)e^x}{(e^x + 1)^2}$$

3) ادرس تغيرات الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها .

4) أ/ بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ .

ب/ ادرس الوضع النسبي بين $(\Delta)$ و $(C_f)$ .

5) أ/ بيّن أن: $f(\alpha) = -(\alpha + 1)$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$ .

ب/ بيّن أنّ المنحني $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\beta$ حيث: $0.5 < \beta < 0.6$ .

6) مثّل بيانيا المستقيم $(\Delta)$ والمنحني $(C_f)$ .

7) ليكن $m$ عدد حقيقي موجب تماما، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط $m$ عدد واشارة حلول المعادلة:

$$1 - (x + \ln x)e^x - \ln m = 0$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# المسألة الشاملة رقم: 11

مشاهدة الحل

**(I)** لتكن $g$ دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ وتحقق العلاقة:

$$g(x) - 2g(1-x) = e^x - 2e^{1-x} - 3x + 3$$

1) أوجد عبارة $g(x)$ بدلالة $x$ . (ارشاد: ضع $t = x$ تارة و $t = 1 - x$ تارة أخرى)

2) نضع: $g(x) = e^x - x - 1$ حيث: $D_g = \mathbb{R}$

أ/ احسب نهايات الدالة $g$ عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) استنتج اتجاه تغير الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$h(x) = 1 - g(-x)$$

4) اثبت أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث:

$$-1.15 < \alpha < -1.14 \quad \text{وَ} \quad 1.84 < \beta < 1.85$$

5) استنتج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي $x$ .

**(II)** لتكن $f$ دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x + g(x)}{1 + g(x)}$$

ونسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ .

1) احسب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) أ/ اثبت أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن:

$$f'(x) = \frac{e^x h(x)}{\left(1 + g(x)\right)^2}$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) مثل بيانيا $(C_f)$ .

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

# المسألة الشاملة رقم: 12

مشاهدة الحل

لتكن الدالة $f$ بـ:

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$$

ونسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ .

1) عين مجوعة تعريف الدالة $f$ .

2) أ/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$ . ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ :

$$f(x)=\frac{1}{e^{-x}+1}$$

ج/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[x]$ . ثم فسر النتيجة هندسيا .

3) اثبت أن الدالة $f$ متزايدة تماما على مجال تعريفها .

4) بين أن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر المنحني $(C_f)$

5) عين معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(C_f)$ عند النقطة $A$ .

6) نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $D_f$ كما يلي:

$$g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$$

أ/ حلل العبارة: $e^{2x}-2e^x+1$ .

ب/ احسب $g'(x)$ و $g(0)$ ثم ادرس تغيرات الدالة $g$

ج/ استنتج الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ والمماس $(T)$ .

7) مثل بيانيا $(T)$ و $(C_f)$ .



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

# 2

# حلول المسائل الشاملة

- حل المسألة الشاملة رقم 01
- حل المسألة الشاملة رقم 02
- حل المسألة الشاملة رقم 03
- حل المسألة الشاملة رقم 04
- حل المسألة الشاملة رقم 05
- حل المسألة الشاملة رقم 06
- حل المسألة الشاملة رقم 07
- حل المسألة الشاملة رقم 08
- حل المسألة الشاملة رقم 09
- حل المسألة الشاملة رقم 10
- حل المسألة الشاملة رقم 11
- حل المسألة الشاملة رقم 12

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►

الخليل للرياضيات

najah213.com · نجاح 213

# 01 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**(I)**

1) دراسة تغيرات الدالة $g$ :

- حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[x - e^{-x}] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{-x}\left(\frac{x}{e^{-x}} - 1\right)\right] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}[x - e^{-x}] = +\infty$

- حساب $g'(x)$ :

$$g'(x) = 1 + e^{-x}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

- جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

2) أ- تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$ :

لدينا الدالة $g$ مستمرة ومتزايدة على $\mathbb{R}$

ولدينا $g(0.6) = 0.05$ و $g(0.5) = -0.1$ ولدينا $g(0.6) \times g(0.5) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا $\alpha$

ب- استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ :

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**(II)**

1) حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x+1}{e^x+1}\right] = -\infty$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x+1}{e^x+1}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right]$$

$$= 0$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right] = 0$

- التفسير الهندسي:

- $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 0$

2) أ- حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{e^x + 1 - e^x(x+1)}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x + 1 - xe^x - e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x + 1 - xe^x - e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{-e^x\,(-e^{-x} + x)}{(e^x+1)^2}$$

$$\frac{-e^x\, g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب- تعيين دون حساب قيمة $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$ :

لدينا مما سبق $g(\alpha) = 0$ ومنه :

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right] = f'(\alpha)$$

$$= \frac{-e^\alpha g(\alpha)}{(e^\alpha+1)^2}$$

$$= 0$$

- تفسير الهندسي:

منحني الدالة $f$ يقبل مماس في النقطة ذات الفاصلة $\alpha$ موازٍ لحامل محور الفواصل معادلته هي:

$$y = f(\alpha)$$

3) جدول تغيرات الدالة $f$ :

لدينا:

$$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$$

لدينا المقام موجب تماما ومنه الإشارة من إشارة البسط



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

- جدول التغيرات:

لدينا $f(-1)=0$ ومنه:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-e^x$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | |
| $g(x)$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $f'(x)$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $f(\alpha)$ | $\searrow$ | $0$ |

4) تبيين أن المعادلة $f(x)=x$ إذا وفقط إذا كان $g(x)=0$ :

لتبيين أن $f(x)=x$

يكفي أن نثبت أن: $f(x)-x=0$

$$\begin{aligned} f(x)-x &= \frac{x+1}{e^x+1}-x \\ &= \frac{x+1-e^x-1}{e^x+1} \\ &= \frac{-(e^x-x)}{e^x+1} \\ &= \frac{-g(x)}{e^x+1} \\ &= \frac{0}{e^x+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

استنتاج قيمة $f(\alpha)$:

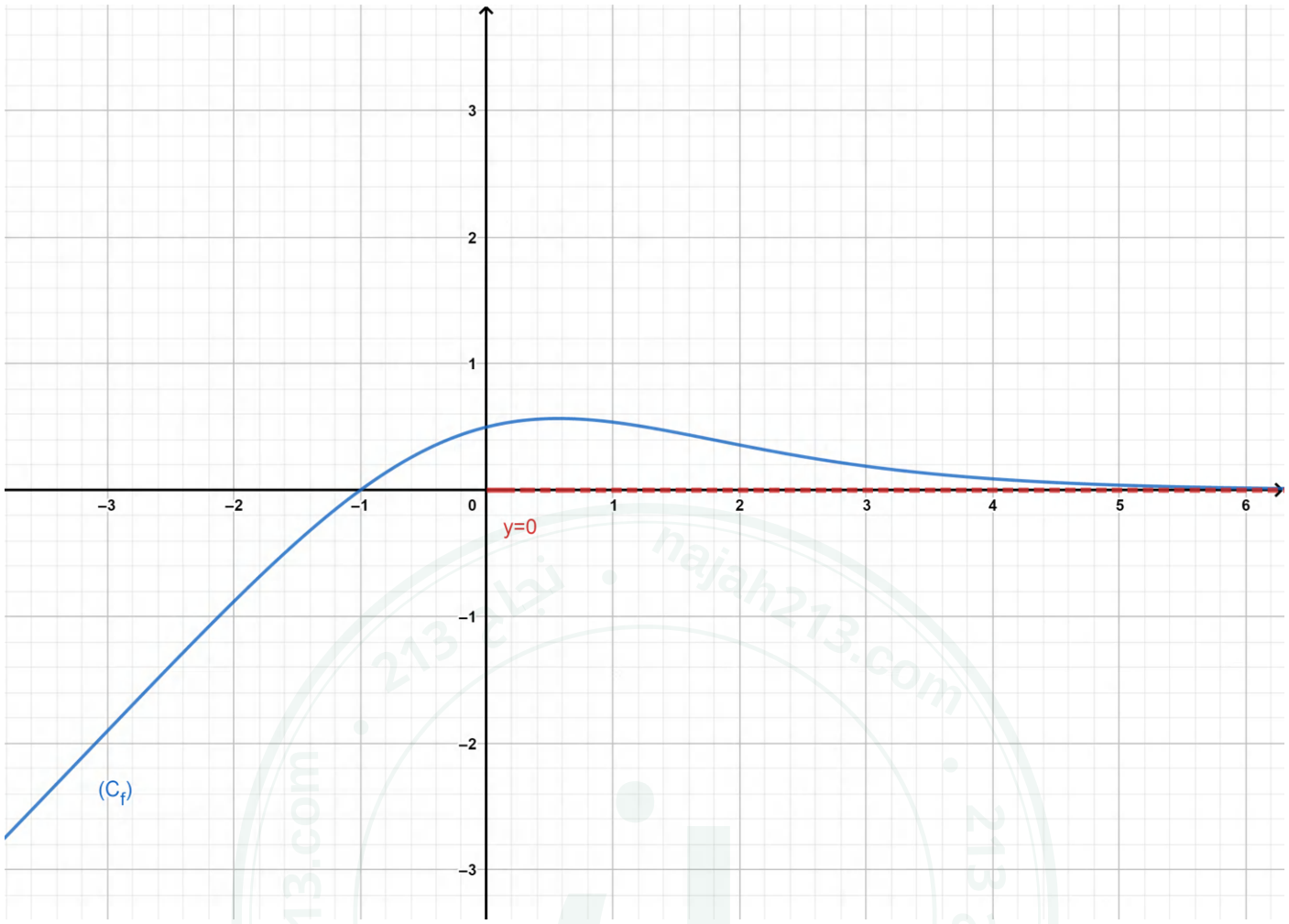
لدينا $f(x)=x$ ومنه $f(\alpha)=\alpha$

5) التمثيل البياني:



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com




**(III)**

1) كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$h(x) = |f(x)|$$
$$= \left|\frac{x+1}{e^x+1}\right|$$
$$= \frac{|x+1|}{e^x+1}$$
$$= \begin{cases} \frac{x+1}{e^x+1}; x \geq -1 \\ \frac{-x-1}{e^x+1}; x \leq -1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(x); x \geq -1 \\ -f(x); x \leq -1 \end{cases}$$

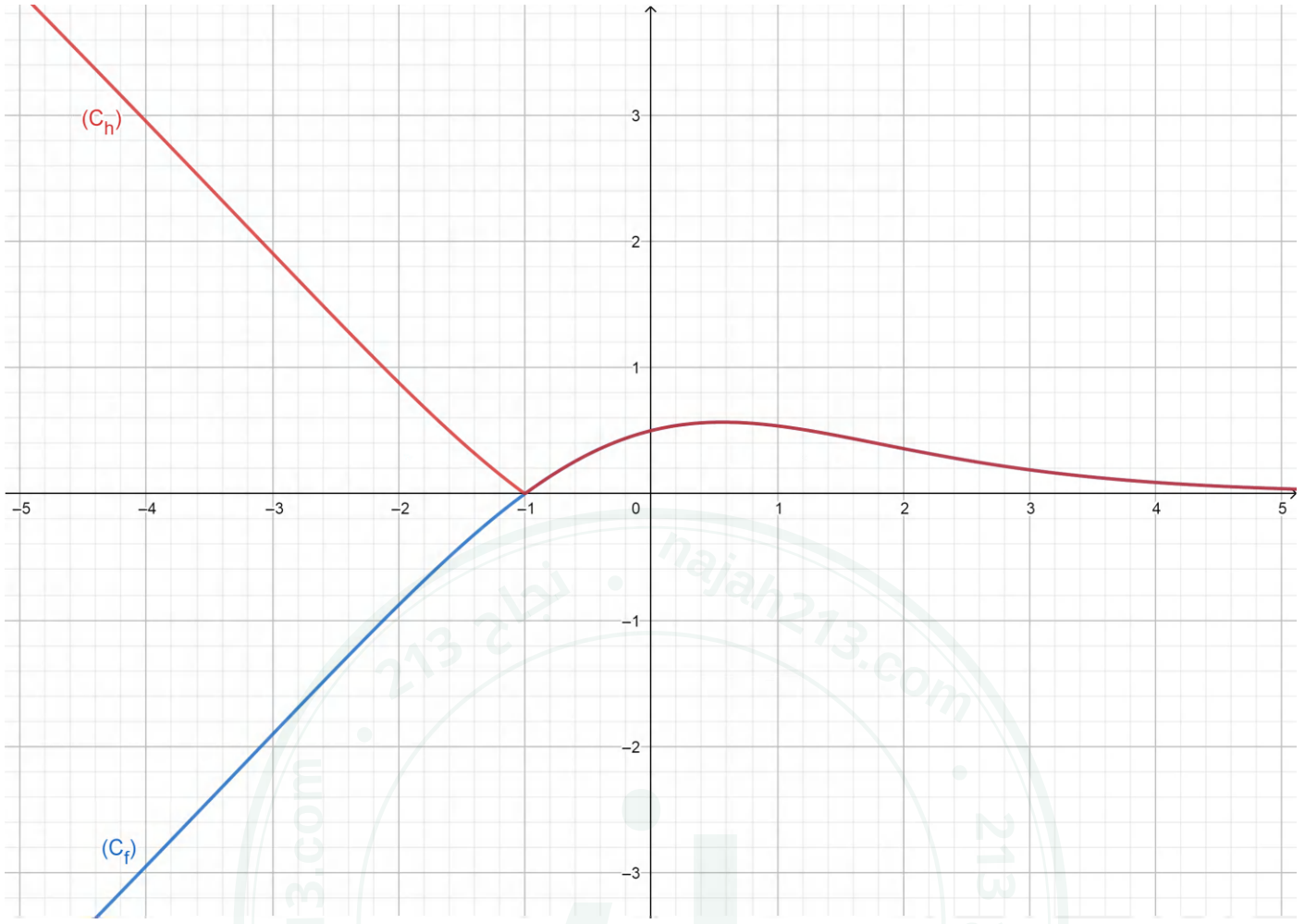
2) تمثيل $(C_h)$ :

$(C_h)$ ينطبق على $(C_f)$ لما $f(x) \geq 0$ ويناظر $(C_f)$ بالنسبة إلى محور الفواصل $(xx')$ إذا كان $f(x) \leq 0$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com






فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# 02 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**(I)**

1) حساب النهايات :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\right] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{xe^x-2e^x+3x+6}{e^x+3}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x\left(x-2+\dfrac{3x+6}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\dfrac{3}{e^x}\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-2+\dfrac{3x+6}{e^x}}{1+\dfrac{3}{e^x}}\right] = +\infty$$

2) تبيين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$ :

$$f'(x) = 1-\frac{4e^x(e^x+3)-e^x(4e^x)}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{(e^x+3)^2+12e^x}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}-6e^x+9}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}-6e^x+9}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{(e^x-3)^2}{(e^x+3)^2}$$

$$= \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$$

3) أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة $f$ ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا $f'(x) \geq 0$ ومنه الدالة $f$ متزايدة تماما



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

ولدينا

$$e^x - 3 = 0 \Rightarrow e^x = 3$$
$$\Rightarrow x = \ln 3$$

ومنه $f'(x)$ تنعدم عند $\ln 3$ ولا تغير اشارتها

ومنه

| $x$ | $-\infty$ | $\ln 3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

ب/ تعيين $f''(\ln 3)$ دون حساب عبارة $f''(x)$ :

عندما تنعدم المشتقة الاولى ولا تغير من اشارتها فإنه توجد نقطة انعطاف وعندها تنعدم المشتقة الثانية

ومنه $f''(\ln 3) = 0$

4) أ/ تبين أن المستقيم $(\Delta_1)$ ذو المعادلة $y_1 = x + 2$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ في جوار $-\infty$ :

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - y_1] = \lim_{x\to-\infty}\left[x - 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} - x + 2\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{4e^x}{e^x + 3}\right]$$
$$= 0$$

