najah213.com · نجاح 213

الاحتمالات ملخص و تمارين لجميع الشعب العلمية

01 معارف أولية و قوانين أساسية:

01 - التجربة العشوائية: نسمي تجربة عشوائية كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة Ω.

مثال01: رمي زهر نرد غير مزيف مرقم من 1 إلى 6 ،

تجربة عشوائية مجموعة النتائج الممكنة هي: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

02 - الحوادث أو الأحداث :

تعريف: كل جزء A من مجموعة الإمكانيات Ω يسمى حدث أو حادثة .

أ- أنواع الحوادث:

- **الحدث الأولي:** إذا احتوى الجزء A عنصرا واحدا فقط يسمى حدث أولي: " حادثة أولية ".
- **الحدث الأكيد:** مجموعة الإمكانيات Ω يسمى أيضا الحدث الأكيد .
- **الحدث المستحيل:** $\varnothing$ تسمى الحدث المستحيل أي جزء خالي .
- **الحدث العكسي:** A حدث من Ω و $\overline{A}$ الحدث العكسي له و الذي يحوي كل عناصر Ω والتي غير مجودة في A .

أمثلة : حسب المثال01 السابق نعتبر الأحداث التالية :

الحدث A : " الأرقام الفردية " أي $A=\{1;3;5\}$.

الحدث B : " الحصول رقم مضاعف لـ4 " أي $B=\{4\}$. حدث أولي

الحدث C : "الحصول رقم اكبر من 7 " أي $C=\varnothing$. حدث مستحيل.

الحدث $\overline{A}$: " الحصول على الأرقام الزوجية " أي $\overline{A}=\{2,4,6\}$.

أ- العمليات على الأحداث أو الحوادث: A و B حدثين من Ω

- **تقاطع حدثين :** هي حدث نرمز له بـ $A\cap B$ عناصرها هي العناصر المشتركة بين الحدثين A و B .
- **تقاطع حدثين :** هي حدث نرمز له بـ $A\cup B$ عناصرها هي عناصر A أو B .
- **حدثين غير متلائمين:** إذا كان $A\cap B=\varnothing$ عناصرها نقول عندئذ أن A و B غير متلائمتين .

ملاحظة : حرف **و** معناه التقاطع $\cap$ و يعني أيضا **الجداء** .
كلمة **أو** معناه الاتحاد $\cup$ و يعني أيضا **الجمع** .

مثال : نرمي زهر نرد غير مزيف مرقم من 1 الى 6

مجموعة الإمكانيات $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$

الحادثة A : الحصول على رقم أكبر من 3 أي : $A=\{4;5;6\}$

الحادثة B : الحصول على رقم فردي أي $B=\{1;3;5\}$

الحادثة $A\cap B$: الحصول على رقم أكبر من 3 أو فردي أي $B=\{5\}$

الحادثة $A\cup B$: الحصول على رقم فردي أو أكبر من 3 أي

$A\cup B=\{1;3;4;5;6\}$



02 الإحتمال :

01 - احتمال حادثة:

يرمز لاحتمال تحقق الحادثة A بـ: $P(A)$ حيث : $0\le P(A)\le 1$

1. إذا كان $A=\{a_1,...,a_k\}$ فإن $P(\{a_1\})=\frac{1}{k}$
2. إذا كان $A=\{a_1,...,a_k\}$ فإن $P(A)=P(\{a_1\})+...+P(\{a_k\})$
3. في حالة احتمال متساوي التوزيع يكون احتمال الحادثة المركبة A هو

$$\mathbf{P(A)}=\frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

ملاحظة 01: نقول عن تجربة عشوائية أنها متساوية الاحتمال عندما يكون لكل الحوادث الأولية نفس الاحتمال، نقول أيضا أن الاحتمال متساوي التوزيع.

ملاحظة 02: نعبر عن تساوي الاحتمال بعبارات مثل : زهر نرد غير مزيف، قطعة نقود متوازنة، كرات لا نفرق بينها باللمس ، ...

مثال : نرمي زهر نرد غير مزيف مرقم من 1 الى 6

مجموعة الإمكانيات $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$

الحادثة A : الحصول على رقم أكبر من 3 أي : $A=\{4;5;6\}$

$$P(\{1\})=P(\{2\})=...=P(\{6\})=\frac{1}{6}$$

احتمال الحادثة:

$$P(A)=P(\{4\})+P(\{5\})+P(\{6\})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

الطريقة 1 :

$$\mathbf{P(A)}=\frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

الطريقة 1 :

02 - قانون احتمال: نعتبر تجربة عشوائية ، Ω مجموعة النتائج الممكنة $\Omega=\{e_1,e_2,...,e_n\}$

قانون احتمال P لتجربة عشوائية هو إرفاق كل إمكانية e_i (مخرج) بعدد موجب P_i مع $1\le i\le n$

بحيث يتحقق ما يلي: $P_1+P_2+...+P_n=1$ ، $0\le P_i\le 1$.

مثال:

e_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

خواص: A و B حادثتان .

