najah213.com · نجاح 213

مجلة العبقري في الرياضيات (عموميات على الدّوال)
الدروس// الشعبة: الأولى جذع مشترك علوم وتكنولوجيا.

دروس: حول عموميات على الدّوال// التحضير الجيد للبكالوريا// الشعبة: 01 ع.

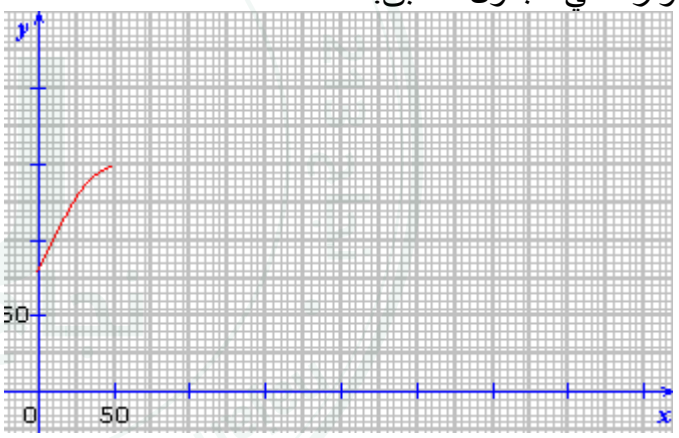
❶ مفهوم الدّالة:

نشاط 01 ص49: الدّوال في الحياة اليومية

أثناء تجربة، قيس تواتر النبضات القلبية، عدد النبضات في الدقيقة، لعداء مسافة 400m وسُجلت النتائج التالية:

المسافة المقطوعة x (m)	0	50	100	150	200	250	300	350	400
تواتر النبضات القلبية y (عدد النبضات في الدقيقة)	80	150	165	170	175	185	190	200	210

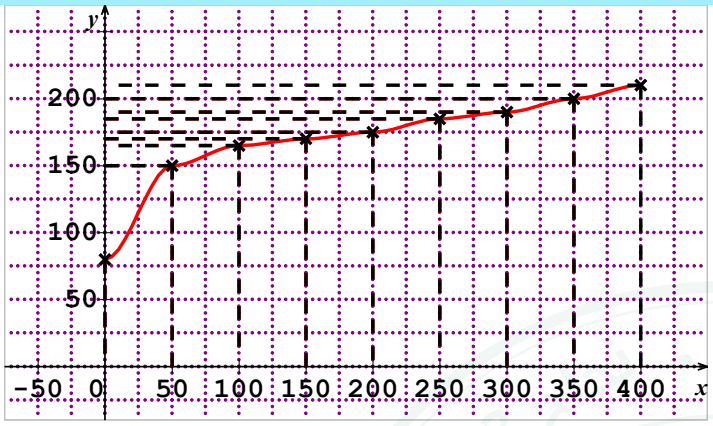
1. أنقل ثمّ أكمل التمثيل البياني التالي، باستعمال المعطيات الواردة في الجدول السابق.



2. ما هو تواتر نبض الرياضي عند بداية السباق؟ عند قطع نصف المسافة؟
3. ما هو عدد الأمتار التي قطعها العداء وتواتر نبضه يساوي 175 نبضة في الدقيقة؟
4. على أي مسافة كان هذا التواتر أكبر من 165 نبضة في الدقيقة؟

① مناقشة النشاط 01 ص49:

1. نقل ثمّ إكمال التمثيل البياني، باستعمال المعطيات الواردة في الجدول:



2. ❑ تواتر نبض الرياضي عند بداية السباق هو: 80 نبضة في الدقيقة.

❑ تواتر نبض الرياضي عند قطع نصف المسافة (200m) هو: 175 نبضة في الدقيقة.

3. عدد الأمتار التي قطعها العداء وتواتر نبضه يساوي 175 نبضة في الدقيقة هو: 200m.

4. المسافة التي كان في هذا التواتر أكبر من 165 نبضة في الدقيقة هي: ابتداءً من 100m إلى 400m.

② تعريف 01:

D جزء من $\mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$).

نُعرف **دالة** f على المجموعة D عندما **نُرفق** بكلّ عدد حقيقي x من D عدداً حقيقياً **وحيدا**، نرمز إليه بالرمز $f(x)$.

ونكتب: $f : x \mapsto f(x)$

تعابير واصطلاحات:

❑ نرمز عادة إلى الدّوال بالرموز f، g، h، ...

❑ D جزء من $\mathbb{R}$ و f دّالة معرّفة على D:

☜ D هي **مجموعة تعريف الدّالة** f.

☜ إذا كان x عنصراً من D، نسمي العدد الحقيقي $f(x)$ **صورة** x **بالدّالة** f.

☜ إذا كان العدد الحقيقي y **صورة العدد الحقيقي** x **بالدّالة** f، نقول إنّ x **سابقة للعدد** y **بالدّالة** f.

☜ للتعبير عن الدّالة f، نكتب: $f : D \to \mathbb{R}$ ، $x \to y = f(x)$

في هذه الكتابة، x يُمثل **المتغيّر** و y **مرتبط بالمتغيّر** x.

ملاحظة:

لا يُمكن أن يكون **لعدد حقيقي أكثر من صورة**، لكن **يُمكن** أن يكون **لعدد حقيقي عدّة سوابق**.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

③ طُرق تعريف دّالة:

❶ دّالة معرّفة بدستور (عبارة):

إذا أُعطي $f(x)$ بدلالة x، نقول الدّالة f أنّها معرّفة بدستور (أو بعبارة).