ومنه المستقيم $(\Delta_1)$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ في جوار $-\infty$

ب/ تبين أن المستقيم $(\Delta_2)$ ذو المعادلة $y_2 = x - 2$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ في جوار $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y_2] = \lim_{x\to+\infty}\left[x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} - x + 2\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[4 - \frac{4e^x}{e^x + 3}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{12}{e^x + 3}\right]$$
$$= 0$$

ومنه المستقيم $(\Delta_2)$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ في جوار $+\infty$

5) دراسة الوضع النسبي بين المنحني $(C_f)$ والمستقيمين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ :

- الوضع النسبي بين المنحني $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta_1)$ :

ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y_1]$: لدينا:

$$f(x) - y_1 = \frac{-4e^x}{e^x + 3}$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

لدينا المقام موجب ومنه الإشارة من إشارة $(-4e^x)$

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)-y_1$ | $-$ |
| الوضعية | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ |

- <u>الوضع النسبي بين المنحني $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta_2)$ :</u>

ندرس إشارة الفرق $[f(x)-y_2]$: لدينا:

$$f(x)-y_2 = 4-\frac{4e^x}{e^x+3} = \frac{12}{e^x+3} > 0$$

ومنه

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)-y$ | $+$ |
| الوضعية | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ |

6) كتابة معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$$(T): y = f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$= \left(\frac{e^0-3}{e^0+3}\right)^2 (x)+0+2-\frac{4e^0}{e^0+3}$$
$$= \frac{1}{2}x+1$$

7) تبيين أن النقطة $A(\ln 3\,;\ln 3)$ مركز تناظر للمنحني $(C_f)$ :




نقول أن النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر $(C_f)$ إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases}(2\alpha-x)\in D_f\\ f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta\end{cases}$$ أو $$\begin{cases}(\alpha+x)\in D_f\\ (\alpha-x)\in D_f\\ f(\alpha+x)+f(\alpha-x)=2\beta\end{cases}$$

- <u>نبين أن $(\ln 3+x)\in D_f$ و $(\ln 3-x)\in D_f$ :</u>

لدينا: $x\in D_f$ معناه $x\in]-\infty;+\infty[$

ومنه $(\ln 3+x)\in]-\infty;+\infty[$ و $(\ln 3-x)\in]-\infty;+\infty[$

- <u>نبين أن $f(\ln 3+x)+f(\ln 3-x)=2\ln 3$</u>



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$f(\ln 3+x)+f(\ln 3-x)=\left(\ln 3+x+2-\frac{4e^{\ln 3+x}}{e^{\ln 3+x}+3}\right)+\left(\ln 3-x+2-\frac{4e^{\ln 3-x}}{e^{\ln 3-x}+3}\right)$$

$$=2\ln 3+4-\left(\frac{4e^{\ln 3+x}}{e^{\ln 3+x}+3}+\frac{4e^{\ln 3-x}}{e^{\ln 3-x}+3}\right)$$

$$=2\ln 3+4-\left(\frac{12e^{x}}{3e^{x}+3}+\frac{12e^{-x}}{3e^{-x}+3}\right)$$

$$=2\ln 3+4-\left(\frac{4e^{x}}{e^{x}+1}+\frac{4e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)$$

$$=2\ln 3+4-\left(\frac{4+4e^{x}+4+4e^{-x}}{1+e^{x}+e^{-x}+1}\right)$$

$$=2\ln 3+4-\left(\frac{8}{2}\right)$$

$$=2\ln 3$$

8) تبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ :

لدينا الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $f(-1)=0.56$ و $f(-2)=-0.17$ ولدينا $f(-1)\times f(-2)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-2;-1[$

- حصر $\alpha$ :

| $\alpha$ | $-2$ | $-1.9$ | $-1.8$ | $-1.7$ | ... | $-1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(\alpha)$ | $-0.17$ | $-0.09$ | $-0.09$ | $0.07$ | ... | $0.56$ |

9) التمثيل البياني:

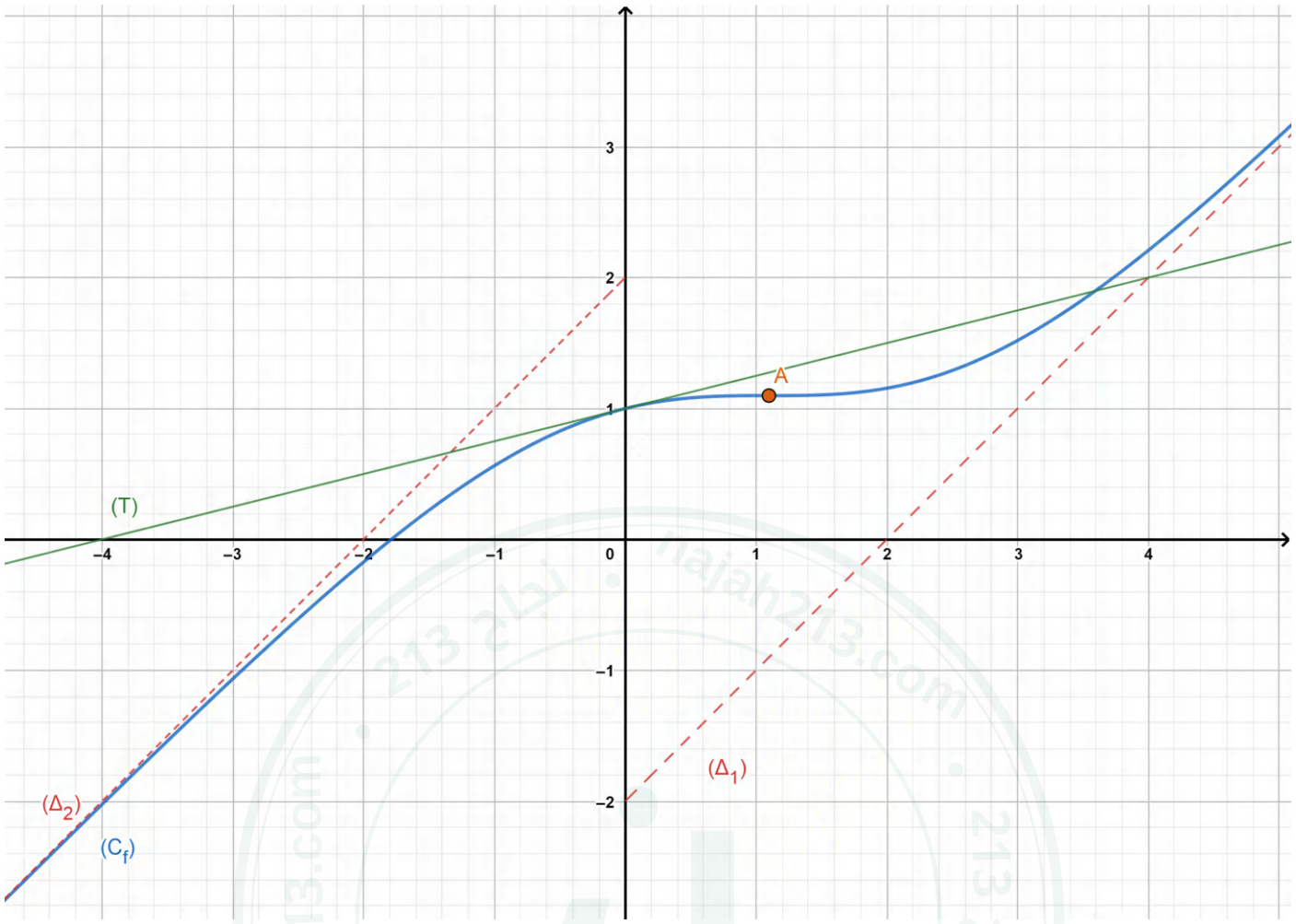
خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة المائلة : $y=x+2$ و $y=x-2$
- نعين نقطة مركز تناظر المنحني $(C_f)$
- نرسم المماس $(T)$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم $(C_f)$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com




10)المناقشة البيانية:

$$f(-|x|) = \ln(|m|)x + 2$$

نضع $h(x) = f(-|x|)$

ومنه:

$$h(x) = \begin{cases} f(-(x)); x \geq 0 \\ f(-(-x)); x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} f(-x); x \geq 0 \\ f(x); x \leq 0 \end{cases}$$

لما $x \leq 0$ المنحني $(C_h)$ ينطبق على $(C_f)$.

لما $x \geq 0$ المنحني $(C_h)$ يناظر المنحني العكسي لـ $(C_f)$ بالنسبة لمحور التراتيب.

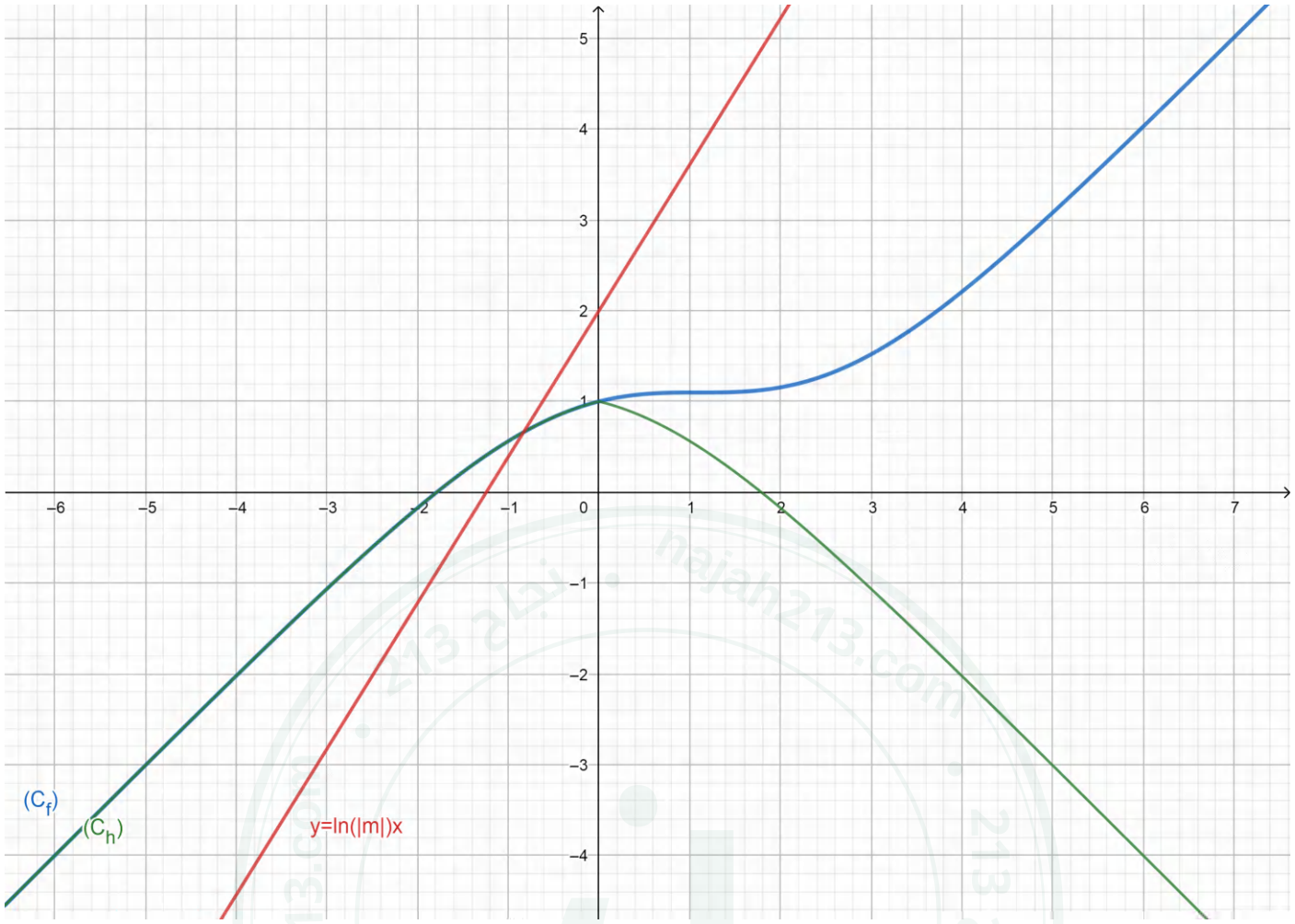
ومنه تمثيل $(C_h)$ كالآتي:

المنحني $(C_f)$ و المنحني $(C_h)$ و المستقيم $y = \ln|m|\, x$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com




**ومنه المناقشة كالآتي:**

لما: $\ln|m| \leq 1$ أي: $|m| \leq e$ أي: $-e \leq m \leq e$ أي لما: $m \in [-e; e]$ المعادلة لا تقبل حلول

لما: $\ln|m| > 1$ أي: $|m| > e$ أي: $m \in ]-\infty; e[ \cup ]e; +\infty[$ المعادلة تقبل حل وحيدا

**(II)**

**1) دراسة تغيرات الدالة $g$ .**

نلاحظ أنّ $g(x) = (f \circ k)(x)$ حيث $k(x) = 3x - 2$

**2) التحقق من أن $g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 0$ :**

$$g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = f\left(3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right) = f(\alpha) = 0$$

- تبيين أن $g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'(\alpha)$:

لدينا: $g'(x) = 3f'(3x-2)$ ومنه:

$$g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'\left(3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right) = 3f'(\alpha)$$

**3) استنتاج معادلة المماس $(d)$ لمنحني الدالة $g$ عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$ :**

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$(d): y = g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) + g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)$$
$$= 3f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) + 0$$
$$= 3f'(\alpha)x - f'(\alpha)(\alpha+2)$$

4) التحقق من معادلة المماس $(d)$ :

لدينا:

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha + 2 - \frac{4e^{\alpha}}{e^{\alpha}+3} = 0$$
$$\Rightarrow \alpha + 2 = \frac{4e^{\alpha}}{e^{\alpha}+3}$$
$$\Rightarrow (\alpha+2)(e^{\alpha}+3) - 4e^{\alpha} = 0$$
$$\Rightarrow ae^{\alpha} + 3a + 2e^{\alpha} + 6 - 4e^{\alpha} = 0$$
$$\Rightarrow e^{\alpha}(a-2) = -(3a+6)$$
$$\Rightarrow e^{\alpha} = \frac{3\alpha+6}{2-\alpha}$$

ولدينا:

$$(d): y = 3f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right)$$
$$= 3\left(\frac{e^{\alpha}-3}{e^{\alpha}+3}\right)^2\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right)$$
$$= 3\left(\frac{\frac{3\alpha+6}{2-\alpha} - 3}{\frac{3\alpha+6}{2-\alpha} + 3}\right)^2\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right)$$
$$= 3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right)$$
$$= \frac{3\alpha^2}{4}x - \frac{\alpha^2(\alpha+2)}{4}$$

# 03 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**(I)**

1) من البيان نجد:

أ/

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)]=-1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)]=+\infty$

ب-

- $g(0)=-2$
- $g'(0)=0$

2) ايجاد $a$ ، $b$ و $c$ :

لدينا:

$$\begin{cases} g(0)=-2 \\ g'(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)]=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a(0)+b)e^0+c=-2 \\ (a(0)+a+b)e^0=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}[(ax+b)e^x+c]=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c=-2 \\ a+b=0 \\ c=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$$

3) أ/ تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ :

لدينا الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)]\times\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)]<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ .

- التحقق من أن $1.2<\alpha<1.3$ :

لدينا: $g(1.3)=0.1$ و $g(1.2)=-0.3$

ولدينا: $g(1.3)\times g(1.2)<0$

ومنه: $1.2<\alpha<1.3$ .

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**(II)**

1) أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$ :

الخليل للرياضيات

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x+1}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{x}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right] = 0$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right] = 0$ (نهاية شهيرة)

- التفسير الهندسي: المنحني $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$

ب/ حساب $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{e^x+1}\right]$ :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{e^x+1}\right] = -\infty$$

2) أ/ تبيين أنه من اجل كل $x$ حقيقي: $f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$ :

$$f'(x) = \frac{e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{(1-x)e^x+1}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-\big((x-1)e^x-1\big)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة $f$ :

لدينا $f(0) = 0$

ولدينا: $f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x+1)^2} < 0$ ومنه إشارة المشتقة عكس إشارة $g(x)$.