1. $0\le P(A)\le 1$ ، $P(\overline{A})=1-P(A)$ ، $P(\Omega)=1$ ، $P(\varnothing)=0$
2. إذا كانت الحادثة A جزء من الحادثة B فإن : $P(A)\le P(B)$
3. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
4. إذا كانت A و B غير متلائمتين فإن: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

03 _ الأمل الرياضي ،التباين و الانحراف المعياري لقانون احتمال:

تعاريف : Ω مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية قيمها أعداد حقيقية $\Omega=\{e_1,e_2,...,e_n\}$

ـ P احتمالا على Ω حيث: $P_i=P(e_i)$

ـ أمل قانون الاحتمال هو العدد E حيث: $E=\sum_{i=1}^{n} e_i p_i$

ـ تباين قانون الاحتمال هو العدد V حيث :

$V=\sum_{i=1}^{n}(e_i-E)^2 p_i$ وأيضا $V=\sum_{i=1}^{n} e_i^2 p_i-E^2$.

ـ الانحراف المعياري لقانون الاحتمال هو العدد : $\sigma=\sqrt{V}$

ملاحظة : الأمل يمثل الوسط الحسابي في سلسلة إحصائية ،إذا اعتبرنا أن قيم الطبع هي عناصر Ω و التواترات النظرية هي قيم P_i.

تمرين 01: نرمي زهرة نرد مغشوشة بحيث: احتمال الحصول على الرقمين 4 و 5 متساو وهو ضعف احتمال الحصول على احد الرقمين 2 و3 وهو 2/3 احتمال الحصول على احد الرقمين 1 و 6 .

ما احتمال الحصول على رقم زوجي؟

تمرين 02: يحتوي وعاء على 4 كرات صفراء و 8 خضراء لا نميز بينها باللمس

نسحب بطريقة عشوائية كرتان (02) على التوالي دون إرجاع .

- استعمل شجرة الاحتمالات لنمذجة كل من الوضعيات السابقة ثم احسب :
- احتمال الحصول على: A " كرة صفراء ثم كرة خضراء "، B " كرة خضراء ثم كرة صفراء" C " اللونين معا " .

♣ ليكن X المتغير العشوائي المعرف كما يلي:

إذا تحصلنا على كرية صفراء نربح 4 دج و إذا تحصلنا على كرية خضراء نخسر 2 دج .

1)_ ما هي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ؟.

2)_ اوجد قانون احتمال المتغير العشوائي X ؟.

3)_ احسب الأمل الرياضياتي E و الانحراف المعياري .

تمرين 03: عين الاقتراح الصحيح الوحيد من الاقتراحات الآتية في كل حالة مما يلي :

1 / _ A و B حدثين من Ω إذا كان :

$P(A)=0.4$ و $P(B)=0.5$ و $P(\overline{A\cap B})=0.55$ فإن:

أـ $P(\overline{A\cap B})=0.2$ ، ب ـ $P(\overline{A\cap B})=0.45$ ، جـ ـ $P(\overline{A\cap B})=0.9$.

2 / الجدول الموالي يعرف قانون احتمال تجربة عشوائية :

x_i	-2	-1	α	3
$P(X=x_i)$	0.12	0.5	β	0.30

قيمتا α و β حتى يكون الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X يساوي 0.32 هما :

أـ $\beta=0.08$ و $\alpha=1$ ب ـ $\beta=0.3$ و $\alpha=2$ جـ ـ $\beta=0.08$ و $\alpha=2$.

04 _ الاحتمال الشرطي:

تعريف : A و B حادثتان من مجموع المخارج Ω حيث $p(A)\neq 0$.

نعرف على Ω احتمالا جديدا يرمز له بالرمز $p_A(B)$ أو $p(B/A)$

حيث : $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$.

p_A يسمى الاحتمال الشرطي لـ B علما أن A محققة.

و نقرأ : احتمال B علما أن A محققة أو احتمال علما أن B علما أن A .

تمرين 04: في قسم سنة ثالثة علوم تجريبية أجريت دراسة على 38 تلميذ منهم : 25 تلميذ يمارسون لعبة الشطرنج .

من بين 27 ذكر 19 يمارسون لعبة الشطرنج.

1_ أنقل ثم أكمل الجدول الإحصائي الموالي :

	ذكور	إناث	المجموع
يمارس	19	...	...
لا يمارس	...	,,,	...
المجموع	...	...	38

2_ نختار عشوائيا تلميذا واحد من القسم بإعطاء النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال

أـ احسب احتمال الأحداث التالية :

الحدث F : " التلميذ أنثى ".

الحدث A : " التلميذ يمارس لعبة الشطرنج "

الحدث $F\cap A$: "التلميذ بنت تدرس تمارس لعبة الشطرنج "

ب ـ إذا كان التلميذ أنثى ما احتمال أن تكون تمارس الشطرنج؟.