مثال:

لتكن f الدّالة المعرّفة على المجال $[-5;4]$ بالشكل:

$$f(x)=\frac{2x+3}{x-5}$$

⌧ **مجموعة تعريف** الدّالة f **هي** $[-5;4]$، نكتب: $D=[-5;4]$ **أو** $D_f=[-5;4]$.

⌧ العبارة $f(x)=\frac{2x+3}{x-5}$ **هي دستور (أو عبارة)** الدّالة f.

أ)تعيين مجموعة التعريف:

مجموعة تعريف دّالة f هي مجموعة الأعداد الحقيقية x التي لها صور بالدّالة f ونرمز لها بالرمز: D_f.

$(x\in D_f)$

طريقة ص 62:

عند تعيين مجموعة تعريف دّالة f، نتمعن في الدستور المعرّف للدّالة f:

❑ الدستور يتضمن **مقاماً** يظهر فيه المتغيّر x، يجب **رفض** قيم x **التي تعدم المقام**.

❑ الدستور يتضمن **جذراً تربيعياً** تحته المتغيّر x، يجب **رفض** قيم x **التي تجعل العبارة تحت الجذر سالبة تماماً**.

أمثلة:

1) $f(x)=x^2+3$، $D_f=\mathbb{R}$.

2) $g(x)=\frac{x+2}{x-1}$،

g **معرّفة** إذا وفقط إذا كان $x-1\neq 0$ أي: $x\neq 1$

إذن: $\boxed{D_g=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[}$.

3) $h(x)=\sqrt{2-x}$،

h **معرّفة** إذا وفقط إذا كان $2-x\geq 0$ أي: $x\leq 2$

إذن: $\boxed{D_h=]-\infty;2]}$.

ملاحظة:

القيم المرفوضة، تسمى **القيم الممنوعة**.

ب)لحساب صورة أو السوابق الممكنة –إن وُجدت– لعدد بالدّالة:

طريقة:

❑ لحساب **صورة عنصر a من مجموعة تعريف** دّالة f، **نُعوّض** في عبارة الدّالة المتغير x بالقيمة a **(أي نحسب $f(a)$)**

❑ لتعيين **السوابق الممكنة –إن وُجدت– لعنصر b، نحلّ المعادلة $f(x)=b$** ولا نحتفظ إلا بالحلول التي تنتمي إلى مجموعة تعريف الدّالة.

تمرين مُركّب من طرف الأستاذ:

لتكن g الدّالة المعرّفة على المجال $[-4;5[$ بالشكل:

$$g(x)=3x+5$$

1)أ/احسب صور الأعداد $-4,5$، -4، $1,5$ بالدّالة g.

ب/احسب $g(0)$، $g\left(\frac{1}{3}\right)$ وَ $g(5)$.

2)أ/احسب السوابق المُمكنة –إن وُجدت– بالدّالة g للأعداد 3، 0، -7، 5.

ب/حلّ المعادلتين: $g(x)=-8$، $g(x)=\frac{4}{3}$.

الحل:

لدينا: $g(x)=3x+5$، وَ $D_g=[-4;5[$.

1)أ/حساب صور الأعداد $-4,5$، -4، $1,5$ بالدّالة g:

⌧ لدينا: $-4,5\notin D_g$، إذن: العدد $-4,5$ **ليس له صورة** بالدّالة g.

⌧ لدينا: $-4\in D_g$، إذن: صورته بالدّالة g هي $g(-4)=3(-4)+5=-12+5=-7$.

⌧ لدينا: $1,5\in D_g$، إذن: صورته بالدّالة g هي $g(1,5)=3(1,5)+5=4,5+5=9,5$.

ب/حساب $g(0)$، $g\left(\frac{1}{3}\right)$ وَ $g(5)$:

⌧ لدينا: $0\in D_g$، إذن: صورته بالدّالة g هي $g(0)=3(0)+5=0+5=5$.

⌧ لدينا: $\frac{1}{3}\in D_g$، إذن: صورته بالدّالة g هي $g\left(\frac{1}{3}\right)=3\left(\frac{1}{3}\right)+5=1+5=6$.

⌧ لدينا: $5\notin D_g$، إذن: العدد 5 **ليس له صورة** بالدّالة g.

2)أ/حساب السوابق المُمكنة –إن وُجدت– بالدّالة g للأعداد 3، 0، -7، 5:

⌧ نحل المعادلة $g(x)=3$ في D_g:

لدينا: $g(x)=3$، تُكافئ: $3x+5=3$

ومنه: $x=-\frac{2}{3}\in D_g$

إذن: سابقة العدد 3 بالدّالة g هي: $-\frac{2}{3}$، أي: $g\left(-\frac{2}{3}\right)=3$.

⌧ نحل المعادلة $g(x)=0$ في D_g:

لدينا: $g(x)=0$، تُكافئ: $3x+5=0$

ومنه: $x=-\frac{5}{3}\in D_g$

إذن: سابقة العدد 0 بالدّالة g هي: $-\frac{5}{3}$، أي: $g\left(-\frac{5}{3}\right)=0$.

⌧ نحل المعادلة $g(x)=-7$ في D_g:

لدينا: $g(x)=-7$، تُكافئ: $3x+5=-7$

ومنه: $x=-\frac{12}{3}=-4\in D_g$

إذن: سابقة العدد (-7) بالدّالة g هي: -4، أي: $g(-4)=-7$.

⌧ نحل المعادلة $g(x)=5$ في D_g:

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

لدينا: $g(x) = 5$، تُكافئ: $3x + 5 = 5$

ومنه: $x = 0 \in D_g$

إذن: سابقة العدد 5 بالدّالة g هي: 0، أي: $g(0) = 5$.

ب/حلّ المعادلتين، $g(x) = -8$، $g(x) = \frac{4}{3}$:

لدينا: $g(x) = -8$، تُكافئ: $3x + 5 = -8$

ومنه: $x = -\frac{13}{3} \notin D_g$

إذن: العدد (-8) **ليس له سوابق** بالدّالة g.

لدينا: $g(x) = \frac{4}{3}$، تُكافئ: $3x + 5 = \frac{4}{3}$

ومنه: $x = -\frac{11}{9} \in D_g$

إذن: سابقة العدد $\frac{4}{3}$ بالدّالة g هي: $-\frac{11}{9}$، أي: $g\left(-\frac{11}{9}\right) = \frac{4}{3}$.

تمارين 23؛ 24؛ 25؛ 26؛ 27 ص73-74 (عمل منزلي)

تمرين 22 ص73.

لتكن f الدّالة المعرّفة من أجل كلّ عدد حقيقي x بالشكل:

$$f(x) = 5x^2 - 8x + 3$$

1)احسب صور 3، 1، 0، 4- بالدّالة f.

2)احسب $f(4)$، $f(-1)$، $f\left(\frac{2}{3}\right)$، $f(\sqrt{3})$.

الحل:

لدينا: $f(x) = 5x^2 - 8x + 3$، وَ $D_f = \mathbb{R}$.

1)**حساب صور** 3، 1، 0، 4- **بالدّالة** f:

بالتعويض نجد:

✪ $f(3) = 5(3)^2 - 8(3) + 3 = 45 - 24 + 3 = 24$

إذن: صورة العدد 3 بالدّالة f هو 24.

✪ $f(1) = 5(1)^2 - 8(1) + 3 = 5 - 8 + 3 = 0$

إذن: صورة العدد 1 بالدّالة f هو 0.

✪ $f(0) = 5(0)^2 - 8(0) + 3 = 3$

إذن: صورة العدد 0 بالدّالة f هو 3.

✪ $f(-4) = 5(-4)^2 - 8(-4) + 3 = 80 + 32 + 3 = 115$

إذن: صورة العدد (-4) بالدّالة f هو 115.

2)**حساب** $f(4)$، $f(-1)$، $f\left(\frac{2}{3}\right)$، $f(\sqrt{3})$:

بالتعويض نجد:

✪ $f(4) = 5(4)^2 - 8(4) + 3 = 80 - 32 + 3 = 51$

أي: صورة العدد 4 بالدّالة f هو 51.

✪ $f(-1) = 5(-1)^2 - 8(-1) + 3 = 5 + 8 + 3 = 16$

أي: صورة العدد (-1) بالدّالة f هو 16.

✪ $f\left(\frac{2}{3}\right) = 5\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{2}{3}\right) + 3$

$= \frac{20}{9} - \frac{16}{3} + 3 = \frac{20-48+27}{9} = -\frac{1}{9}$

أي: صورة العدد $\frac{2}{3}$ بالدّالة f هو $-\frac{1}{9}$.

✪ $f(\sqrt{3}) = 5(\sqrt{3})^2 - 8(\sqrt{3}) + 3$

$= 15 - 8\sqrt{3} + 3 = 18 - 8\sqrt{3}$

أي: صورة العدد $(\sqrt{3})$ بالدّالة f هو $18 - 8\sqrt{3}$.

تمرين 23 ص73.

لتكن f الدّالة المعرّفة على المجال $[-5; 4]$ بالشكل:

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-5}$$

1)احسب صور $-5,5$، -4، $-1,5$.

2)احسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$، $f\left(\frac{4}{3}\right)$.

الحل:

لدينا: $f(x) = \frac{2x+3}{x-5}$، وَ $D_f = [-5; 4]$.

1)**حساب صور** $-5,5$، -4، $-1,5$:

✪ العدد $-5,5$ **ليس له صورة** بالدّالة f، لأنّ: $-5,5 \notin D_f$.

✪ صورة العدد -4 بالدّالة f، هي: $\boxed{f(-4) = \frac{5}{9}}$.

✪ صورة العدد $-1,5$ بالدّالة f، هي: $\boxed{f(-1,5) = 0}$.

2)**حساب** $f\left(\frac{1}{2}\right)$، $f\left(\frac{4}{3}\right)$: (حساب صور $\frac{1}{2}$ وَ $\frac{4}{3}$ بالدّالة f)

✪ صورة العدد $\frac{1}{2}$ بالدّالة f، هي: $\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{9}}$.

✪ صورة العدد $\frac{4}{3}$ بالدّالة f، هي: $\boxed{f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{17}{11}}$.

تمرين 24 ص73.

بفرض: $x \mapsto f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

1)ما هي صور -3، 5، 0، $\sqrt{2}$؟

2)ما هي السوابق الممكنة للعدد -3؟

الحل:

لدينا: $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$، وَ $D_f = \mathbb{R}$.

1)**حساب صور الأعداد** -3، 5، 0، $\sqrt{2}$:

✪ صورة العدد -3 بالدّالة f، هي: $\boxed{f(-3) = 0}$.

✪ صورة العدد 5 بالدّالة f، هي: $\boxed{f(5) = 72}$.

✪ صورة العدد 0 بالدّالة f، هي: $\boxed{f(0) = -3}$.

✪ صورة العدد $\sqrt{2}$ بالدّالة f، هي: $\boxed{f(\sqrt{2}) = 1 + 5\sqrt{2}}$.

2)**تعيين السوابق الممكنة إن وُجدت للعدد** -3:

✪ نحل المعادلة $f(x) = -3$ في D_f:

لدينا: $f(x) = -3$، تُكافئ: $2x^2 + 5x = 0$

ومنه: $x(2x + 5) = 0$

وعليه: $x = 0$ **أو** $2x + 5 = 0$.

أي: $\boxed{x = 0}$ **أو** $\boxed{x = -\frac{5}{2}}$.

إذن: للعدد (-3) سابقتين بالدّالة f هما: 0، وَ $-\frac{5}{2}$ أي:

$$f(0) = f\left(-\frac{5}{2}\right) = -3.$$

تمرين 25 ص73.

لتكن f الدّالة المعرّفة من أجل كلّ عدد حقيقي x بالشكل:

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

$f(x) = -7x + 5$

1)احسب السوابق الممكنة بالدّالة f للأعداد 3، 0، -4، 5.

2)حلّ المعادلتين: $f(x) = -2$، $f(x) = \frac{4}{3}$.

الحل:

لدينا: $f(x) = -7x + 5$، وَ $D_f = \mathbb{R}$.

1)**حساب السوابق الممكنة بالدّالة f للأعداد** 3، 0، -4، 5:

نحل المعادلة $f(x) = 3$ في D_f:

لدينا: $f(x) = 3$، تُكافئ: $-7x + 5 = 3$

ومنه: $x = \frac{2}{7}$

إذن: سابقة العدد (3) بالدّالة f هي: $\frac{2}{7}$، أي: $f\left(\frac{2}{7}\right) = 3$.

نحل المعادلة $f(x) = 0$ في D_f:

لدينا: $f(x) = 0$، تُكافئ: $-7x + 5 = 0$

ومنه: $x = \frac{5}{7}$

إذن: سابقة العدد (0) بالدّالة f هي: $\frac{5}{7}$، أي: $f\left(\frac{5}{7}\right) = 0$.

نحل المعادلة $f(x) = -4$ في D_f:

لدينا: $f(x) = -4$، تُكافئ: $-7x + 5 = -4$

ومنه: $x = \frac{9}{7}$

إذن: سابقة العدد (-4) بالدّالة f هي: $\frac{9}{7}$، أي: $f\left(\frac{9}{7}\right) = -4$.

نحل المعادلة $f(x) = 5$ في D_f:

لدينا: $f(x) = 5$، تُكافئ: $-7x + 5 = 5$

ومنه: $x = 0$

إذن: سابقة العدد (5) بالدّالة f هي: 0، أي: $f(0) = 5$.

2)**حلّ المعادلتين:** $f(x) = -2$، $f(x) = \frac{4}{3}$:

(حساب السوابق الممكنة للعددين $\frac{1}{2}$ وَ $\frac{4}{3}$ بالدّالة f)

تمرين 26 ص73.

لتكن f الدّالة المعرّفة من أجل كلّ عدد حقيقي x بالشكل:

$f(x) = x^2 + 6x - 16$

1) بيّن أنّ: $f(x) = (x+3)^2 - 25$.

2) حلّ المعادلة، $f(x) = 11$.

الحل:

لدينا: $f(x) = x^2 + 6x - 16$، وَ $D_f = \mathbb{R}$.

1) **تبيّان أنّ،** $f(x) = (x+3)^2 - 25$:

ط01) لدينا: $(x+3)^2 - 25 = x^2 + 6x + 9 - 25$

$= x^2 + 6x - 16 = f(x)$

إذن: $\boxed{f(x) = (x+3)^2 - 25}$.

ط02) لدينا: $f(x) = x^2 + 6x - 16$

$= x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 - 16$

$= x^2 + 6x + (3)^2 - 9 - 16$

$= (x+3)^2 - 25$

إذن: $\boxed{f(x) = (x+3)^2 - 25}$.

2) **حلّ المعادلة،** $f(x) = 11$:

(حساب السوابق الممكنة للعدد 11 بالدّالة f)

نحل المعادلة $f(x) = 11$ في D_f:

لدينا: $f(x) = 11$، تُكافئ: $(x+3)^2 - 25 = 11$

ومنه: $(x+3)^2 = 36$

وعليه: $x + 3 = \sqrt{36}$ **أو** $x + 3 = -\sqrt{36}$.

أي: $\boxed{x = 3}$ **أو** $\boxed{x = -9}$.

إذن: للعدد (11) سابقتين بالدّالة f هما: 3، وَ -9 أي:

$f(-9) = f(3) = 11$.

تمرين 27 ص73.

لتكن f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x) = -2x + 3$

1)ما هي صورة $-\frac{1}{3}$؟ 0,25؟

2)ما هي السوابق الممكنة للأعداد: 0، $-\frac{4}{3}$، 3؟

3)هل لكلّ عدد حقيقي سابقة بالدّالة f؟

الحل:

❷ دّالة معرّفة بتمثيل بياني:

يُمكن **تعريف** دّالة f **بتمثيل بياني** (C_f) في معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

تعريف 02:

المستوي منسوب إلى معلم $(O; I; J)$، f دّالة معرّفة على جزء D من $\mathbb{R}$.

التمثيل البياني (أو المنحني المُمثل) للدّالة f في المعلم $(O; I; J)$ هو **مجموعة النقط** $M(x; y)$،

حيث: $\begin{cases} x \in D_f \\ y = f(x) \end{cases}$.

ترميز:

إذا رمزنا إلى منحنى الدّالة f بالرمز (C_f)، نقول أنّ $\boxed{y = f(x)}$ هي **معادلة** (C_f) في المعلم $(O; I; J)$.

ونكتب: $\boxed{(C_f): y = f(x)}$.

ملاحظة:

يُمكن رسم المنحنى المُمثل للدّالة f في المعلم $(O; I; J)$ بعدّة طرق:

- باستعمال جدول لبعض قيم الدّالة.
- باستعمال حاسبة بيانية.
- باستعمال مجدول، كما أنّه توجد برامج أخرى مثل Sinequanon؛ GeoGebra...الخ

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com · نجاح 213

najah213.com · نجاح 213

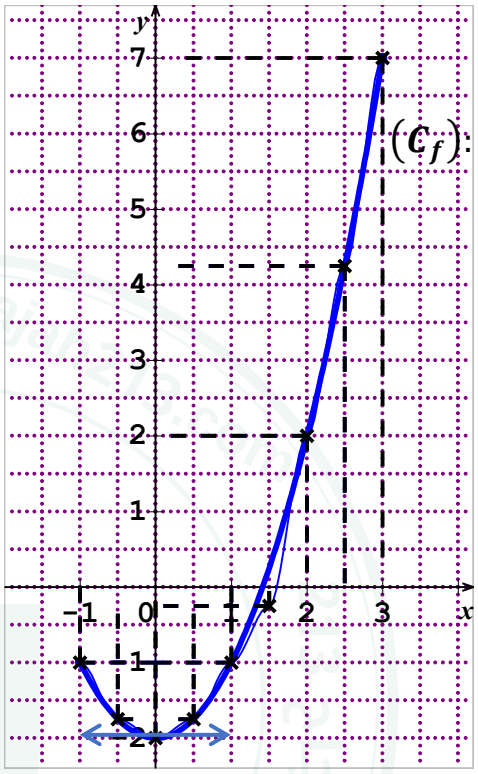
مثال:

f دالّة معرّفة على المجال $[-1;3]$ بـ: $f(x)=x^2-2$.

لنرسم منحناها البياني (C_f) في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$:

نستعمل جدول لبعض قيم الدّالة:

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	-1	-1,75	-2	-1,75	-1	-0,25	2	4,25	7



استعمال التمثيل البياني للدّالة:

أ)تعيين مجموعة تعريف دّالة:

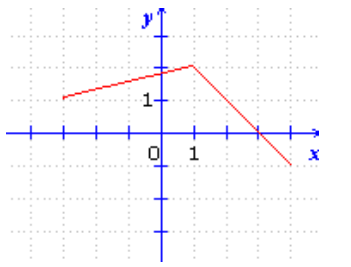
طريقة:

مجموعة تعريف دّالة معرّفة بتمثيل بياني هي **مجموعة فواصل النقط** التي تنتمي إلى المنحنى المُمثل للدّالة.

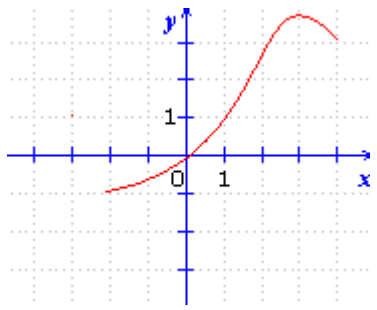
ت 12 ص73.

عيّن مجموعة تعريف كلّ من الدوال الممثلة كما يلي:

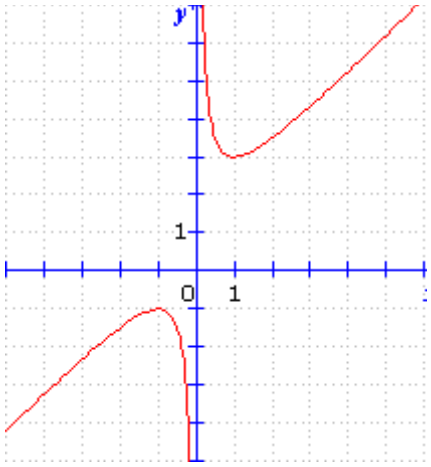
(1



(2



(3



الحل:

تعيين مجموعة تعريف كلّ من الدّوال الممثلة:

1) المنحني (1) يُمثل دّالة معرّفة على المجال $[-3;4]$.

2) المنحني (2) يُمثل دّالة معرّفة على المجال $[-2;4]$.

3) المنحني (3) يُمثل دّالة معرّفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ أي: $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

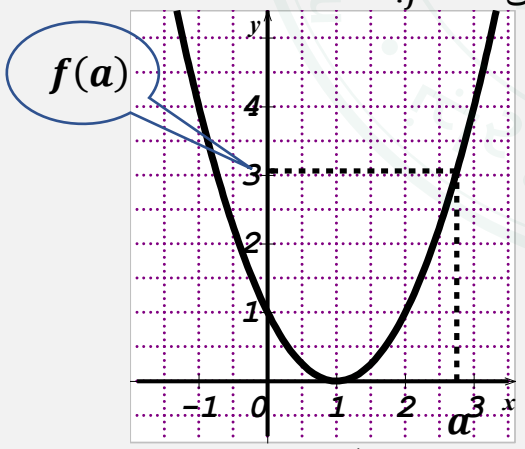
ب)تعيين صورة أو السوابق الممكنة -إن وُجدت- لعنصر بدّالة:

طريقة ص 64:

❑ لقراءة **صورة عنصر a** وفق دّالة f باستعمال التمثيل البياني لهذه الدّالة،

✍ نضع العدد a على محور الفواصل،

✍ نرسم من النقطة $A(a;0)$ المُوازي لمحور التراتيب. هذا المستقيم يقطع المنحني عند نقطة M ترتيبها $f(a)$، صورة a وفق الدّالة f.

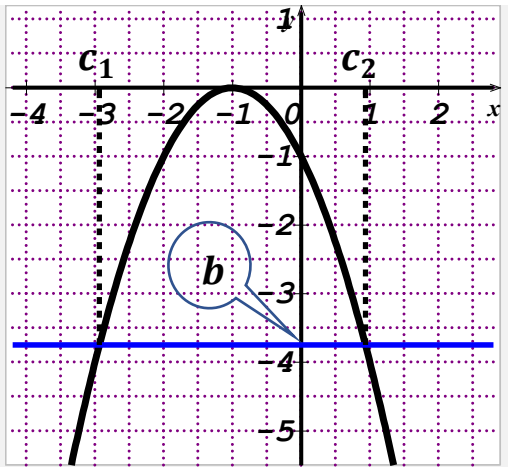


❑ لقراءة **السوابق الممكنة لعنصر b** وفق دّالة f باستعمال التمثيل البياني لهذه الدّالة،

✍ نضع العدد b على محور التراتيب،

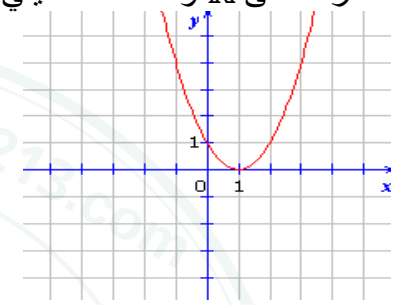
✍ نرسم من النقطة $B(0;b)$ المُوازي لمحور الفواصل. **فواصل نقاط التقاطع** (في حالة وُجودها) لهذا المستقيم والمنحني هي **سوابق b**.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com



تمرين 28 ص74.

لتكن f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ والمُمثلة كما يلي:



1) ما هي صور -1، 0، 1، 3؟

2) ما هي السوابق المُمكنة للأعداد 1، 0، -1؟

الحل:

1) بالإسقاط نجد:

- صورة العدد (-1) بالدّالة f هي 4، أي: $f(-1)=4$.
- صورة العدد 0 بالدّالة f هي 1، أي: $f(0)=1$.
- صورة العدد 1 بالدّالة f هي 0، أي: $f(1)=0$.
- صورة العدد 3 بالدّالة f هي 4، أي: $f(3)=4$.

2)من البيان نجد:

- سابقتا العدد 1 بالدّالة f هما 0 وَ2، أي: $f(0)=f(2)=1$.
- سابقة العدد 0 بالدّالة f هي 1، أي: $f(0)=1$.
- العدد (-1) **ليس له سابقة** بالدّالة f.

تمرين 29 وَ30 ص74 (عمل منزلي)

❸ دّالة معرّفة بجدول قيم:

يُعرف هذا النوع من الدّوال على شكل جدول يشمل قيم لـx وقيم لصورها $f(x)$.

مثال:

الجدول التالي يُعطي وزن وقامة بعض الأفراد:

القامة cm	1,5	1,55	1,6	1,68	1,7	1,8
الوزن Kg	50	55	59	60	65	55

الجدول **يُعرف دّالة**.

❷ تغيرات دّالة معرّفة على مجال:

① تعريف 03:

f دّالة معرّفة على مجال I من $\mathbb{R}$ $(I \subset \mathbb{R})$.

❑ **f متزايدة تماماً على I** يعني:

من أجل كلّ x_1 وَ x_2 من I، إذا كان $x_1 < x_2$ فإنّ $f(x_1) < f(x_2)$.

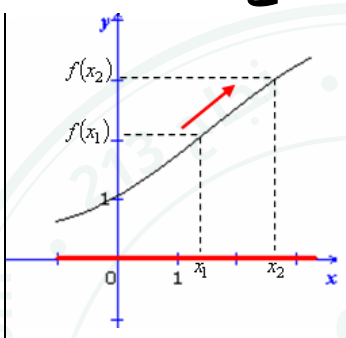
❑ **f متناقصة تماماً على I** يعني:

من أجل كلّ x_1 وَ x_2 من I، إذا كان $x_1 < x_2$ فإنّ $f(x_1) > f(x_2)$.

❑ **f ثابتة على I** يعني:

من أجل كلّ x_1 وَ x_2 من I، $f(x_1) = f(x_2)$.

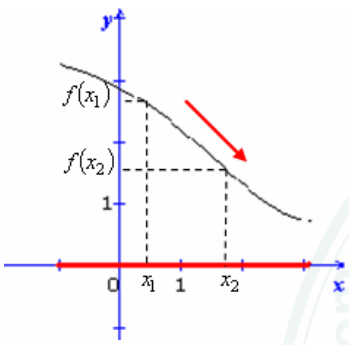
توضيح:



f دّالة متزايدة تماما

$f(x_1)$ و$f(x_2)$ **في نفس ترتيب** x_1 وx_2.

✗ الدّالة f **تحفظ الترتيب**.



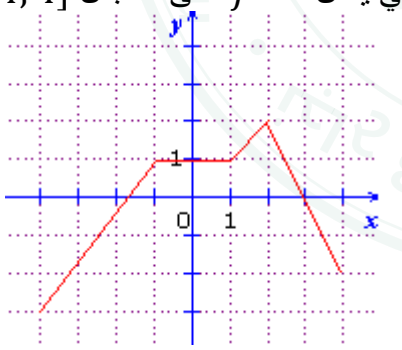
f دّالة متناقصة تماما

$f(x_1)$ و$f(x_2)$ **ليسا في نفس ترتيب** x_1 وx_2.

✗ الدّالة f **تعكس الترتيب**.

مثال:

المنحني الآتي يُمثل دّالة f على المجال $[-4;4]$.



الدّالة f **متزايدة تماما** على كل من المجالين $[-4;-1]$ وَ$[1;2]$.

وَ**متناقصة تماما** على المجال $[2;4]$.

وَ**ثابتة** على المجال $[1;-1]$.

② ملاحظات:

❍ نعني **بدراسة اتجاه تغيّر دّالة**، تعيين **المجالات** التي يكون فيها **هذه الدّالة متزايدة تماما** أو **متناقصة تماما** أو **ثابتة**.

❍ تُلخّص نتائج هذه الدّراسة في جدول يسمى **جدول التغيّرات (جدول تغيّرات الدّالة)**.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

سؤال: كيف ندرس اتجاه تغير دّالة؟

طريقة ص 65:

لدراسة اتجاه تغيّر دّالة على مجال I، يُمكن أن نفرض عنصرين a وَ b من I حيث $a < b$ و**نقارن** بين $f(a)$ وَ $f(b)$ عبر سلسة من الاستنتاجات المتوالية معتمدين في ذلك على الفرض الذي انطلقنا منه.

مثال:

لندرس اتجاه تغيّر الدّالة f المعرّفة على $[1;+\infty[$ بالشكل $f(x)=(x-1)^2-1$:

ليكن x_1 و x_2 عنصرين من المجال $[1;+\infty[$ حيث: $1 \leq x_1 < x_2$

لدينا: $1 \leq x_1 < x_2$

ومنه: $1-1 \leq x_1-1 < x_2-1$

أي: $0 \leq x_1-1 < x_2-1$

وعليه: $(x_1-1)^2 < (x_2-1)^2$

ويكون: $(x_1-1)^2-1 < (x_2-1)^2-1$

أي: $f(x_1) < f(x_2)$

إذن: الدّالة f **متزايدة تماما** على المجال $[1;+\infty[$.

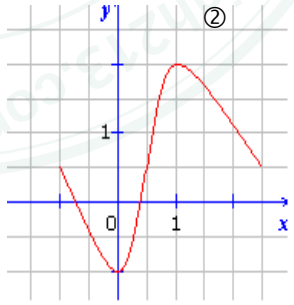
③ تعيين جدول تغيّرات دّالة انطلاقا من تمثيلها البياني:

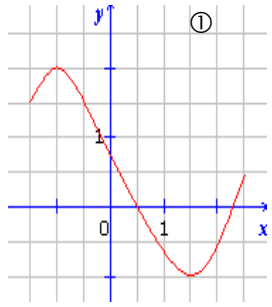
طريقة:

يتم تعيين جدول تغيّرات دّالة انطلاقا من تمثيلها البياني، بقراءة المجالات المتعلقة بسلوك الدّالة **على محور الفواصل** ثمّ تنظيمها في جدول التغيّرات.

تمرين.

أعط جدول تغيرات كلّ دّالة من الدّوال المعرّفة بالتمثيلات البيانية أدناه.





الحل:

الشكل ①:

x	-1,5		-1		1,5		2,5
$f(x)$	1,5	↗	2	↘	-1	↗	0,5

الشكل ②:

x	-1		0		1		2,5
$f(x)$	0,5	↘	-1	↗	2	↘	0,5

④ رسم تمثيل بياني لدّالة انطلاقاً من جدول تغيّراتها:

طريقة:

يتم رسم تمثيل بياني لدّالة انطلاقا من جدول تغيّراتها، بقراءة سلوك هذه الدّالة على مختلف المجالات المكونة لمجموعة تعريفها وتمثيلها في مستوي منسوب إلى معلم مناسب.

تمرين 37 ص75.

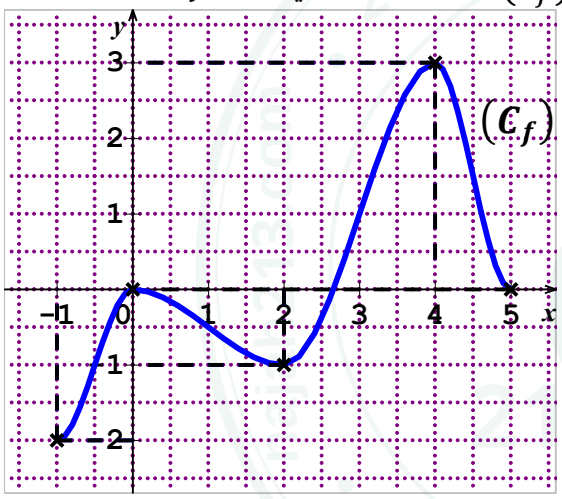
ارسم تمثيلا بيانيا لدّالة f تقبل جدول التغيرات التالي:

x	-1		0		2		4		5
$f(x)$	-2	↘	0	↘	-1	↗	3	↘	0

الحل:

رسم تمثيلا بيانيا للدّالة f:

ليكن (C_f) هو التمثيل البياني للدّالة f.



❸ القيم الحدّية لدّالة:

① تعريف 04:

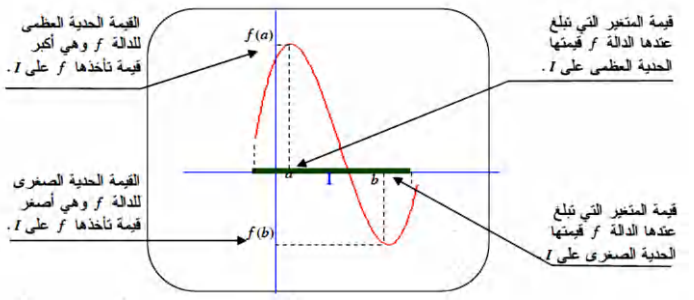
f دّالة معرّفة على مجال I من $\mathbb{R}$ $(I \subset \mathbb{R})$.

❑ **القيمة الحدّية العظمى (الكبرى) للدّالة f على I هي:**
أكبر صورة $f(x)$ تبلغها من أجل عدد a من I، من أجل كلّ x من I فإنّ $\boxed{f(a)} \geq f(x)$.

❑ **القيمة الحدّية الصغرى للدّالة f على I هي:**
أصغر صورة $f(x)$ تبلغها من أجل عدد b من I، من أجل كلّ x من I فإنّ $\boxed{f(b)} \leq f(x)$.

توضيح:

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com · نجاح 213



② ملاحظات:

❑ يُمكن أن **تبلغ دّالة قيمتها الحدية العظمى** أو **الصغرى** على مجال **عند أكثر من عنصر واحد** من المجال، و**القيمة الحدية تكون دائماً عددا حقيقيا** (بمعنى إنّ $-\infty$ أو $+\infty$ لا يُمكن أن يكونا قيمة حدّية).

❑ **نجد القيم الحدية لدّالة**

☜باستعمال دستورها (لاحظ التمرين 46؛47 ص77)

☜من البيان.

☜من جدول تغيّراتها.

تمرين 47 ص76.

نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالشكل:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$$

بيّن أنّ الدّالة f تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $[0;+\infty[$ عند 0.

الحل:

تبيان أنّ الدّالة f تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $[0;+\infty[$ عند 0:

لدينا: من أجل كل x من $[0;+\infty[$، فإنّ: $\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$

ومنه: $x^2(x+3) \geq 0$

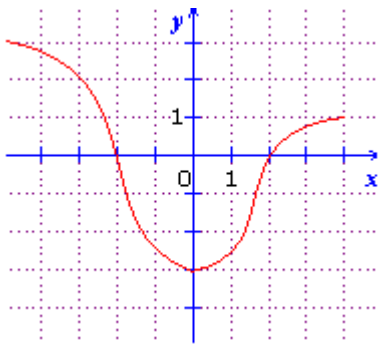
أي: $x^2 + 3x^2 \geq 0$

وعليه: $x^2 + 3x^2 - 2 \geq -2$

أي: $\boxed{f(x) \geq -2}$

إذن: الدّالة f تقبل **قيمة حدية صغرى** على المجال $[0;+\infty[$ عند 0 هي: -2 (لأنّ: $f(0) = -2$).

تمرين 39 ص77.



"f تقبل قيمة حدية عظمى على المجال $[-5;4]$ عند ...، تساوي ...".

"f تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $[-5;4]$ عند ...، تساوي ...".

الحل:

"f تقبل **قيمة حدية عظمى** على المجال $[-5;4]$ عند 5-، تساوي $f(-5) = 3$".

"f تقبل **قيمة حدية صغرى** على المجال $[-5;4]$ عند 0، تساوي $f(0) = -3$".

تمرين محلول:

لتكن g دّالة معرّفة بجدول تغيراتها كما يلي:

x	-4		-2		3		5
$g(x)$	3	↘	-3	↗	4	↘	-1

-القيمة الحدية الصغرى للدّالة g على $[-4;5]$ هي: -3 $g(-2) = -3$ تبلغها من أجل $x = -2$.

-القيمة الحدية الكبرى للدّالة g على $[-4;5]$ هي: $g(3) = 4$ تبلغها من أجل $x = 3$.

❹ شفعية دّالة:

① تناظر جزء من $\mathbb{R}$ بالنسبة إلى الصفر:

تعريف:

D جزء من $\mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$.

D متناظر بالنسبة إلى الصفر إذا وفقط إذا كـان:

من أجل $x \in D$ فإنّ $-x \in D$

أمثلة:

1) $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0

(من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإنّ $-x \in \mathbb{R}$)

2) $\mathbb{R}^*$ متناظرة بالنسبة إلى 0

(من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ فإنّ $-x \in \mathbb{R}^*$)

3) $[-2;2[$ غير متناظرة بالنسبة إلى 0

($2 \notin [-2;2[$ وَ $-2 \in [-2;2[$ لأنّ)

② شفعية دّالة:

تعريف 05:

f دّالة معرّفة على مجال D من $\mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$.

❑ **نقول إنّ f دّالة زوجية** إذا كـان:

✍ D متناظراً بالنسبة إلى 0

(أي: من أجل $x \in D$ فإنّ $-x \in D$)

✍ وكان لكلّ x من D، $\boxed{f(-x) = f(x)}$.

❑ **نقول إنّ f دّالة فردية** إذا كـان:

✍ D متناظراً بالنسبة إلى 0

(أي: من أجل $x \in D$ فإنّ $-x \in D$)

✍ وكان لكلّ x من D، $\boxed{f(-x) = -f(x)}$.