ومنه جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $+$ | $0$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $0$ |

3) تعيين $\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$ دون حساب:

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right] = f'(\alpha) = \frac{-g(\alpha)}{(e^\alpha+1)^2} = 0$$

- تفسير الهندسي:

المنحني $(C_f)$ يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة $\alpha$ موازٍ لحامل محور الفواصل.



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

4) تبيين أن المنحني $(C_f)$ يقبل مماسا وحيدا $(T)$ يمر من المبدأ:

لدينا معادلة المماس تكتب من الشكل:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

يوجد مماس يمر من $O(0;0)$ معناه:

$$\begin{aligned} f'(a)(0-a) + f(a) = 0 \\ \Rightarrow -af'(a)x + f(a) = 0 \\ \Rightarrow a\frac{(a-1)e^a - 1}{(e^a+1)^2} + \frac{a}{e^a+1} = 0 \\ \Rightarrow a(a-1)e^a - a + a(e^a+1) = 0 \\ \Rightarrow a^2e^a = 0 \\ \Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

ومنه معادلة المماس هي:

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ y &= \frac{-g(0)}{(e^0+1)^2}x + \frac{0}{e^0+1} \\ y &= \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

5) تبيين أن $f(\alpha) = \alpha - 1$ :

مما سبق لدينا

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 \Rightarrow (\alpha-1)e^\alpha - 1 = 0 \\ \Rightarrow (\alpha-1)e^\alpha = 1 \\ \Rightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha-1} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha}{e^\alpha+1} \\ &= \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha} \\ &= \alpha - 1 \end{aligned}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} 1.2 < \alpha < 1.3 \\ 0.2 < a - 1 < 0.3 \\ 0.2 < f(\alpha) < 0.3 \end{aligned}$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

6) أ/ تبيين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $-\infty$ :

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{e^x+1}-x\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x-xe^x-x}{e^x+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-xe^x}{e^x+1}\right] = 0$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}[xe^x] = 0$ (نهاية شهيرة)

ب/ دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ :

دراسة إشارة الفرق: $[f(x)-y]$:

$$f(x)-y = \frac{x}{e^x+1}-x$$
$$= \frac{x-xe^x-x}{e^x+1}$$
$$= \frac{-xe^x}{e^x+1}$$

لدينا $(e^x+1) > 0$ و $e^x > 0$ ومنه الإشارة من إشارة $(-x)$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | $+$ | $0$ | $-$ |

الوضعية:

- $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ في المجال: $]-\infty;0[$
- $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة ذات الفاصلة $0$
- $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ في المجال: $]0;+\infty[$

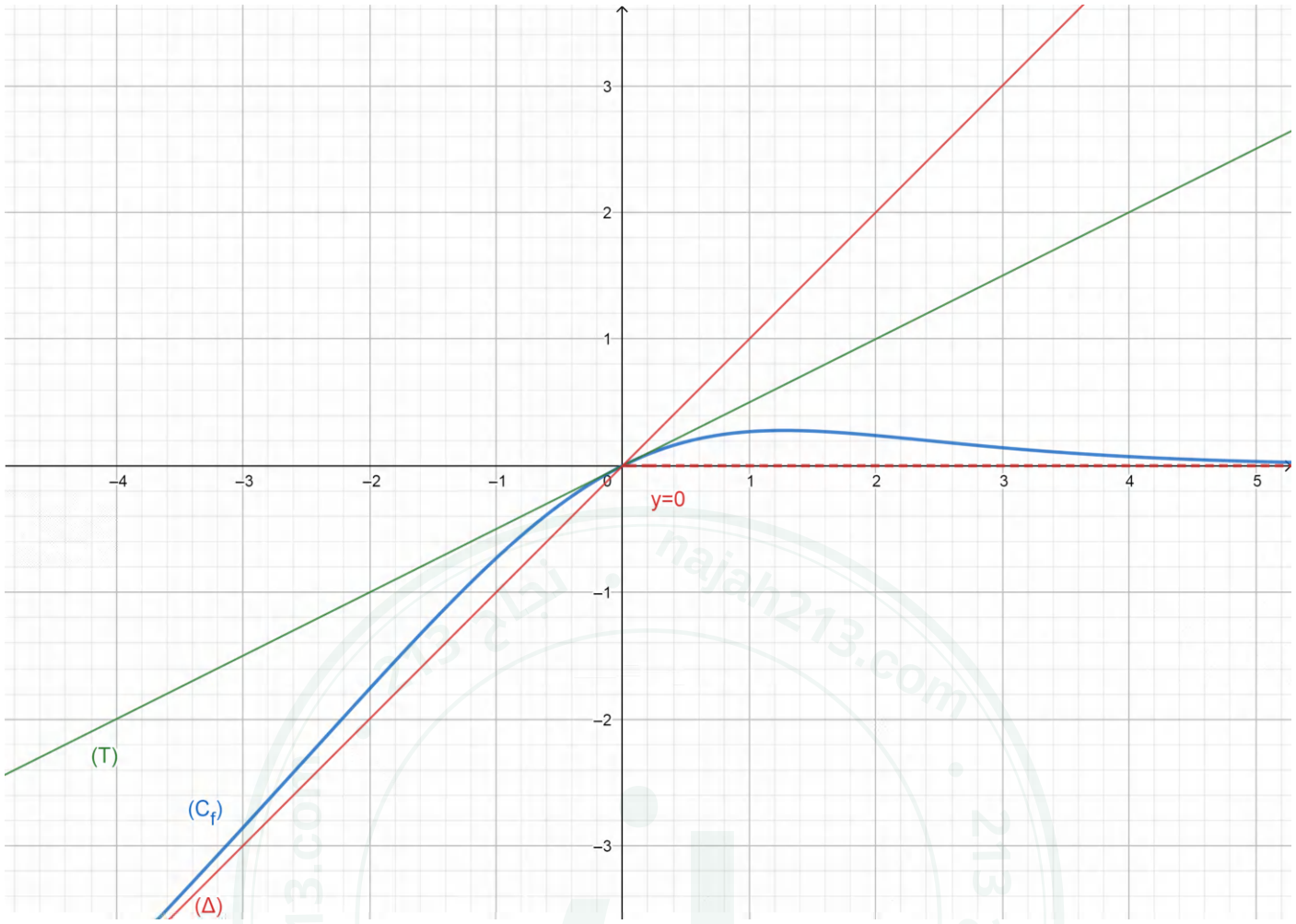
7) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب $y = 0$ و المستقيم المقارب المائل $(\Delta)$
- نرسم المماس $(T)$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم $(C_f)$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com




8) المناقشة البيانية:

لما $m < 0$ المعادلة تقبل حل وحيد سالب

لما $m = 0$ المعادلة تقبل حل وحيد معدوم

لما $0 < m < \alpha$ المعادلة تقبل حلين موجبين

لما $m = \alpha$ المعادلة تقبل حل مضاعف موجب

لما $m > \alpha$ المعادلة لا تقبل حلولا



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

# 04 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**(I)**

1) أ/ تبيين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^{2x}+1+2e^x-4e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^{2x}+1-2e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$
$$= \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$$

ب/ دراسة إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ :

لدينا $f'(x) > 0$ ومنه الدالة $f$ متزايدة تماما.

لدينا $f'(0) = 0$ أي المشتقة تنعدم ولا تغير اشارتها

ومنه نستنتج أن المنحني $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف.

ج/ جدول تغيرات الدالة $f$ :

- **حساب النهايات:**

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[x-1+\frac{4}{e^x+1}\right]$$
$$= -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[x-1+\frac{4}{e^x+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x-1+\frac{\frac{4}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right]$$
$$= +\infty$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

- جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

2) برهان أن النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر المنحني $(C_f)$ :

**◄ شاهد هذا التذكير ►**
(اثبات ان نقطة مركز تناظر)

- نثبت أن: $(2(0)-x) \in D_f$ :

لدينا $x \in \mathbb{R}$ ومنه $(-x) \in \mathbb{R}$

- نثبت أن : $f(2(0)-x)+f(x)=2(1)$ :

لدينا:

$$f(2(0)-x)+f(x) = -x-1+\frac{4}{e^{-x}+1}+x-1+\frac{4}{e^{x}+1}$$
$$= -2+\frac{4}{e^{-x}+1}+\frac{4}{e^{x}+1}$$
$$= \frac{-2(e^{-x}+1)(e^{x}+1)+4(e^{x}+1)+4(e^{-x}+1)}{(e^{-x}+1)(e^{x}+1)}$$
$$= \frac{2[2(e^{x}+1)+2(e^{-x}+1)-(e^{-x}+1)(e^{x}+1)]}{(e^{-x}+1)(e^{x}+1)}$$
$$= \frac{2[2(e^{x}+e^{-x}+2)-(e^{x}+e^{-x}+2)]}{(e^{-x}+1)(e^{x}+1)}$$
$$= \frac{2[2(e^{x}+e^{-x}+2)-(e^{x}+e^{-x}+2)]}{(e^{-x}+1)(e^{x}+1)}$$
$$= \frac{2[e^{x}+e^{-x}+2]}{(e^{-x}+1)(e^{x}+1)}$$
$$= \frac{2[e^{x}+e^{-x}+2]}{e^{x}+e^{-x}+2}$$
$$= 2$$

ومنه النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر المنحني $(C_f)$ .

3) أ/ تبيين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=0$ :

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim_{x\to+\infty}\left[x-1+\frac{4}{e^x+1}-x+1\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4}{e^x+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{4}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1}\right] = 0$$

- **التفسير الهندسي:**

$(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته: $y = x-1$ .

ب/ حساب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]$ :

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to-\infty}\left[x-1+\frac{4}{e^x+1}-x\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-1+\frac{4}{e^x+1}\right]$$
$$= 3$$

**الاستنتاج:**

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] = 3 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]-3 = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-x-3] = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)] = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x+3$ مقارب مائل بجوار $-\infty$

◄ ملاحظة: أمكننا إدخال 3 داخل النهاية لانها لا تتعلق بالمتغير $x$ ►

4) تبيين أن المنحني $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ :

لدينا الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا: $f(-2.76) = 0.001$ و $f(-2.77) = -0.3$

ولدينا: $f(-2.77)\times f(-2.76) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ .

5) التمثيل البياني:

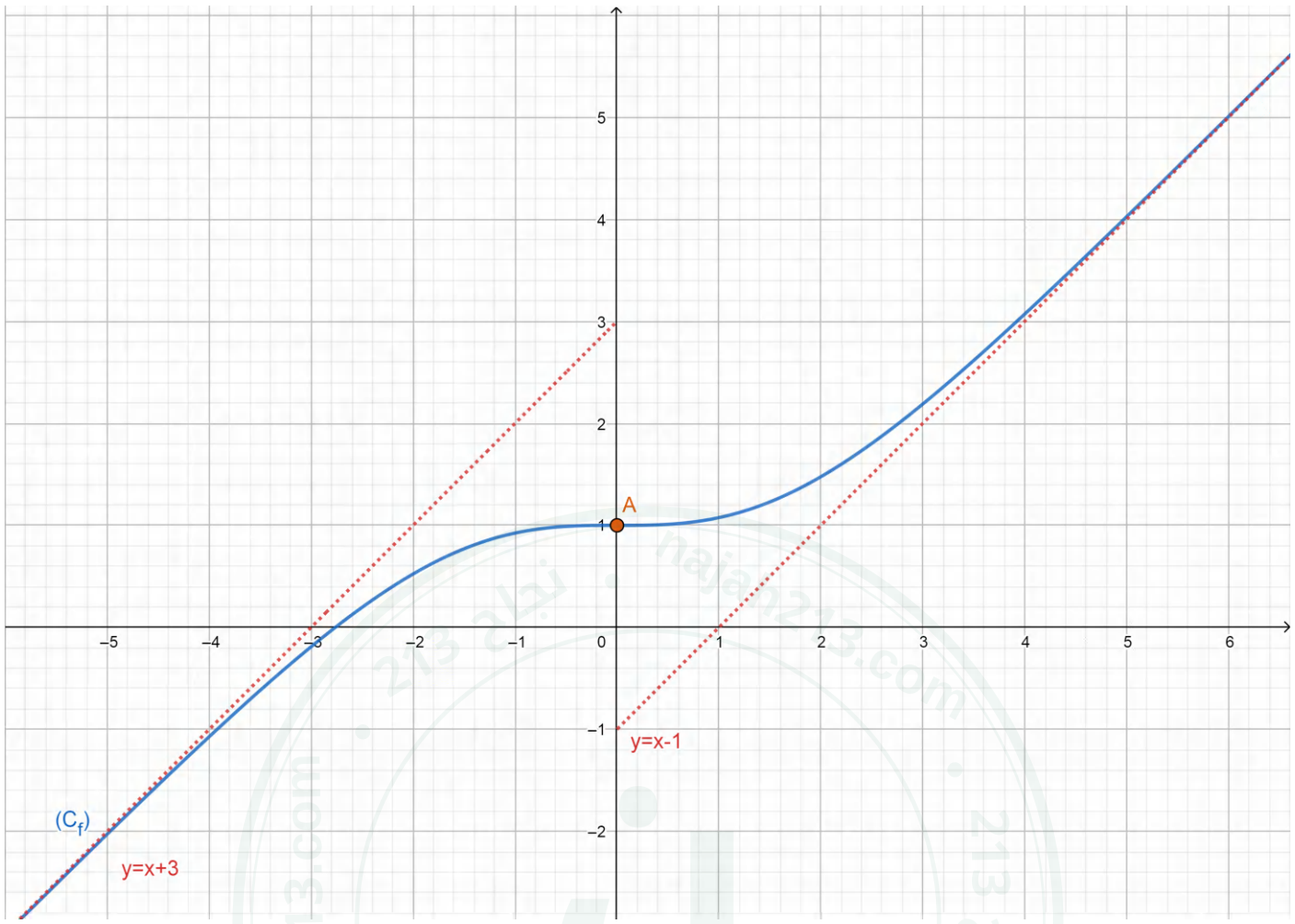
خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة المائلة : $(y = x-1)$ و $(y = x+3)$
- نعين $A$ نقطة مركز تناظر المنحني $(C_f)$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم $(C_f)$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com




**(II)**

**1) اتجاه تغير الدالة $g$ :**

نلاحظ أن $g(x) = (f \circ \varphi)(x)$ حيث: $\varphi(x) = 4x + 1$

لدينا الدالة $\varphi$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

والدالة $f$ متزايدة تماما أيضا على $\mathbb{R}$ (لهما نفس اتجاه التغير)

ومنه الدالة $g$ متزادية تماما على $\mathbb{R}$

**2) التحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = 0$**

$$g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = f\left(4\frac{\alpha-1}{4} + 1\right)$$
$$= f(\alpha)$$
$$= 0$$

**تبيين أن: $g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = 4f'(\alpha)$:**

لدينا: $g'(x) = 4f'(4x+1)$ ومنه :

$$g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = 4f'\left(4\frac{\alpha-1}{4} + 1\right)$$
$$= 4f'(\alpha)$$

$f$ دالة معرفة على مجال $I$ و $g$ دالة معرفة على المجال $(I)$

- إذا كانت الدالتين $f$ و $g$ لهما نفس اتجاه التغير فإن: $(f \circ g)$ متزايدة على $I$
- إذا كانت الدالتين $f$ و $g$ متعاكستان في اتجاه التغير فإن: $(f \circ g)$ متناقصة على $I$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

3) استنتاج معادلة المماس $(T)$ لمنحني الدالة $g$ في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha-1}{4}$ :

$$(T): y = g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)+g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)$$
$$= 4f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)+0$$
$$= 4f'(\alpha)x - f'(\alpha)(\alpha-1)$$

4) التحقق من أن معادلة المماس $(T)$ تعطى بـ: $y=(\alpha+1)^2x-\frac{(\alpha+1)(\alpha^2-1)}{4}$ :

لدينا:

$$f(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha-1+\frac{4}{e^{\alpha}+1}=0$$
$$\Rightarrow \frac{4}{e^{\alpha}+1}=1-\alpha$$
$$\Rightarrow e^{\alpha}=\frac{3+\alpha}{1-\alpha}$$

ومنه:

$$(T): y = 4\left(\frac{\frac{3+\alpha}{1-\alpha}-1}{\frac{3+\alpha}{1-\alpha}+1}\right)^2\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)$$
$$= 4\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)$$
$$= (\alpha+1)^2x-\frac{(\alpha+1)^2(\alpha-1)}{4}$$
$$= (\alpha+1)^2x-\frac{(\alpha+1)(\alpha+1)(\alpha-1)}{4}$$
$$= (\alpha+1)^2x-\frac{(\alpha+1)(\alpha^2-1)}{4}$$

**(III)**

1) تبيين أن الدالة $k$ زوجية :




دراسة شفعية دالة (زوجية / فردية):

لتبيين أنّ الدالة $f$ فردية نبين أنّ $\begin{cases}(-x)\in D_f\\ f(-x)=-f(x)\end{cases}$

لتبيين أنّ الدالة $f$ زوجية نبين أنّ $\begin{cases}(-x)\in D_f\\ f(-x)=f(x)\end{cases}$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

لدينا $(-x) \in \mathbb{R}$

ولدينا:

$$k(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

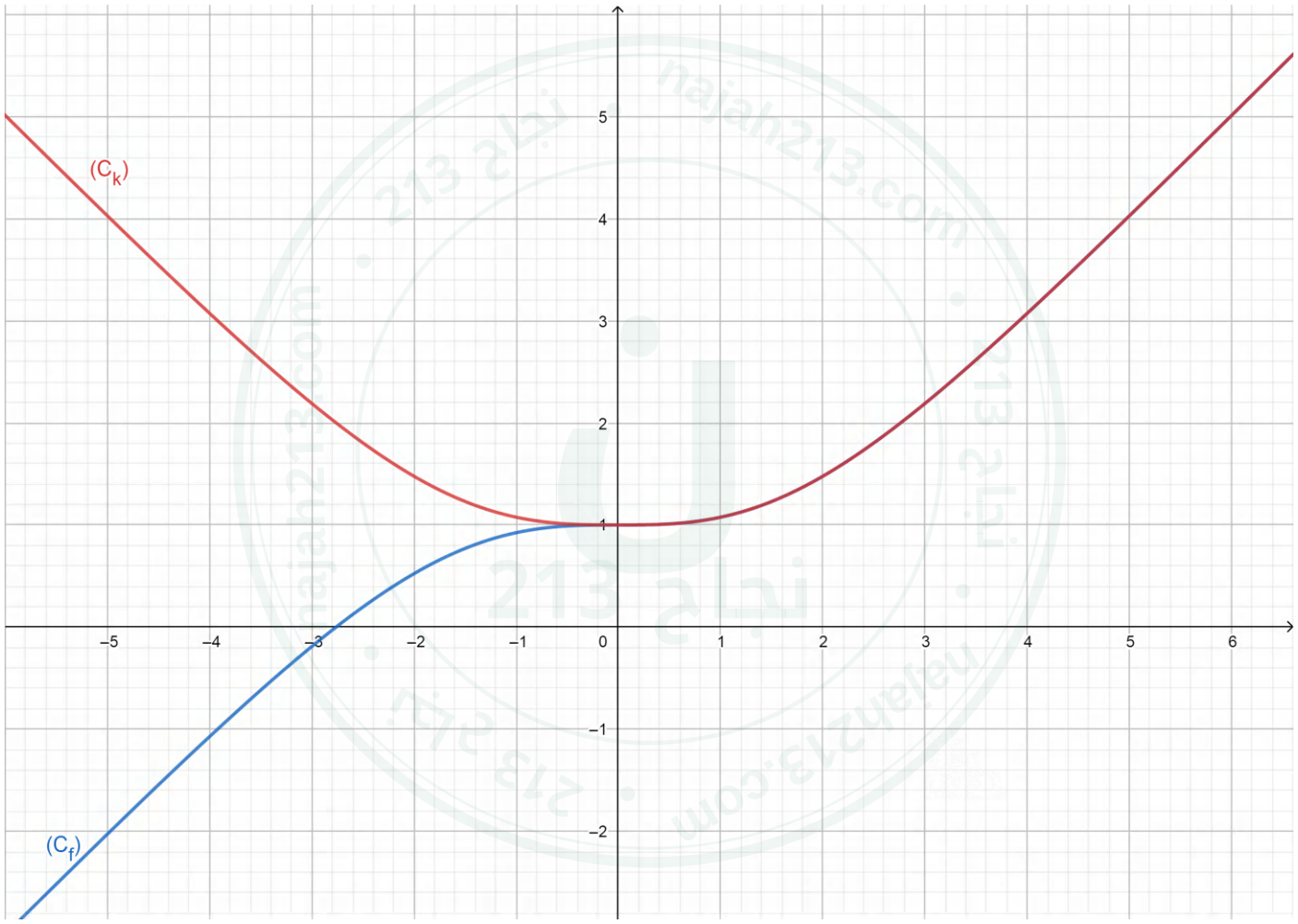
ومنه الدالة $k$ زوجية.

2) أ/ تبيين كيفية تمثيل $(C_k)$ انطلاقا من $(C_f)$ :

لمّا $x \geq 0$ : $(C_k)$ ينطبق على $(C_f)$

ولما $x \leq$: $(C_k)$ يناظر $(C_f)$ بالنسبة لحامل محور التراتيب $(yy')$

ب/ التمثيل البياني لـ $(C_k)$ :




**(IV)**

1) التحقق من أنه كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $h(x) = f(x) + 1$ :

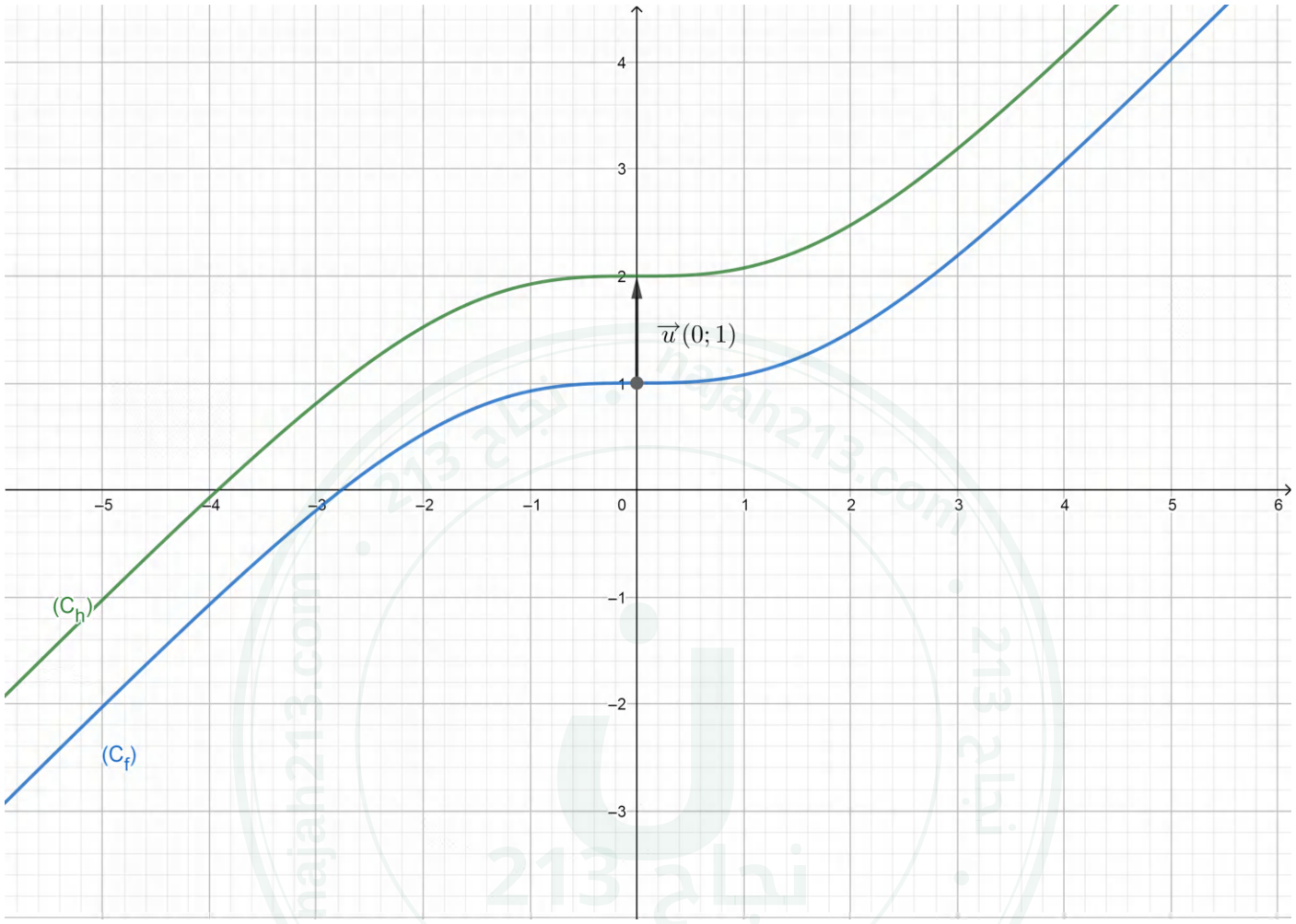
$$f(x) + 1 = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} + 1$$
$$= x + \frac{4}{e^x + 1}$$
$$= h(x)$$

2) أ/ استنتاج أن $(C_h)$ هو صورة $(C_f)$ بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه:

لدينا: $h(x) = f(x) + 1$

ومنه $(C_h)$ هو صورة $(C_f)$ بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{u}$ حيث: $\vec{u}(0;1)$

ب/ التمثيل البياني لـ $(C_h)$ :



najah213.com · نجاح 213

# 05 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**(I)**

**1) دراسة تغيرات الدالة $g$ :**

- **النهايات:**

$$\lim_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim_{x\to-\infty}[x+2-e^x]$$
$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim_{x\to+\infty}[x+2-e\hat{}x\,]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}-1\right)\right]$$
$$= -\infty$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right] = 0$ نهاية شهيرة)

- **حساب $g'(x)$:**

$$g'(x) = 1 - e^x$$

**لدينا:**

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 1 - e^x = 0$$
$$\Rightarrow e^x = 1$$
$$\Rightarrow x = \ln 1$$
$$\Rightarrow x = 0$$

- **جدول التغيرات:**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\infty$ |

**2) تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلان $\alpha$ و $\beta$ :**

**لدينا الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$**

**ولدينا:** $g(1.15) = -0.008$ و $g(1.14) = 0.01$

**ولدينا:** $g(1.14) \times g(1.15) < 0$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha$ في المجال $]1.14; 1.15[$:

ولدينا: $g(-1.8) = 0.03$ و $g(-1.9) = -0.04$

ولدينا: $g(-1.9) \times g(-1.8) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\beta$ في المجال $]-1.9; -1.8[$:

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\beta$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**(II)**

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$ :

- $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x-1}{xe^x+1}\right] = -1$$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}[xe^x] = 0$ (نهاية شهيرة)

- $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x-1}{xe^x+1}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-\frac{1}{e^x}}{x+\frac{1}{e^x}}\right] = 0$$

- التفسير الهندسي:

- $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته: $y = -1$ .
- $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته: $y = 0$ .

2) تبيين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$ :

$$f'(x) = \frac{e^x(xe^x+1) - (e^x+xe^x)(e^x-1)}{(xe^x+1)^2}$$
$$= \frac{xe^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x - xe^{2x} + xe^x}{(xe^x+1)^2}$$
$$= \frac{-e^{2x} + 2e^x + xe^x}{(xe^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x(x+2-e^x)}{(xe^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

3) دراسة اتجاه تغير الدالة $f$ :

لدينا $e^x > 0$ و $(xe^x + 1)^2 > 0$ و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

ولدينا : $f(0) = 0$ ومنه جدول التغيرات كالآتي:

| $x$ | $-\infty$ | | $\beta$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | ↘ | $f(\beta)$ | ↗ | $0$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $0$ |

4) تعيين دون حساب كل من : $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$ و $\lim\limits_{x\to\beta}\left[\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\right]$ :

- $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right] = f'(\alpha) = 0$
- $\lim\limits_{x\to\beta}\left[\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\right] = f'(\beta) = 0$

- التفسير الهندسي:

$(C_f)$ يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين $\alpha$ و $\beta$ .

5) تبيين أنّ: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$ :

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha + 2 - e^{\alpha}$$
$$\Rightarrow e^{\alpha} = \alpha + 2$$

ومنه:

$$f(\alpha) = \frac{e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}+1}$$
$$= \frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}$$
$$= \frac{\alpha+1}{\alpha^2+2a+1}$$
$$= \frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}$$
$$= \frac{1}{\alpha+1}$$

- حصر $f(\alpha)$ :

لدينا:

$$1.14 < \alpha < 1.15$$
$$1.14 + 1 < \alpha + 1 < 1.15 + 1$$

الخليل للرياضيات

$$\frac{1}{2.15} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{2.14}$$

ومنه:

$$0.46 < f(\alpha) < 0.46$$

6) تبيين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $h(x) \leq 0$ :

لدينا $h(0) = 0$

ولدينا:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[h(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}[e^x - xe^x - 1]$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1 - x - \frac{1}{e^x}\right)\right]$
$= -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}[h(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[e^x - xe^x - 1]$
$= -\infty$

ولدينا:

$$h'(x) = -xe^x$$

جدول تغيرات الدالة $h$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

من جدول التغيرات نجد أعلى قيمة تأخذها الدالة $h$ هي $0$

ومنه $h(x) \leq 0$ .

7) التحقق من ان: $p(0) = 0$ :

$$p(0) = 1 - 2 + 1 = 0$$

8) أ- تبيين أن المنحني $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 5$ :

◄ يتعامد مستقيمان إذا كان جداء ميليهما يساوي $-1$ ►

ومنه:

$$f'(a) \times -1 = -1 \Rightarrow f'(a) = 1$$
$$\Rightarrow \frac{e^a(a+2-e^a)}{(ae^a+1)^2} = 1$$
$$\Rightarrow e^a(a+2-e^a) = (ae^a+1)^2$$
$$\Rightarrow (ae^a+1)^2 - e^a(a+2-e^a) = 0$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

$$\Rightarrow a^2e^{2a} + 1 + 2ae^a + e^{2a} - 2e^a - ae^a = 0$$
$$\Rightarrow (a^2+1)e^{2a} + (a-2)e^a + 1 = 0$$
$$\Rightarrow p(a) = 0$$
$$\Rightarrow a = 0$$

المعادلة تقبل حل، ومنه المنحني $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 5$

ب- كتابة معادلة للمماس $(T)$ :

$$(T): y = f'(a)(x-a) + f(a)$$
$$= x + f(0)$$
$$= x$$

ج- دراسة وضعية المنحني $(C_f)$ بالنسبة للمماس $(T)$ :

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - y$

$$f(x) - y = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x$$
$$= \frac{e^x - 1 - x^2e^x - x}{xe^x + 1}$$
$$= \frac{e^x(1-x^2) - (1+x)}{xe^x + 1}$$
$$= \frac{e^x(1-x)(1+x) - (1+x)}{xe^x + 1}$$
$$= \frac{(1+x)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1}$$
$$= \frac{(1+x)h(x)}{xe^x + 1}$$

لدينا: $h(x) \leq 0$

ولدينا:

$$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1+x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

- ندرس إشارة $(xe^x + 1)$ :

نضع $\varphi(x) = xe^x + 1$

$$\varphi'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

$e^x > 0$ ومنه إشارة $\varphi'(x)$ من إشارة $(1+x)$

$$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$$

- جدول تغيرات $\varphi(x)$ :



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\varphi(x)$ | $1$ | ↘ | $0.6$ | ↗ | $+\infty$ |

من جدول تغيرات $\varphi(x)$ نلاحظ أن $\varphi(x) > 0$ ومنه:

اذن إشارة الفرق $f(x) - y$ كالآتي

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $1+x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)-y$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

- الوضعية:

- $(C_f)$ فوق $(T)$ لما $x \in ]-\infty;-1[$
- $(C_f)$ يقطع $(T)$ في النقطة $A(-1;-1)$
- $(C_f)$ تحت $(T)$ لما $x \in ]-1;+\infty[$

- الاستنتاج:

المماس $(T)$ يقطع المنحني $(C_f)$ في النقطة $A(-1;-1)$ معناه توجد نقطة انعطاف

9) التمثيل البياني:

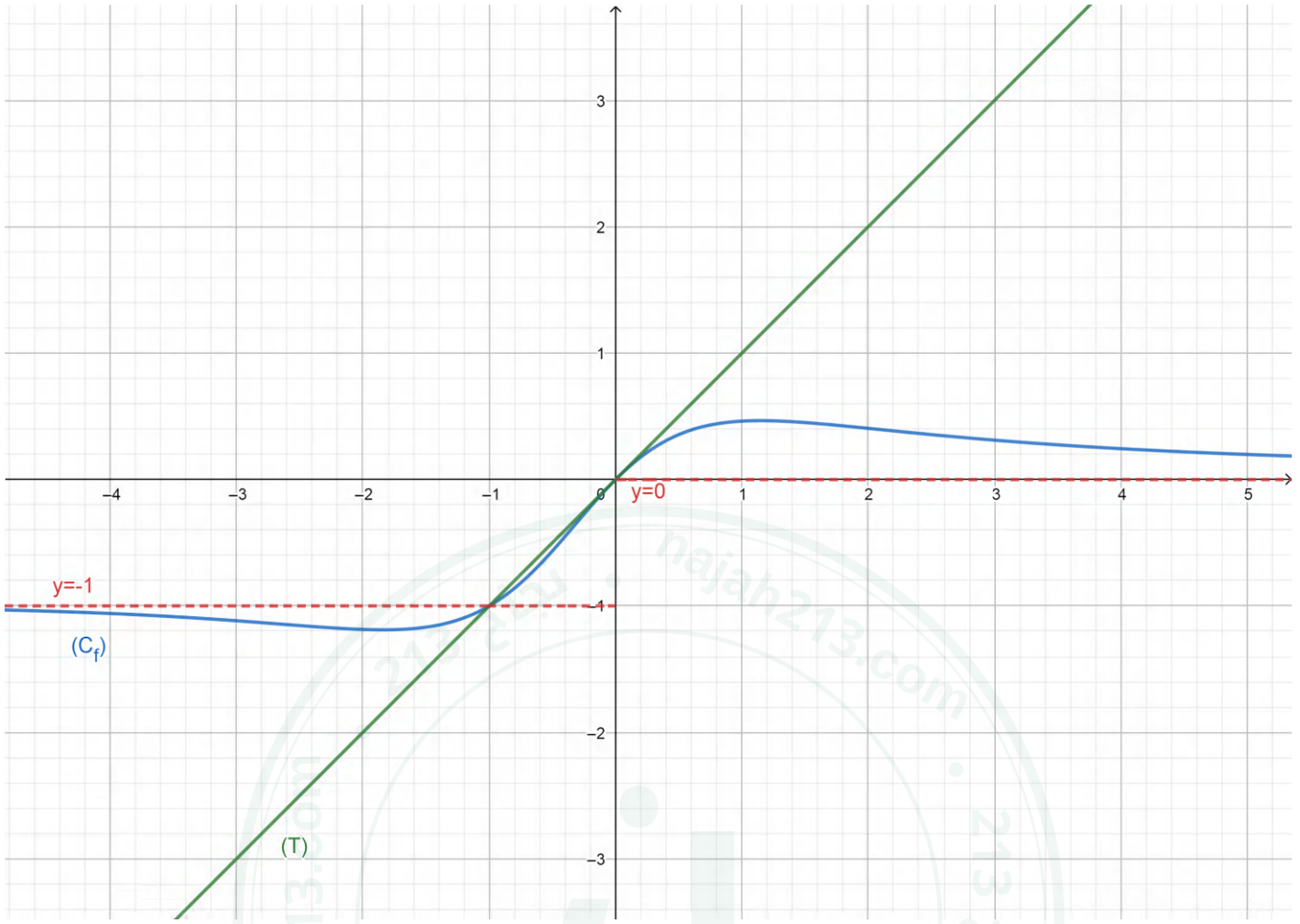
خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $(y=-1)$ و $(y=0)$
- نرسم المماس $(T)$.
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم $(C_f)$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com




10) المناقشة البيانية:

$$e^x(1-mx^2)+mx-1=0 \Rightarrow e^x-mx^2e^x+mx-1=0$$
$$\Rightarrow mx(1-xe^x)=1-e^x$$
$$\Rightarrow mx=\frac{1-e^x}{1-xe^x}$$
$$\Rightarrow \frac{e^x-1}{xe^x-1}=mx$$
$$\Rightarrow f(x)=mx$$

مجموعة حلول المعادلة هي نقط تقاطع المنحني $(C_f)$ مع المستقيمات ذات المعادلة : $f(x)=mx$

ومنه:

لما $m=1$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا $x=0$ وحلا سالبا

لما $0<m<1$ المعادلة تقبل ثلاث حلول

لما $m\leq 0$ المعادلة تقبل حلا معدوما

لما $m>1$ المعادلة تقبل حلا معدوما

الخليل للرياضيات

# حل المسألة الشاملة رقم: 06

مشاهـــدة المسألة

1) دراسة تغيرات الدالة $f'$ :

لدينا:

$$f'(x) = 2 - e^{x-1} - xe^{x-1}$$
$$= 2 - (1+x)e^{x-1}$$

ومنه ندرس تغيرات الدالة $f'$ :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[f'(x)] = \lim_{x\to-\infty}[2-(1+x)e^{x-1}]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[f'(x)]$$
$$= 2$$
$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f'(x)] = \lim_{x\to+\infty}[2-(1+x)e^{x-1}]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[f'(x)]$$
$$= -\infty$$

- حساب $f''(x)$ :

$$f''(x) = -e^{x-1} - (1+x)e^{x-1}$$
$$= -(2+x)e^{x-1}$$

لدينا $e^{x-1} > 0$ ومنه الإشارة من $-(2+x)$ :

$$-(2+x) = 0 \Rightarrow x = -2$$

ومنه:

- جدول تغيرات $f'(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | $2$ | ↗ | $f'(-2)$ | ↘ | $-\infty$ |

2) حساب $f'(1)$ :

$$f'(1) = 2 - (1+1) = 0$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

- إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

3) دراسة تغيرات الدالة $f$ :

- **النهايات:**

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}[2x+1-xe^{x-1}]$$
$$= -\infty$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}[xe^{x-1}] = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}[2x+1-xe^{x-1}]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[e^{x-1}\left(\frac{2x}{e^{x-1}}+\frac{1}{e^{x-1}}-x\right)\right]$$
$$= -\infty$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x}{e^{x-1}}\right] = 0$

- جدول تغيرات $f(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |

4) أ/ تبيين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = 2x+1$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ بجوار $-\infty$ :

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to-\infty}[2x+1-xe^{x-1}-2x-1]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[-xe^{x-1}]$$
$$= 0$$

ومنه $(\Delta)$ مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$

ب/ دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ :

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y$:

$$f(x)-y = -xe^{x-1}$$

لدينا $e^{x-1} > 0$ ومنه الإشارة من $(-x)$ :

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | $+$ | $0$ | $-$ |

- **الوضعية:**

- $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ لما : $x < 0$ .
- $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة ذات الاحداثيات: $(0;1)$
- $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ لما : $x > 0$ .

5) أ/ تبيين أن المنحني $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي المستقيم $(\Delta)$:

المستقيم $(T)$ يوازي المستقيم $(\Delta)$ معناه:

$$f'(a) = 2 \Rightarrow 2-(1+a)e^{a-1} = 2$$
$$\Rightarrow -(1+a)e^{a-1} = 0$$
$$\Rightarrow -(1+a) = 0$$
$$\Rightarrow a = -1$$

ومنه:

$$(T): y = f'(-1)\big(x-(-1)\big) + f(-1)$$
$$= 2x + 2 + 2(-1) + 1 - (-1)e^{-1-1}$$
$$= 2x + 1 + e^{-2}$$

إذن معادلة المماس $(T)$ هي :

$$y = 2x + 1 + e^{-2}$$

ب/ تبيين أن المنحني $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما $\alpha$ و $\beta$ :

لدينا الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على مجال تعريفها

ولدينا: $f(1.9) \times f(2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]1.9;2[$

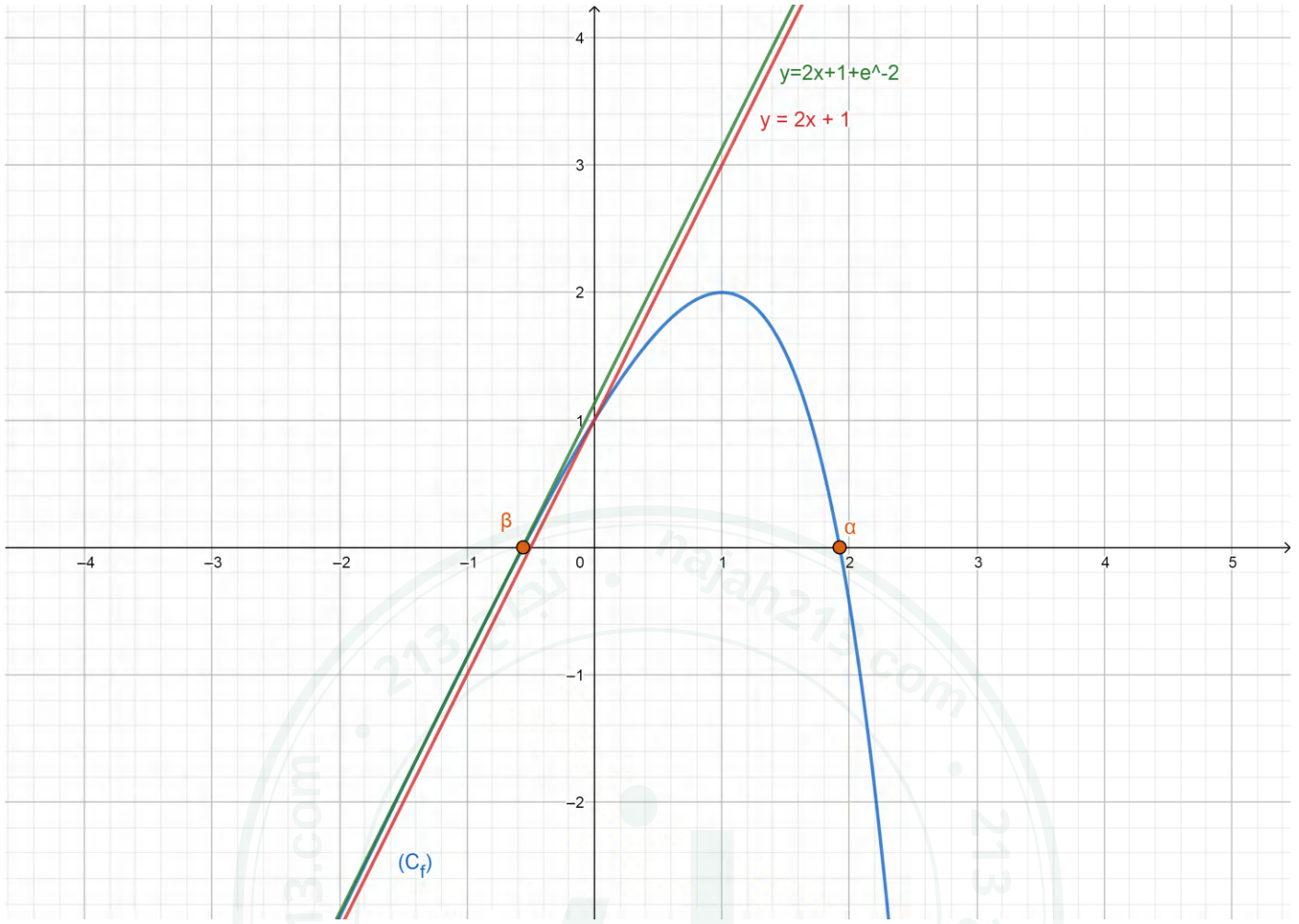
ولدينا: $f(-0.6) \times f(-0.5) <$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ في المجال $]-0.6;-0.5[$

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نعين $\alpha$ و $\beta$ نقط تقاطع المنحني $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل.
- نرسم المستقيم المقارب المائل : $(y = 2x + 1)$.
- نرسم المماس $(T)$ .
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم $(C_f)$




## 7) المناقشة البيانية:

لدينا: من المعادلة $(E)$ : $m \in \mathbb{R}_+^*$

حلول المعادلة $(E)$ هي فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع المستقيمات ذات المعادلة $y = 2x + \ln m$

ومنه:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| لما | $\ln m < 1$ | أي | $m < e$ | أي | $m \in ]0; e[$ | المعادلة تقبل حل وحيد موجب |
| لما | $\ln m = 1$ | أي | $m = e$ | | | المعادلة تقبل حل وحيد معدوم |
| لما | $1 < \ln m < 1 + e^{-2}$ | أي | $e < m < e^{1+e^{-2}}$ | أي | $m \in ]e; e^{1+e^{-2}}[$ | المعادلة تقبل حلين سالبين |
| لما | $\ln m = 1 + e^{-2}$ | أي | $m = e^{1+e^{-2}}$ | | | المعادلة تقبل حل مضاعف |
| لما | $\ln m > 1 + e^{-2}$ | أي | $m > e^{1+e^{-2}}$ | أي | $m \in ]e^{1+e^{-2}}; +\infty[$ | المعادلة لا تقبل حلول |

الخليل للرياضيات

najah213.com · نجاح 213

# 07 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**(I)**

**1) دراسة تغيرات الدالة $g'$ :**

- **النهايات:**

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[(2x+1)e^x - 1] = -1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}[(2x+1)e^x - 1] = +\infty$

- **التفسير الهندسي للنهايات:**

- منحنى الدالة $g$ يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$

- **حساب $g'(x)$ :**

$$g'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x$$
$$= (2x+3)e^x$$

لدينا $e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2x+3)$ :

$$2x+3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

- **جدول تغيرات $g(x)$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-1$ | ↘ | $f\left(\frac{-3}{2}\right)$ | ↗ | $+\infty$ |

**2) حساب $g(0)$ :**

$$g(0) = (2(0)+1)e^0 - 1 = 0$$

- **استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**(II)**

**1) حساب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها:**

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[x(e^x-1)^2] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}[x(e^x-1)^2] = +\infty$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

2) أ/ تبيين أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحي $(C_f)$ عند $-\infty$ :

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to-\infty}[x(e^x-1)^2-x]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[xe^{2x}+x-2xe^x-x]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[xe^x(e^x-2)]$$
$$= 0$$

لأن $\lim_{x\to-\infty}[xe^x] = 0$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين المنحني $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ :

دراسة إشارة الفرق $(f(x)-y)$ :

$$f(x)-y = xe^x(e^x-2)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} xe^x = 0 \\ e^x-2=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^x = 2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \ln 2 \end{cases}$$

ومنه:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $xe^x$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | |
| $e^x-2$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $f(x)-y$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | |

- الوضعية:

- $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ لما: $x \in ]-\infty;0[ \cup ]\ln 2;+\infty[$ .
- $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطتين $A(0;0)$ و $B(\ln 2;\ln 2)$ .
- $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ لما: $x \in ]0;\ln 2[$ .

3) أ/ تبيين أنه يوجد من أجل كل عدد حقيقي $x$ $f'(x) = (e^x-1)g(x)$ :

$$f'(x) = (e^x-1)^2+2xe^x(e^x-1)$$
$$= (e^x-1)(e^x-1+2xe^x)$$
$$= (e^x-1)(e^x(2x+1)-1)$$
$$= (e^x-1)g(x)$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ في إشارة $(e^x-1)$

$$e^x-1=0 \Rightarrow e^x = 1$$
$$\Rightarrow x = \ln 1$$
$$\Rightarrow x = 0$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

- جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $e^x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

### 4) كتابة معادلة ديكارتية للمماس $(T)$ عند المبدأ:

لدينا معادلة المماس تكتب من الشكل:

$$(T): y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

المماس يمر من المبدأ معناه:

$$\begin{aligned}
&f'(a)(0-a)+f(a)=0\\
&\Rightarrow -a(e^a-1)g(a)+a(e^a-1)=0\\
&\Rightarrow a(e^a-1)[-g(a)+(e^a-1)]=0\\
&\Rightarrow a(e^a-1)[-(2a+1)e^a+1+e^a-1]=0\\
&\Rightarrow a(e^a-1)[-2ae^a-e^a+1+e^a-1]=0\\
&\Rightarrow -2a^2(e^a-1)e^a=0\\
&\Rightarrow \begin{cases}-2a^2=0\\ e^a-1=0\end{cases}\\
&\Rightarrow \begin{cases}a=0\\ e^a=1\end{cases}\\
&\Rightarrow \begin{cases}a=0\\ a=\ln 1\end{cases}\\
&\Rightarrow a=0
\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
(T): y &= f'(0)x+f(0)\\
y &= 0x+0\\
y &= 0
\end{aligned}$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مماس للمنحني $(C_f)$ .

### 5) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

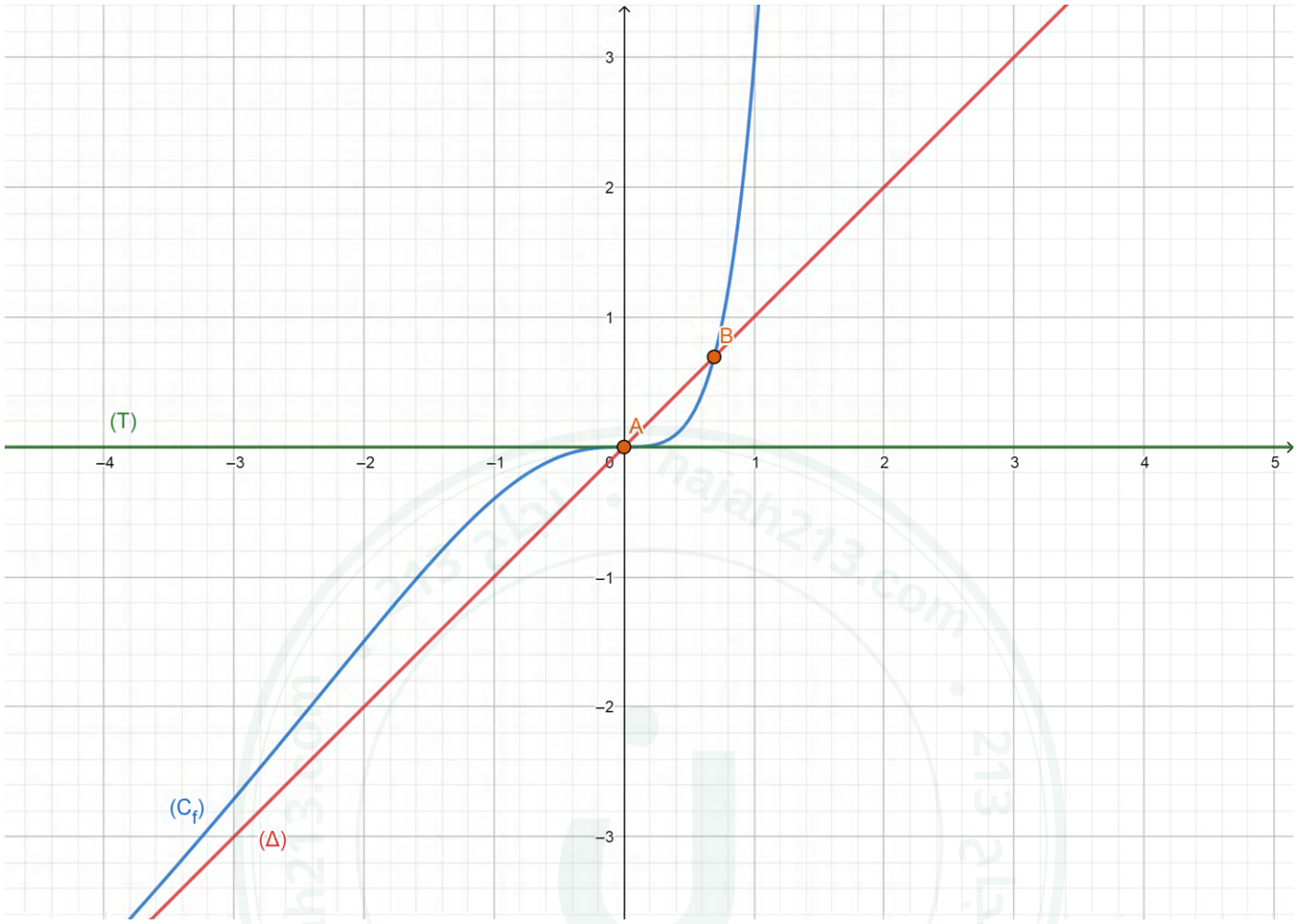
- نرسم المستقيم المقارب المائل $(\Delta): (y=x)$.
- نعين $A$ و $B$ نقط تقاطع المنحني $(C_f)$ مع المستقيم. $(\Delta)$
- نرسم المماس $(T)$ .



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم $(C_f)$




6) المناقشة البيانية:

حلول المعادلة $f(x) = mx$ هل فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع المستقيمات ذات المعادلة: $y_m = mx$

لما $m = 0$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو $x = 0$

لما $0 < m < 1$ المعادلة تقبل ثلاث حلول

لما $m \geq 0$ المعادلة تقبل حلان: حل موجب وحل معدوم

لما $m < 0$ المعادلة تقبل حلا معدوما



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

# 08 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

1) أ/ تبيين أنه من اجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $1-\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{e^{-x}+1}$ :

$$1-\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^x+1-1}{e^x+1}$$
$$=\frac{e^x}{e^x+1}\times\frac{e^{-x}}{e^{-x}}$$
$$=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

ب/ استنتاج أن الدالة $f$ فردية:

$$f(-x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{-x}+1}$$
$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{e^{-x}+1}-\frac{1}{e^{-x}+1}$$
$$=1+\frac{1}{2}x-1+\frac{1}{e^x+1}-1+\frac{1}{e^x+1}$$
$$=-1+\frac{1}{2}x+\frac{2}{e^x+1}$$
$$=-\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\right)$$
$$=-f(x)$$

إذن الدالة $f$ فردية

2) حساب نهايات الدالة $f$ عند أطرف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=-\infty$

3) أ/ تبيين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ :

$$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{-(e^x+1)^2+4e^x}{2(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{-e^{2x}-1-2e^x+4e^x}{2(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{-e^{2x} - 1 + 2e^{x}}{2(e^{x}+1)^{2}}$$
$$= \frac{-(e^{2x} + 1 - 2e^{x})}{2(e^{x}+1)^{2}}$$
$$= \frac{-(e^{x} - 1)^{2}}{2(e^{x}+1)^{2}}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2}$$

**دراسة إشارة $f'(x)$ :**

لدينا $-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2} \leq 0$ ولدينا: $f'(0) = 0$ ومنه:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ |

**ب/ الاستنتاج:**

المشتقة الأولى انعدمت ولم تغير اشارتها إذن المنحني $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف احداثياتها $O(0;0)$

**ج/ جدول تغيرات الدالة $f$ :**

لدينا: $f(0) = 0$ ومنه:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $0$ | ↘ $-\infty$ |

**4) أ/ تبيين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)\right] = 0$ :**

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^{x}+1} + \frac{1}{2}x - 1\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{e^{x}+1}\right]$$
$$= 0$$

- **التفسير الهندسي:**

$(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته: $y = -\frac{1}{2}x + 1$

**ب/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) + \frac{1}{2}x + 1\right]$ :**

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) + \frac{1}{2}x + 1\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^{x}+1} + \frac{1}{2}x + 1\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2 - \frac{2}{e^{x}+1}\right]$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$= 2 - 2 = 0$$

- التفسير الهندسي:

$(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته: $y = -\frac{1}{2}x - 1$

5) دراسة الوضع النسبي بين المنحني $(C_f)$ والمستقيم $(d)$ ذو المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + 1$ :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1} + \frac{1}{2}x - 1$$
$$= \frac{-2}{e^x + 1}$$

لدينا: $(e^x + 1) > 0$ ومنه :

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x) - y$ | $-$ |
| الوضعية | $(C_f)$ تحت $(d)$ |

6) التمثيل البياني:

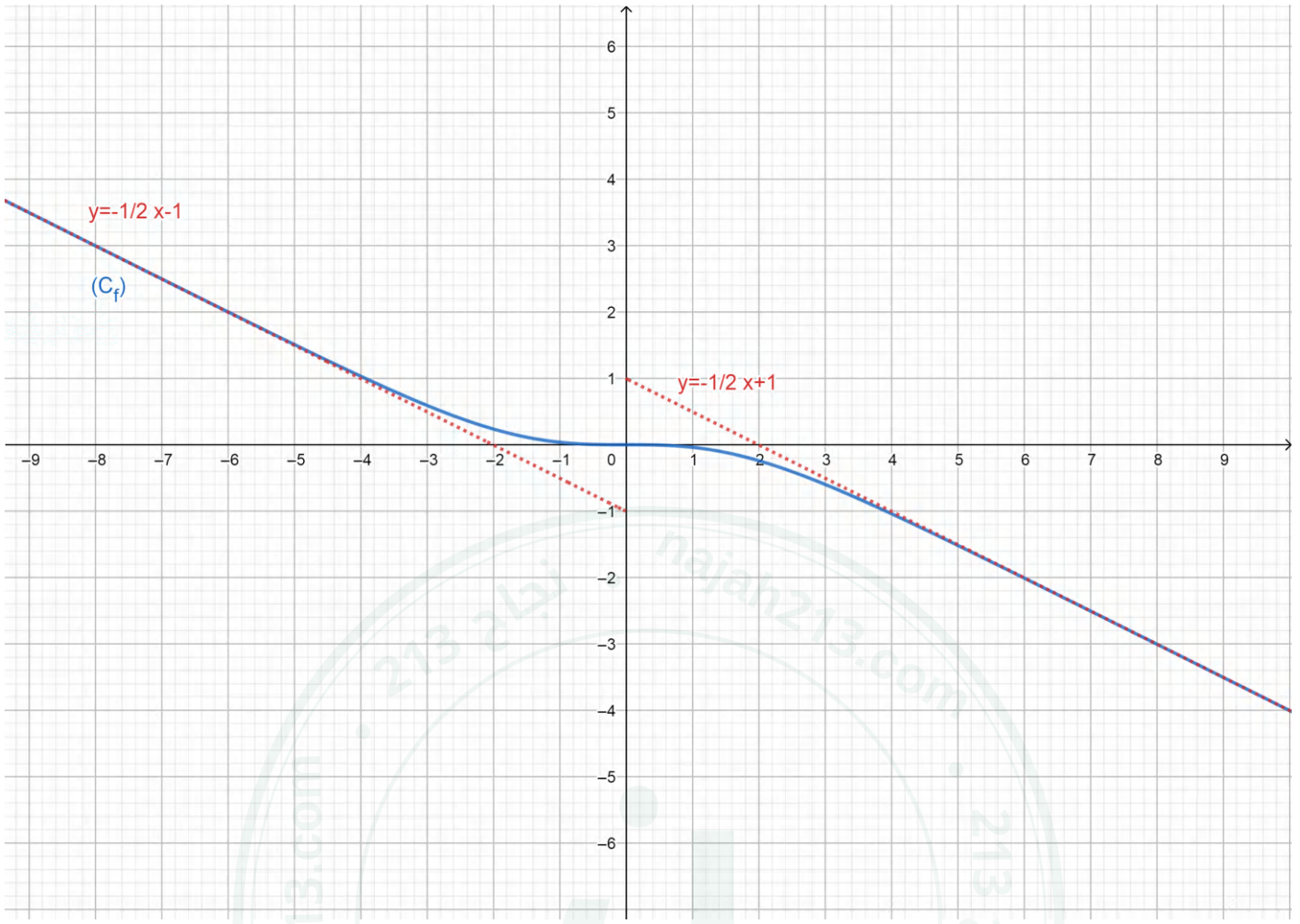
خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة المائلة : $\left(y = -\frac{1}{2}x - 1\right)$ و $\left(y = -\frac{1}{2}x + 1\right)$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم $(C_f)$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com






فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

# حل المسألة الشاملة رقم: 09

مشاهـــدة المسألة

1) تبيين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=-\infty$ :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right]=+\infty$

لأن:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}[x-2]=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}[e^x]=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{5}{2}\right]=+\infty\end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right]=-\infty$

لأن:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{5}{2}\right]=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}[x-2]=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{x-2}\right]=-\infty\end{cases}$$

2) أ/ تبيين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=-x+\frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحني $(C_f)$ .

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)+x-\frac{5}{2}\right]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right]=0$$

ومنه المستقيم $(\Delta)$ مقارب مائل بجوار $-\infty$ .

ب/ حل المعادلة : $e^{x-2}-4=0$ :

$$e^{x-2}-4=0\Rightarrow e^{x-2}=4$$
$$\Rightarrow x-2=\ln 4$$
$$\Rightarrow x=\ln 4+2$$

- تبيين أن المنحني $(C_f)$ يقع فوق المستقيم $(\Delta)$ على المجال $]2+\ln 4\,;+\infty[$ وتحته على المجال $]-\infty;2+\ln 4[$:

دراسة إشارة الفرق $(f(x)-y)$ :

الخليل للرياضيات

$$f(x)-y=-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)+x-\frac{5}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)$$

لدينا $-\frac{1}{2}e^{x-2}<0$ ولدينا:

$$e^{x-2}-4=0\Rightarrow x=\ln 4+2$$

ومنه:

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln 4+2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{2}e^{x-2}$ | $-$ | | $-$ | | |
| $e^{x-2}-4$ | $-$ | $0$ | | $+$ | |
| $f(x)-y$ | $+$ | $0$ | | $-$ | |

- الوضعية:
  - $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ لما: $x\in\left]-\infty;2+\ln 4\right[$
  - $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة ذات الفاصلة $2+\ln 4$
  - $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ لما: $x\in\left]2+\ln 4;+\infty\right[$

3) أ/ تبيين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-(e^{x-2}-1)^2$:

$$f'(x)=-1-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)-\frac{1}{2}e^{2(x-2)}$$
$$=-\left(1+\frac{1}{2}e^{2(x-2)}-2e^{x-2}+\frac{1}{2}e^{2(x-2)}\right)$$
$$=-\left(1+e^{2(x-2)}-2e^{x-2}\right)$$
$$=-(e^{x-2}-1)^2$$

ب/ جدول تغيرات الدالة $f$ :

لدينا $f'(x)\leq 0$

ولدينا:

$$f'(x)=0\Rightarrow -(e^{x-2}-1)^2=0$$
$$\Rightarrow (e^{x-2}-1)^2=0$$
$$\Rightarrow e^{x-2}-1=0$$
$$\Rightarrow e^{x-2}=1$$
$$\Rightarrow x-2=0$$
$$\Rightarrow x=2$$

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | | $-\infty$ |



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

4) حساب $f''(x)$ :

$$f''(x) = -2e^{x-2}(e^{x-2} - 1)$$

دراسة $f''(x)$ :

لدينا $-2e^{x-2} < 0$

ولدينا:

$$e^{x-2} - 1 = 0 \Rightarrow x = 2$$

ومنه:

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2e^{x-2}$ | | $-$ | $0$ | $-$ | |
| $e^{x-2} - 1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

المشتقة الثانية انعدمت وغيرت اشارتها معناه أن المنحني $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف فاصلتها 2

5) اثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$:

لدينا الدالة $f$ رتيبة ومستمرة على مجال تعريفها

ولدينا: $f(2 + \ln 4) = -0.83$ و $f(2 + \ln 3) = 0.93$

ولدينا: $f(2 + \ln 4) \times f(2 + \ln 3 < 0)$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]2 + \ln 3 ; 2 + \ln 4[$

6) التمثيل البياني:

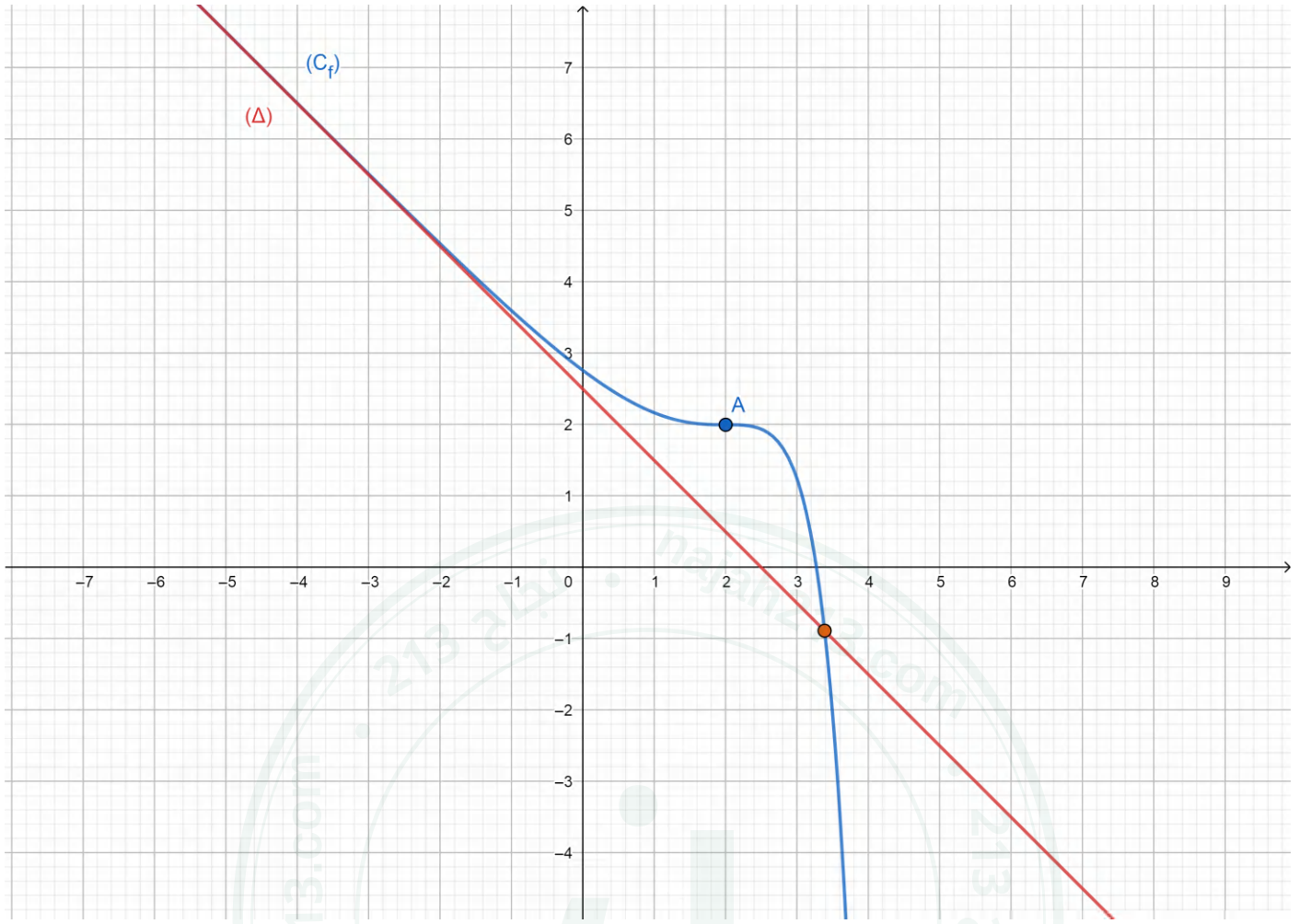
خطوات التمثيل على معلم متعامد و$(C_f)$ متجانس:

- نرسم المستقيم المقارب المائل $(\Delta)$: $\left(y = -\frac{1}{2}x - 1\right)$
- نعين نقطة تقاطع المنحني $(C_f)$ مع المقارب $(\Delta)$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم $(C_f)$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com






فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# 10 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

**(I)**

1) دراسة تغيرات الدالة $g$ على $\mathbb{R}$ :

- النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[e^x + x + 2] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}[e^x + x + 2]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right)\right]$$

$$= +\infty$$

- حساب $g'(x)$ :

$$g'(x) = e^x + 1$$

لدينا: $g'(x) > 0$ :

ومنه:

- جدول تغيرات $g'(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

2) أ/ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $\mathbb{R}$ :

لدينا الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $g(-2.2) = -0.08$ و $g(-2.1) = 0.02$

ولدينا: $g(-2.2) \times g(-2.1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-2.2 < \alpha < -2.1$

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**(II)**

1) أ/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$ :

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1-xe^x}{e^x+1}\right] = \frac{1}{1} = 1$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}[xe^x] = 0$

- **التفسير الهندسي:**

$(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 1$ بجوار $-\infty$ .

ب/ تبيين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{e^{-x}-x}{e^{-x}+1}$ :

$$f(x) = \frac{1-xe^x}{e^x+1}$$
$$= \frac{e^x\left(\frac{1}{e^x}-x\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$$
$$= \frac{\frac{1}{e^x}-x}{\frac{1}{e^x}+1}$$
$$= \frac{e^{-x}-x}{e^{-x}+1}$$

- حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]$ :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{-x}-x}{e^{-x}+1}\right] = -\infty$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{e^x}\right] = 0$

2) التحقق أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{-g(x)e^x}{(e^x+1)^2}$ :

$$f'(x) = \frac{(-e^x-xe^x)(e^x+1)-e^x(1-xe^x)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-e^x(1+x)(e^x+1)-e^x(1-xe^x)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x[-(1+x)(e^x+1)-(1-xe^x)]}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x[-e^x-1-xe^x-x-1+xe^x]}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-e^x[e^x+x+2]}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-g(x)e^x}{(e^x+1)^2}$$

3) دراسة تغيرات الدالة $f$ :

لدينا $e^x > 0$ و $(e^x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

- **جدول تغيرات $f(x)$ :**



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $1$ | $f(\alpha)$ ↗ ↘ | $-\infty$ |

4) أ/ تبيين أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-xe^x}{e^x+1}-x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-xe^x+xe^x+x}{e^x+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+x}{e^x+1}\right]$$
$$= 0$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right] = 0$

ومنه المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ $(C_f)$

ب/ ادرس الوضع النسبي بين $(\Delta)$ و $(C_f)$ :

- دراسة إشارة الفرق $(f(x)-y)$

$$f(x)-y = \frac{1+x}{e^x+1}$$

لدينا: $(e^x+1) > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط:

$$1+x = 0 \Rightarrow x = -1$$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | $-$ | $0$ | $+$ |

- الوضعية:

- $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ لما $x \in ]-\infty;-1[$ .
- $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة $A(-1;-1)$
- $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ لما $x \in ]-1;+\infty[$ .

5) أ/ تبيين أن: $f(\alpha) = -(\alpha+1)$ :

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow e^\alpha + \alpha + 2 = 0$$
$$\Rightarrow e^\alpha = -(\alpha+2)$$

ولدينا:

$$f(\alpha) = \frac{1-\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1}$$
$$= \frac{1+\alpha(\alpha+2)}{-(\alpha+2)+1}$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$$= \frac{\alpha^2 + 2a + 1}{-(\alpha + 1)}$$
$$= \frac{(\alpha + 1)^2}{-(\alpha + 1)}$$
$$= -(\alpha + 1)$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$-2.2 < \alpha < -2.1$$
$$-1.2 < \alpha + 1 < -1.1$$
$$1.1 < -(\alpha + 1) < 1.2$$

اذن:

$$1.1 < f(\alpha) < 1.2$$

ب/ تبيين أن المنحني $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\beta$ حيث: $0.5 < \beta < 0.6$ :

لدينا الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $f(0.6) = -0.03$ و $f(0.5) = 0.06$

ولدينا: $f(0.4) \times f(0.6) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا $\beta$ في المجال $]0.5; 0.6[$

ومنه المنحني $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة $\beta$ .

6) التمثيل البياني:

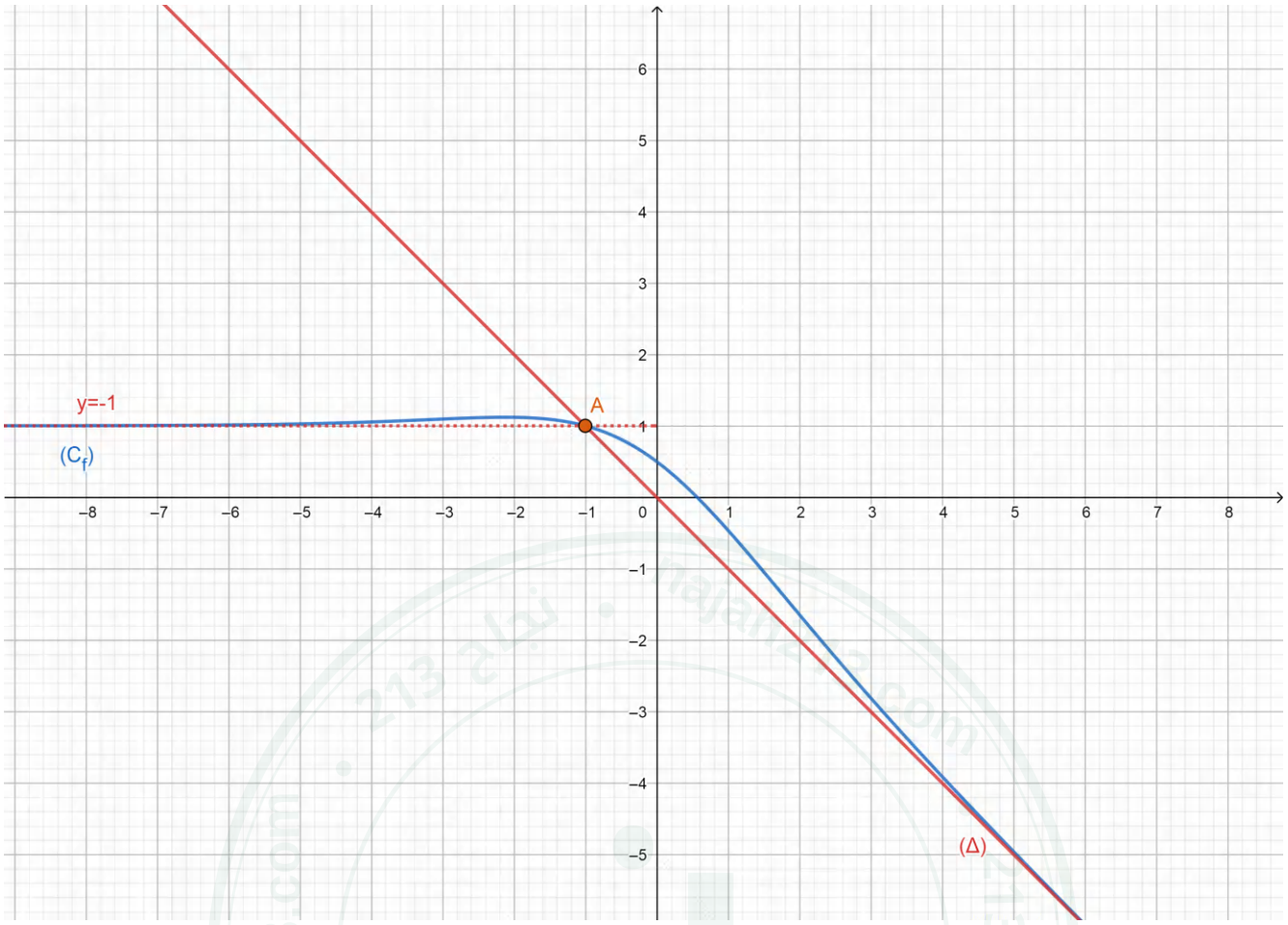
خطوات التمثيل على معلم متعامد و$(C_f)$ متجانس:

- نرسم المستقيم المقارب: $(y = -1)$
- نرسم المستقيم المقارب المائل $(\Delta)$: $(y = -x)$
- نعين $A$ نقطة تقاطع المنحني $(C_f)$ مع المقارب $(\Delta)$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم $(C_f)$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com




## 7) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\ln m + (x + \ln x)e^x - 1 = 0 \Rightarrow \ln m + xe^x + e^x \ln m - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \ln m\,(1 + e^x) = 1 - xe^x$$
$$\Rightarrow \ln m = \frac{1 - xe^x}{1 + e^x}$$
$$\Rightarrow f(x) = \ln m$$

ومنه مجموعة الحلول هي فواصل نقط تقاطع المنحني $(C_f)$ مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = \ln m$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| لما | $\ln m < \frac{1}{2}$ | أي | $m < \sqrt{e}$ | المعادلة تقبل حل وحيد موجب |
| لما | $\ln m = \frac{1}{2}$ | أي | $m = \sqrt{e}$ | المعادلة تقبل حل وحيد معدوم |
| لما | $\frac{1}{2} < \ln m < 1$ | أي | $\sqrt{e} < m < e$ | المعادلة تقبل حل وحيد سالب |
| لما | $1 < \ln m < f(\alpha)$ | أي | $e < m < e^{f(\alpha)}$ | المعادلة تقبل حلان سالبان |
| لما | $\ln m = f(\alpha)$ | أي | $m = e^{f(\alpha)}$ | المعادلة تقبل حل مضاعف سالب |
| لما | $\ln m > f(\alpha)$ | أي | $m > e^{f(\alpha)}$ | المعادلة لا تقبل حلول |

# حل المسألة الشاملة رقم: 11

مشاهـــدة المسألة

**(I)**

**1) ايجاد عبارة $g(x)$ بدلالة $x$ :**

نضع: $x = t$ نجد:

$$g(t) - 2g(1-t) = e^t - 2e^{1-t} - 3t + 3$$
$$\Rightarrow -2g(1-t) = -g(t) + e^t - 2e^{1-t} - 3t + 3$$
$$\Rightarrow \boxed{2g(1-t) = g(t) - e^t + 2e^{1-t} + 3t - 3} \dots (1)$$

نضع : $t = 1 - x$ معناه: $x = 1 - t$ ، نجد:

$$g(1-t) - 2g(1-1+t) = e^{1-t} - 2e^{1-1+t} - 3(1-t) + 3$$
$$\Rightarrow g(1-t) - 2g(t) = e^{1-t} - 2e^t + 3t$$
$$\Rightarrow \boxed{2g(1-t) - 4g(t) = 2e^{1-t} - 4e^t + 6t} \dots (2)$$

نعوض المعادلة (1) في المعادلة (2) نجد:

$$g(t) - e^t + 2e^{1-t} + 3t - 3 - 4g(t) = 2e^{1-t} - 4e^t + 6t$$
$$-e^t - 3 = -4e^t$$

$$\Rightarrow -3g(t) = -3e^t + 3t + 3$$
$$\Rightarrow g(t) = e^t - t - 1$$

إذن :

$$g(x) = e^x - x - 1$$

**2)**

**أ/ حساب نهايات الدالة $g$ عند أطراف مجموعة تعريفها:**

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[e^x - x - 1] = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)\right] = +\infty$

**ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة $g$ :**

لدينا:

$$g'(x) = e^x - 1$$

ولدينا:

$$g'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow e^x = 1$$
$$\Rightarrow x = 0$$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

ومنه جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

3) استنتج اتجاه تغير الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = 1 - g(-x)$

من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: نضع:

$u(x) = -x$ و $v(x) = g\big(u(x)\big) = g(-x)$ أي $v(x) = (g \circ u)(x)$

لدينا الدالة $g$ متناقصة على المجال $\underbrace{]-\infty; 0]}_{I}$ والدالة $u$ متناقصة على المجال $\underbrace{[0; +\infty[}_{g(I)}$

كيف وجدنا المجال $g(I)$:

لدينا: $I = ]-\infty; 0]$ و $u(x) \in I$ معناه $u(x) \leq 0$ أي $-x \leq 0$ ومنه $x \geq 0$ أي $x \in [0; +\infty[$

ومنه: $g(I) = [0; +\infty[$.

وبما أنّ الدالة $g$ متناقصة على $]-\infty; 0]$ و الدالة $u$ متناقصة على $[0; +\infty[$

إذن الدالة $k$ متزايدة على المجال $[0; +\infty[$

بنفس الفكرة نجد: الدالة $k$ متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$

- واضح أن $g(-x) = k(x)$ أي: $-g(-x) = -k(x)$

وعليه:

$-k(x)$ متزايدة على المجال $]-\infty; 0]$ و متناقصة على المجال $[0; +\infty[$

ولدينا $h(x)$ و $-k(x)$ لهما نفس اتجاه التغير لأن: $h(x) = 1 - k(x)$

اذن:

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $0$ | ↗ | $h(0) = 1$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

4) اثبات أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$:

لدينا الدالة $h$ مستمرة ورتيبة على مجال تعريفها

ولدينا: $h(-1.14) = 0.01$ و $h(-1.15) = -0.08$

ولدينا: $h(-1.14) \times h(-1.15) < 0$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-1.15; -1.14[$

ولدينا: $h(1.85) = -0.007$ و $h(1.84) = 0.001$

ولدينا: $h(1.84) \times h(1.85) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ في المجال $]1.84; 1.85[$

اذن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$

5) استنتاج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي $x$ :

إشارة $g(x)$:

من جدول تغيرات $g(x)$ لدينا:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ | | |

إشارة $h(x)$ :

من جدول تغيرات $h(x)$ لدينا:

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $-$ | $0$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

**(II)**

1) حساب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x+g(x)}{1+g(x)}\right]$
$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x+e^x-x-1}{1+e^x-x-1}\right]$
$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{e^x-1}{e^x-x}\right]$
$= \dfrac{-1}{+\infty}$
$= 0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x+g(x)}{1+g(x)}\right]$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{e^x-1}{e^x-x}\right]$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1-\frac{1}{e^x}}{1-\frac{x}{e^x}}\right]$
$= 1$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right]=0$

- التفسير الهندسي:

- $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته $y=0$ .
- $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y=1$ .

2) أ/ اثبات أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ :

$$f(x)=\frac{x+g(x)}{1+g(x)}$$

لدينا البسط عبارة عن مجموعة دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والمقام كذلك

ومنه البسط على المقام قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$ .

اذن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ .

- اثبات أن: $f'(x)=\frac{e^x h(x)}{(1+g(x))^2}$ :

لدينا:

$$\begin{aligned}h(x)&=1-g(-x)\\&=1-e^{-x}-x+1\\&=2-x-e^{-x}\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}\\&=\frac{e^x[e^x-x-(1-e^{-x})(e^x-1)]}{(e^x-x+1-1)^2}\\&=\frac{e^x(e^x-x-e^x+1+1-e^{-x})}{(1+g(x))^2}\\&=\frac{e^x(2-x-e^{-x})}{(1+g(x))^2}\\&=\frac{e^x h(x)}{(1+g(x))^2}\end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ :

لدينا: $(1+g(x))^2>0$ و $e^x>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$ .

ولدينا $f(0)=0$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

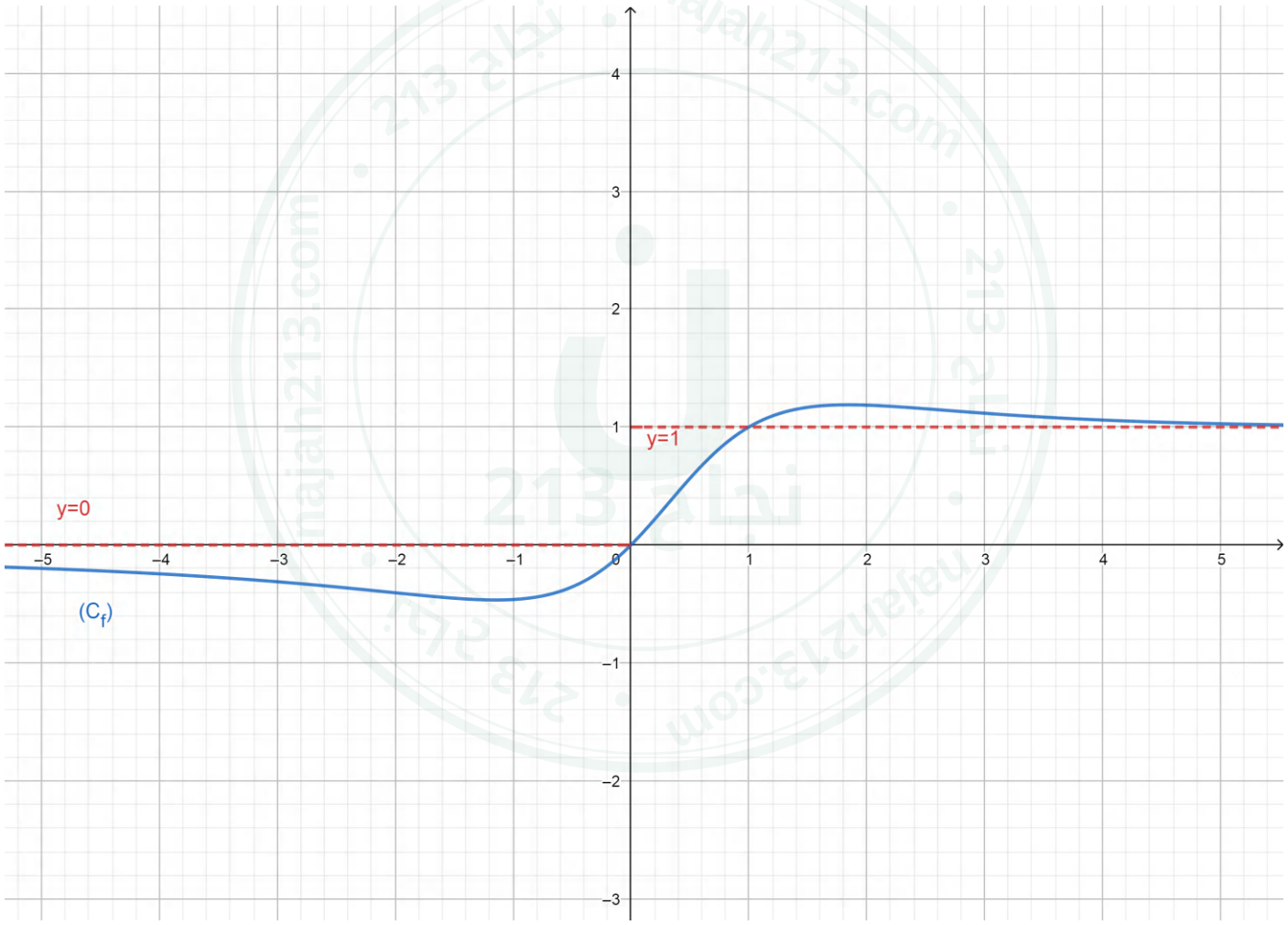
- جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $0$ | ↗ | $f(\beta)$ | ↘ | $1$ |

### 3) التمثيل البياني:

**خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:**

- نرسم المستقيمات المقاربة $y = 0$ و $y = 1$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم $(C_f)$




الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

# حل المسألة الشاملة رقم: 12

مشاهـــدة المسألة

لتكن الدالة $f$ بـ:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

ونسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$ .

1) تعيين مجموعة تعريف الدالة $f$ :

الدالة $f$ معرفة لما : $e^x + 1 \neq 0$

ولدينا $e^x + 1 > 0$

ومنه الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}$

2) أ/ حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x)]$ :

$$\bullet \lim_{x \to -\infty} [f(x)] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{e^x}{e^x + 1}\right] = 0$$

- التفسير الهندسي: $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y = 0$ .

ب/ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ $f(x) = \frac{1}{e^{-x}+1}$ :

لدينا:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

ج/ حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} [x]$ :

$$\lim_{x \to +\infty} [x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e^x}{e^x + 1}\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{1 + e^{-x}}\right] = 1$$

- التفسير الهندسي: $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 1$ .



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

3) اثبات أن الدالة $f$ متزايدة تماما:

- حساب $f'(x)$ :

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

- جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $1$ |

4) تبيين أن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر المنحني $(C_f)$ :

◄ شاهد هذا التذكير ►
(اثبات ان نقطة مركز تناظر)

- نبيّن أن $(2(0)-x) \in D_f$ :

واضح أن $(-x) \in \mathbb{R}$

- نبيّن أن $f(2(0)-x)+f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)$ :

$$f(2(0)-x)+f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$
$$= \frac{e^x(e^{-x}+1)+e^{-x}(e^x+1)}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}$$
$$= \frac{1+e^x+1+e^{-x}}{1+e^x+e^{-x}+1}$$
$$= \frac{2}{2}$$
$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

5) تعيين معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(C_f)$ عند النقطة $A$ :

$$(T): y = f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$= \frac{e^0}{(e^0+1)^2}x + \frac{e^0}{e^0+1}$$
$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

الخليل للرياضيات



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

6)

أ/ تحليل العبارة: $e^{2x} - 2e^x + 1$ :

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x - 1)^2$$

ب/

$$\bullet\ g'(x) = \frac{1}{4} - f'(x)$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{(e^x+1)^2 - 4e^x}{4(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x - 4e^x}{4(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^{2x} + 1 - 2e^x}{4(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{(e^x-1)^2}{4(e^x+1)^2}$$

ولدينا:

$$\bullet\ g(0) = 0$$

- دراسة تغيرات الدالة $g$ :

حساب نهايات الدالة $g$ عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet\ \lim_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right] - \lim_{x\to-\infty}[f(x)]$$
$$= -\infty$$

$$\bullet\ \lim_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right] - \lim_{x\to+\infty}[f(x)]$$
$$= +\infty$$

لدينا: $g'(x) \geq 0$

ولدينا:

$$(e^x - 1)^2 = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow e^x = 1$$
$$\Rightarrow x = 0$$

ومنه:

- جدول التغيرات:



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

ج/ استنتاج الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ والمماس $(T)$ :

لدينا:

$$g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$$
$$\Rightarrow f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) = -g(x)$$

ومنه الوضعية من إشارة $-g(x)$ :

لدينا من جدول تغيرات الدالة $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

- الوضعية:

- $(C_f)$ تحت $(T)$ لما $x \in ]-\infty; 0[$ .
- $(C_f)$ يقطع $(T)$ في النقطة $A$ .
- $(C_f)$ فوق $(T)$ لما $x \in ]0; +\infty[$ .

7) التمثيل البياني:

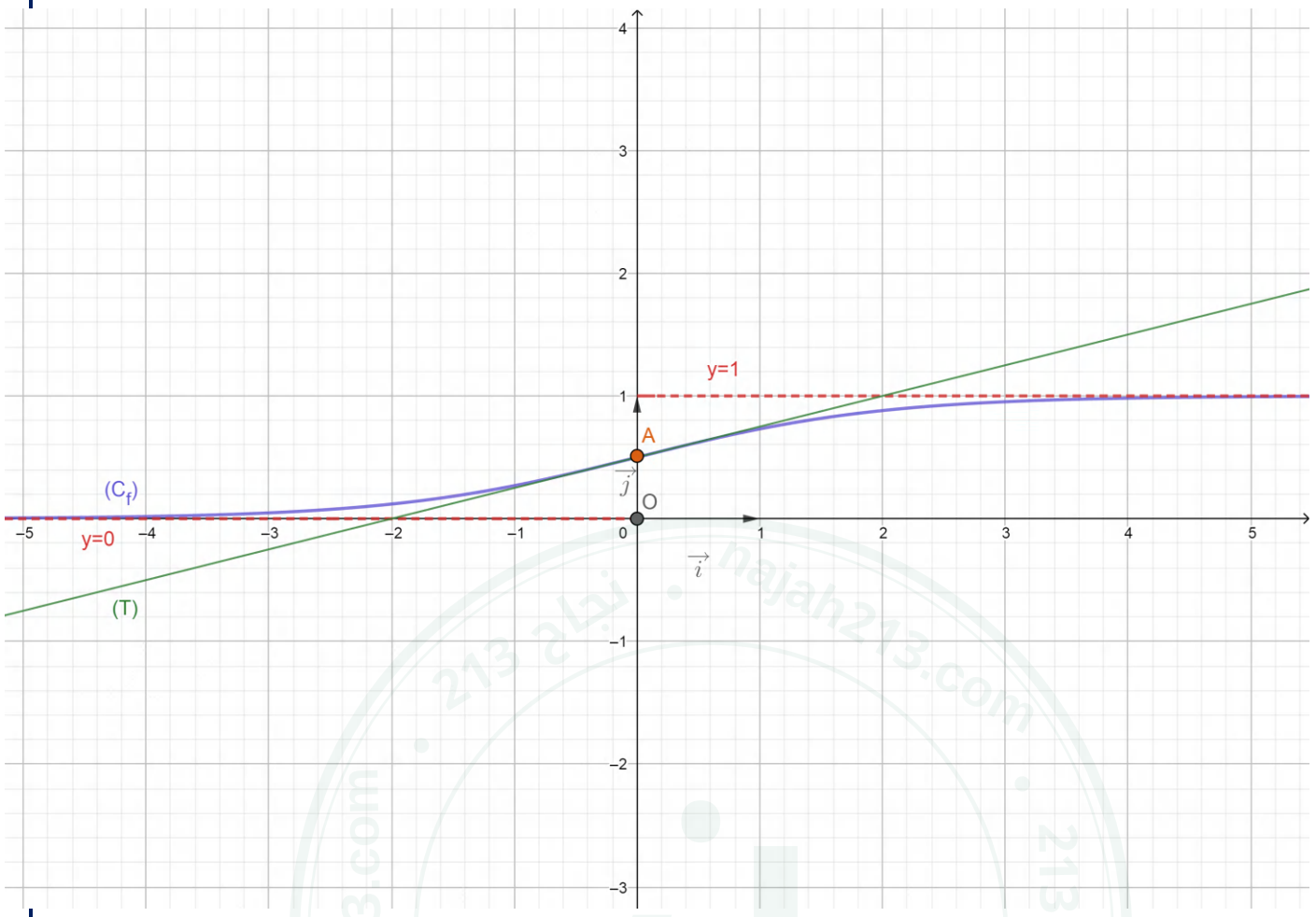
خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة $y = 0$ و $y = 1$
- نعين $A$ نقطة تقاطع $(C_f)$ مع $(T)$
- نرسم المماس $(T)$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم $(C_f)$



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com






فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com