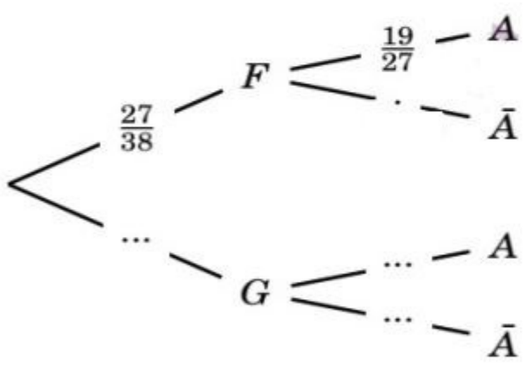
قارن بين $\frac{P(F\cap A)}{P(F)}$ و $P_F(A)$ ماذا تستنتج ؟ .

جـ ـ عرف الاحتمال $P_A(F)$ ثم احسبه.

د ـ إذا كان التلميذ لا يمارس اللعبة ، ما احتمال أن يكون ذكرا؟.

05 شجرة الإمكانيات:

المخطط = الجدول السابق = المقابل يسمى شجرة الإمكانيات و إذا أثقلنا او أرفقنا فروعها بالاحتمالات المواتية تسمى شجرة الاحتمالات .



1_ انقل الشجرة و أكملها . ثم استنتج خصائصها .

2_ عرف الحدث $F\cap A$ ثم احسب احتماله بالاعتماد على المخطط.

3_ ما عدد المسالك التي تؤدي إلى الحدث A ؟ احسب $P(A)$.

تمرين 05: U_1, U_2 و U_3 ثلاث صناديق يحتوي كل منها على 12 كرية بين صفراء و خضراء حيث:

U_1 به 2 صفراء و U_2 به 3 صفراء و U_3 به 4 صفراء.

نختار عشوائية احد الصناديق و نسحب منه عشوائيا كرية واحدة :

1. استعمل شجرة الاحتمالات لنمذجة التجربة السابقة.
2. ما احتمال الحصول على: A " الكرية المسحوبة صفراء " ؟.
3. ما احتمال أن تكون الكرية صفراء علما أنها من الصندوق U_1 ؟.
4. إذا كانت الكرية صفراء فما احتمال أن تكون من الصندوق U_1 ؟.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

06 الأحداث المستقلة:

A و B أنهما مستقلتان معناه حدوث إحداهما لا يؤثر في حدوث الثانية .

مثال : A "نجاح عبد الله" و B "نجاح أنيس" في شهادة البكالوريا . لا حظ أن نجاح عبد الله لا يؤثر في نجاح أنيس و العكس .

نقول أن A و B مستقلتان

مثال : A "فوز فريق عبد الله" و B "فوز فريق أنيس" في مقابلة نهائيه أجريت بين الفريقين . لا حظ أن فوز فريق عبد الله يؤثر على فوز فريق أنيس و العكس . أي A و B غير مستقلتين .

تعريف : نقول عن حادثتين A و B أنهما مستقلتان إذا و فقط إذا كان :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

تمرين 06 U صندوق يحتوي على 12 كرية 3 حمراء و 7 خضراء لا نفرق بينها باللمس.

الجزء الأول: نسحب عشوائيا كريتين على التوالي و دون إرجاع .

نعتبر الأحداث التالية :

R_1 : "الكرية الأولى حمراء " و الحدث R_2 : "الكرية الثانية حمراء " .

V_1 : "الكرية الأولى خضراء " و الحدث V_2 : "الكرية الثانية خضراء " .

1ـ عرف ثم احسب : $P(R_1 \cap V_2)$.

2ـ هل $P(R_1 \cap V_2) = P(R_1) \times P(V_2)$ ماذا تستنتج؟ .

الجزء الثاني: نسحب الآن عشوائيا كريتين على التوالي مع إرجاع الكرية قبل السحب الثاني :

اجب على السؤالين الواردين في الجزء الأول.

ملاحظة : يمكن الاستعانة بشجرة الاحتمالات .

ملاحظة : ليكن P احتمال A و B حدثين احتمال كل منهما غير معدوم . المساويات الثلاثة الآتية متكافئة:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \ldots (1) \quad \text{و} \quad P_A(B) = P(B) \ldots (2)$$

و $P_B(A) = P(A) \ldots (3)$

تمرين 07 برهن صحة المساويات الثلاثة السابقة.

تمرين 08 نرمي قطعة نقدية متوازنة أي احتمال ظهور الوجه يساوي احتمال ظهور الشعار ، n مرة متتالية :

تعتبر الحدثين M و N حيث:

M : "الحصول أوجه و شعارات " N : "الحصول على وجه على الأكثر ".

1/ إذا كان $n = 2$ هل الحدثين و مستقلان ؟.

2/ إذا كان $n = 3$ هل الحدثين و مستقلان ؟.

تمرين 09 A و B حدثين حيث:

الجزء الأول: $P(A) = 0.4$ و $P_{\overline{A}}(B) = 0.7$ و $P_A(B) = 0.2$.

1/ أنشئ شجرة الإمكانيات المثقلة بالاحتمالات.

2/ احسب : $P(A \cap B)$ و $P(B)$.

الجزء الثاني: $P(A) = 0.4$ و $P(\overline{A} \cap B) = 0.3$ و $P(A \cap B) = 0.2$.

2/ احسب : $P_A(B)$ و $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً