najah213.com · نجاح 213

أفكار فيديوهات الأستاذ نور الدين

الـــدوال

(1)

المستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس
ولتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ عبارتها: $f(x)=\sqrt{x}$ ولتكن الدالة w المعرفة على $\mathbb{R}$ بحيث: $w(x)=x^2-1$
ولتكن الدالة T المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $T(x)=x^3-3x^2$.

• انطلاقا من المنحنى البياني للدالة f استنتج رسم منحنيات الدوال الآتية دون دراستها.

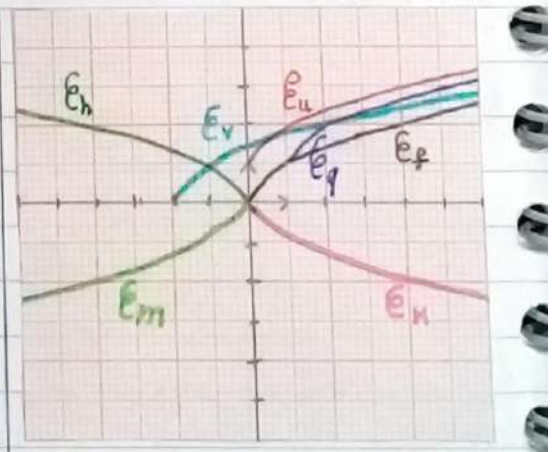
$q(x)=1+\sqrt{(x-1)}$	$v(x)=\sqrt{(x+2)}$	$u(x)=1+\sqrt{x}$
$m(x)=-\sqrt{(-x)}$	$k(x)=-\sqrt{x}$	$h(x)=\sqrt{(-x)}$

• انطلاقا من منحنى الدالة w: أرسم منحنيات الدوال الآتية دون دراستها.

$L(x)=|w(x)|$

• انطلاقا من منحنى الدالة T، أرسم منحنيات الدوال الآتية دون دراستها.

$g(x)=T(\|x\|)$	$L(x)=\|T(x)\|$
$u(x)=T(-\|x\|)$	$N(x)=\|T(\|x\|)\|$



الحالة 01: $u(x)=f(x)+1$
نستنتج $(\mathcal{E}_u)$ من $(\mathcal{E}_f)$ بالإنسحاب ذي الشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ أي $\vec{v}\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$.

الحالة 02: $v(x)=\sqrt{(x+2)}$
نستنتج $(\mathcal{E}_v)$ بالإنسحاب ذي الشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$

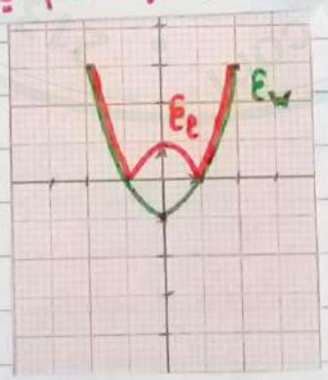
الحالة 03: $q(x)=1+\sqrt{x-1}$
نستنتج $(\mathcal{E}_q)$ بالإنسحاب ذي الشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

الحالة 04: $h(x)=\sqrt{(-x)}$
$h(x)=f(-x)$
نستنتج أن: $(\mathcal{E}_h)$ هو نظير $(\mathcal{E}_f)$ بالنسبة لمحور التراتيب

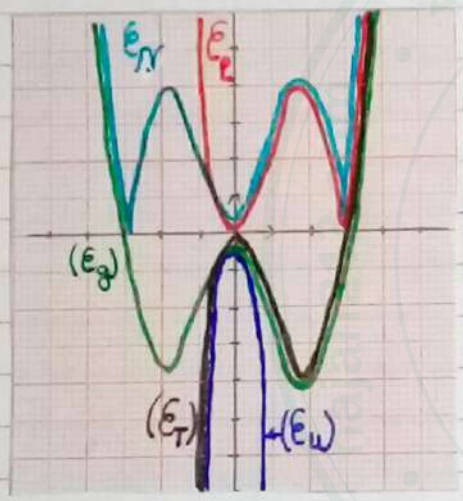
الحالة 05: $k(x)=-\sqrt{(x)}$
نستنتج أن: $\mathcal{E}_k$ هو نظير $(\mathcal{E}_f)$ بالنسبة لمحور الفواصل.

الحالة 06: $m(x)=-\sqrt{(-x)}$
نستنتج أن: $\mathcal{E}_m$ هو نظير $(\mathcal{E}_f)$ بالنسبة لمبدأ المعلم.

[redacted] Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بإنضمامكم لي



حالة: $L(x)=|w(x)|$
1- على المجالات التي يكون فيها $w(x)\geq 0$ أي يكون $\mathcal{E}_w$ على محور الفواصل أو فوقه.
نحصل على $L(x)=w(x)$ ومنه $(\mathcal{E}_L)$ ينطبق على $(\mathcal{E}_w)$.
2- على المجالات التي يكون فيها $w(x)<0$ أي يكون $(\mathcal{E}_w)$ تحت محور الفواصل $L(x)=|w(x)|$
3- الدالة $L(x)$ لا تقبل إشتقاق عند $x=-1$ و $x=1$ لأن الدالة تقبل نصف مماس.



الحالة 1: $g(x)=T(|x|)$

ملاحظة:
غالبا يطلب إثبات أن الدالة زوجية أي: $f(-x)=f(x)$

1- إذا كان $x>0$ و $x\in D_T$ (الجزء الموجب من D_T) نحصل على: $g(x)=T(x)$ ومنه $(\mathcal{E}_g)$ ينطبق على $(\mathcal{E}_T)$
2- نكمل الجزء المتبقي من $(\mathcal{E}_g)$ بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأن g زوجية.

najah213.com · نجاح 213

الحالة 2: $u(x) = T(-|x|)$

1- إذا كان $x \leq 0$ و $x \in D_T$ (الجزء السالب من D_T) نحصل على: $u(x) = T(x)$ و منه $(\mathcal{E}_u)$ ينطبق على $(\mathcal{E}_T)$.

2- نكمل الجزء المتبقي من $(\mathcal{E}_u)$ بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأن u زوجية.

الحالة 3: $L(x) = |T(x)|$

1- على المجالات التي تكون فيها $T(x) \geq 0$ أي يكون فيها $(\mathcal{E}_T)$ على محور الفواصل أو فوقه.

نحصل على: $L(x) = T(x)$

2- على المجالات التي تكون فيها $T(x) < 0$ يكون $(\mathcal{E}_L)$ متناظر لـ $(\mathcal{E}_T)$ بالنسبة لمحور الفواصل.

الحالة 4: $N(x) = |T(|x|)|$

1- $(\mathcal{E}_N)$ يقع فوق محور الفواصل لأن $|T(x)|$ الدالة N قيمها كلها موجبة لأن: $N(x) \geq 0$ أي منحناها البياني $(\mathcal{E}_N)$ يقع فوق محور الفواصل إلى الجزء السالب يناظر بالنسبة إلى $(x'x)$.

2- الدالة N زوجية $T(|x|)$ أي يكفي رسم الجزء من $[0, +\infty[$ والجزء الآخر يناظر بالنسبة لمحور التراتيب $(y'y)$.

طرق إزالة حالة عدم التعيين.

- بالإختزال.
- بالتحليل.
- بالمرافق
- بالعدد المشتق

---

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x + \sqrt{|9x^2 - 1|}$ وتمثيلها البياني $(\mathcal{E}_f)$.

1- حدد نهايات عند $-\infty$ و $+\infty$.

2- أحسب $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 4x]$ و $\lim_{x \to -\infty} [f(x) + 9x]$

3- إستنتج أن $(\mathcal{E}_f)$ له مستقيمان مقاربان يطلب تعيين معادلتيهما.

ملاحظة:

نكتب الدالة بدون رمز القيمة المطلقة لتسهيل العمل عليها

1- كتابة دون رمز القيمة المطلقة:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$9x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

القيمة المطلقة تتيح لنا كتابتين:

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{9x^2 - 1} \\ x \in]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, +\infty[\end{cases}$$ لما

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{1 - 9x^2} \\ x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \end{cases}$$ لما

النهايات:

$\lim_{x \to -\infty} (x + \sqrt{9x^2 - 1}) = +\infty$ ت.ع

$\lim_{x \to -\infty} (x + |x|\sqrt{9 - \frac{1}{x^2}})$

$$\begin{cases} x : x \geq 0 \\ -x : x \leq 0 \end{cases}$$

عند $-\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (x - x\sqrt{9 - \frac{1}{x^2}})$

$\lim_{x \to -\infty} x(1 - \sqrt{9 - \frac{1}{x^2}})$

$\lim_{x \to -\infty} (-\infty).(-2) = +\infty$ أي

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (x + \sqrt{9x^2 - 1})$ =ت.ع.ت

$\lim_{x \to +\infty} x(1 + \sqrt{9 - \frac{1}{x^2}})$

$\lim_{x \to +\infty} (+\infty)(4) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

[redacted] Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بإنضمامكم لي

2- حساب $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 4x]$

$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{9x^2 - 1} + x - 4x)$ =ح.ع.ت

$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{9x^2 - 1} - 3x)$

ملاحظة:

$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{ax^2 + \ldots} \pm ax + \beta)$ لما نجد تحل بالمرافق.

إذا كان $|x| = \sqrt{|x|}$ وإلا تحل بالتحليل.

$\sqrt{9} = |3| = -3$

تحل بالمرافق:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{9x^2 - 1} - 3x)(\sqrt{9x^2 - 1} + 3x)}{(\sqrt{9x^2 - 1} + 3x)}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{+x(\sqrt{9 - \frac{1}{x^2}} + 3)} = \frac{-1}{x.6} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 4x] = 0$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

▸ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-2x]$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[\sqrt{9x^2-1}+3x]$ = ت.ع.ح

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x\left(\sqrt{9-\frac{1}{x^2}}+3\right)}=\dfrac{1}{x.6}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-2x]=0$

Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بإنضمامكم لي

3- إستنتاج أن $(\mathcal{C}_f)$ مستقيمان مقاربان مائلان:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

1. بمأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-4x]=0$

أي:

$(\Delta): y=4x$ م.م. مائل بجوار $+\infty$.

2. بمأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+2x]=0$

أي:

$(\Delta'): y=-2x$ م.م. مائل بجوار $-\infty$.

③

1- بين أنه يوجد مماس أو أكثر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يعامد المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$.

نحل المعادلة:

$a.f'(x_0)=-1$

④

2- بين أنه يوجد مماس أو أكثر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يشمل النقطة ذات الإحداثيين (α,β).

نحل المعادلة

$\beta=f'(x_0)(\alpha-x_0)+f(x_0)$

لتعيين قيمة أو قيم x_0.

⑤

لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ وإشارتها:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f(x)$	+	0	−	0	+

لتكن الدالة g المعرفة في كل حالة بـ D_g وعبارة مشتقتها

$D_g=\mathbb{R}$: $g'(x)=f(x^2)$ ✓

$D_g=]0,+\infty[$: $g'(x)=f(\ln x)$ ✓

$D_g=\mathbb{R}^*$: $g'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ ✓

عين إشارة $g'(x)$ ثم اعط تغيرات g في كل حالة.

الخطوات

1- جدول تغيرات البنت $u(x)=x^2$

2- إستنتاج السوابق بالدالة البنت

الحالة 1: $g'(x)=f(x^2)$

$g=f\circ u \;/\; u(x)=x^2$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x^2	$+\infty$	↘		0	↗		↗ $+\infty$
①		1				1	

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f(x)$	② +	0	−	0	+ ③

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	−	‖	+	0	−

الدالة g:

متزايدة تماما على: $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

متناقصة تماما على: $]-1,1[$

الحالة 2: $g'(x)=f(\ln x)$

$g=f\circ u \;/\; u(x)=\ln x$.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f(x)$	② +	0	−	0	+

x	0		e^{-1}		e^{1}	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	↗	-1	↗	1	↗ $+\infty$
①						

x	0	e^{-1}	e^{1}	$+\infty$
$g'(x)$	+	0 −	0	+

الدالة g:

متزايدة تماما على: $]0,e^{-1}]\cup[e,+\infty[$

و متناقصة تماما على: $[e^{-1},e^{1}]$

الحالة 3: $g'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f(x)$	+	0	−	0	+

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	↘		‖		↘	0
			$-\infty$		$+\infty$		

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$g'(x)$	−	0	+	‖	+	0	−

الدالة g:

متناقصة تماما على: $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

ومتزايدة تماما على $]-1,0[\cup]0,1[$

ملاحظة:

- معادلة تفاضلية من الشكل $f(x)=ce^{ax}$ حلها $y'=ay$ حيث $c\in\mathbb{R}$. ثابت حقيقي.
- معادلة تفاضلية من الشكل $f(x)=ce^{ax}-\frac{b}{a}$ حلها $y'=ay+b$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

⑥

1) حل المعادلة التفاضلية:

$2y' + y = 0$

ب) عين الحل الخاص f الذي يحقق

$f(\ln 4) = 1$

2- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x) = 3.e^{-2x} - 4$

جد معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ حيث تكون الدالة f حلا لهذه المعادلة.

التحقيق:

$f(x) = 3.e^{-2x} - 4$

$f'(x) = -6.e^{-2x}$

$-6.e^{-2x} = -2(3.e^{-2x} - 4) - 8$

$= -6.e^{-2x} + 8 - 8$

$= -6.e^{-2x}$

العبارة:

$f(x) = 3.e^{-2x} - 4$.

حل للمعادلة

$y' = -2y - 8$.

⑦

1- 1) حل المعادلة التفاضلية:

$f(x) = C.e^{-\frac{1}{2}x}$

ب) الحل الخاص:

لدينا $f(\ln 4) = 1$

أي $C.e^{-\frac{1}{2}\ln 4} = 1$

$C.e^{\ln(4)^{-1/2}} = 1$

$C.\frac{1}{\sqrt{4}} = 1$

$C = 2$

أي $f(x) = 2.e^{-\frac{1}{2}x}$

2- إيجاد معادلة تفاضلية:

$f(x) = C.e^{ax} - \frac{b}{a}$

$f(x) = 3.e^{-2x} - \left(\frac{-8}{-2}\right)$

بالمطابقة:

$C = 3$; $a = -2$; $b = -8$

$y' = -2y - 8$

إستنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول (E_f) إلى (E_g).

حيث $g(x) = f(-x)$

⑧

$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

(E_f) يناظر (E_g) بالنسبة إلى محور التراتيب.

⑨

M و N نقطتان من (E_f) ذواتا الفاصلتين x و $-x$ على الترتيب مع $x \in \mathbb{R}^*$

بين أن (MN) و (T) متوازيان.

$(T): y = -\frac{1}{6}x + \ln 2$

ولدينا:

$M(x; \ln(1+e^x) - \frac{2}{3}x)$

$N(-x; \ln(1+e^x) - \frac{1}{3}x)$

$\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{-1/3\,x}{2x} = \frac{-1}{6} = f'(0)$

⑨

بين أن $f(x) = 3$ تقبل حل وحيد α حيث $1,1 < \alpha < 1,2$

نحسب $f(1,1)$ و $f(1,2)$

نجد النتائج محصورة في 3.

Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بإنضمامكم لي

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

أفكار فيديوهات الأستاذ نور الدين

المتتاليات

ضع تخمين حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

المتتالية (متناقصة / متزايدة) و تتقارب نحو ℓ فاصلة تقاطع ( ) حيث $\ell =$.

لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1$

u_n معرفة بحدها الأول $u_0 = 2$

① أحسب u_1، u_2، u_3.

② (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ:

$v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

برهن بالتراجع أن (v_n) متتالية ثابتة.

البرهان بالتراجع:

تكون v_n ثابتة إذا كانت جميع حدودها متساوية أي: $u_{n+1} = u_n$

معناه نفس القيمة $v_{n+1} = v_0 = v_n$

$v_0 = u_0 + \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 3$

$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_1 = 3 \end{cases}$

✓ من اجل $n = 0$

$P(0)$ محققة

$v_1 = v_0$

✓ نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل n:

$v_n = 3$

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي

$v_{n+1} = 3$

لدينا $v_n = 3$

الفكرة تبدأ:

$v_{n+1} = u_{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$= \left(\frac{2}{3}\right)\left[u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + 1$

الهدف

$= \left(\frac{2}{3}\right).v_n + 1$

$= \frac{2}{3} \times 3 + 1$

أي

$\boxed{v_{n+1} = 3}$

ومنه:

$P(n+1)$ محققة أي:

v_n متتالية ثابتة.

الدالة f معرفة على $[0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$

و متزايدة تماما على مجال $[0, +\infty[$

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = 3$ ومن أجل $n \in \mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1} = f(u_n)$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n \leqslant 3$

✓ من اجل $n = 0$

$0 \leqslant 3 \leqslant 3$

محققة.

✓ نفرض أن $P(n)$ محققة من اجل n: $0 \leqslant u_n \leqslant 3$

ونبرهن صحة $P(n+1)$

العبارة صعبة إذن:

الخطة البديلة

بما أن الدالة المرفقة f متزايدة تماما على $[0, 3]$

$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(3)$

و

الهدف

$0 \leqslant u_{n+1} < \frac{18}{7} \leqslant 3$

ومنه

$\boxed{0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3}$

أي:

$P(n+1)$ محققة و

$0 \leqslant u_n \leqslant 3$

www.facebook.com/bac.rym
سعيدة بانضمامكم لي

أثبت أنه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$

$4^n + 2$ مضاعف للعدد 3.

✓ من أجل $n = 0$

$4^0 + 2 = 3$

$P(0)$ محققة.

✓ نفرض أن $P(n)$ محققة من اجل n:

$4^n + 2 = 3K \Rightarrow 4^n = 3K - 2$

ونبرهن صحة: $P(n+1)$

أي $4^{n+1} + 2 = 3K$

الفكرة تبدأ:

$4^{n+1} + 2 = 4^n.4 + 2$

$= 4(3K - 2) + 2$

$= 12K - 8 + 2$

$= 12K - 6$

$= 3(4K - 2)$

$\boxed{4^{n+1} + 2 = 3K' \mid K' = 4K - 2}$

الهدف.

ومنه $P(n+1)$ محققة

أي $4^n + 2 = 3K$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

لدراسة إتجاه تغير المتتالية (U_n):

① ندرس إشارة $U_{n+1} - U_n$.

② نقارن بين $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و 1.

التقارب:

تقبل دون برهان

إذا كانت U_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة.

إذا كان U_n متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

لدينا: $U_0 = 1$ / $0 < U_n < 3$

ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$U_{n+1} = \sqrt{2.U_n + 3}$

1. أدرس إتجاه تغير المتتالية.
2. أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

---

1. إتجاه التغير:

$U_{n+1} - U_n$

$\sqrt{2.U_n + 3} - U_n$

الفكرة: نضرب في المرافق.

$\frac{(\sqrt{2.U_n+3} - U_n)(\sqrt{2.U_n+3} + U_n)}{(\sqrt{2.U_n+3} + U_n)}$

$\frac{(\sqrt{2.U_n+3})^2 - U_n^2}{\sqrt{2.U_n+3} + U_n}$

$0 < U_n < 3$ ← جذر موجب

معناه $\sqrt{2.U_n+3} + U_n > 0$

ومنه: إشارة الفرق من إشارة البسط.

$-U_n^2 + 2U_n + 3 = 0$

نضع $x = U_n$ (للتسهيل).

$-x^2 + 2x + 3 = 0$

$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
		$-$	0	$+$	0	$-$	

$0 < U_n < 3$

من الجدول U_n متزايدة تماما على مجال $]0, 3[$.

2. حساب ℓ

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$

$\lim \sqrt{2.U_n + 3} = \lim U_n = \ell$

متقاربة نحو نهاية ℓ.

$\sqrt{2.\ell + 3} = \ell$ ـ $\ell \geq 0$

$2\ell + 3 = \ell^2$

$-\ell^2 + 2\ell + 3 = 0$

حلين مع U_n متزايدة

$\begin{cases} \ell_1 = 3 \checkmark \\ \ell_2 = -1 \times \end{cases}$

لدينا: $U_{n+1} = 3 + \sqrt{U_n - 3}$

برهن من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2 + 7U_n - 12}{\sqrt{U_n - 3} + U_n - 3}$

البرهان:

$U_{n+1} - U_n = 3 + \sqrt{U_n - 3} - U_n$

$= \sqrt{U_n - 3} - (U_n - 3)$

الفكرة: نضرب في المرافق.

$\frac{(\sqrt{U_n-3} - (U_n-3))(\sqrt{U_n-3} + (U_n-3))}{(\sqrt{U_n-3} + (U_n-3))}$

$\frac{-U_n^2 + 7U_n - 12}{\sqrt{U_n-3} + (U_n-3)}$

لدينا $f(U_n) = \frac{2U_n^2}{U_n + 4} = U_{n+1}$

و $0 \leq U_n \leq 3$

1. أدرس إشارة العدد $7U_{n+1} - 6U_n$ وإستنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$

$0 \leq U_{n+1} \leq \frac{6}{7} U_n$

ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$0 \leq U_n \leq 3.\left(\frac{6}{7}\right)^n$

ج. أحسب نهاية المتتالية (U_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$.

---

1. دراسة الإشارة:

$7U_{n+1} - 6U_n = 7\left(\frac{2.U_n^2}{U_n + 4}\right) - 6U_n$

$= \frac{8.U_n^2 - 24.U_n}{U_n + 4}$

المقام: $0 \leq U_n < 3$

$4 < U_n + 4 < 7$

موجب على مجال $[0, 3[$

البسط:

$U_n(8U_n - 24)$

U_n	$-\infty$		0		3		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ أحسب نهاية

مع العلم $3 < U_n < 4$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$.

$3 + \sqrt{\ell - 3} = \ell$

$\sqrt{\ell - 3} = \ell - 3$

شرط ضروري: $\ell - 3 > 0$

$\ell - 3 = (\ell - 3)^2$

$-\ell^2 + 7\ell - 12 = 0$

$\begin{cases} \ell = 3 \times & \text{مرفوض} \\ \ell = 4 \checkmark & \text{مقبول} \end{cases}$

[redacted] Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بإنضمامكم لي

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$U_n(8U_n - 24) \leq 0$

ومنه

$7U_{n+1} - 6U_n \leq 0$

الإستنتاج:

لدينا:

$7U_{n+1} - 6U_n \leq 0$

$7U_{n+1} \leq 6U_n$

$U_{n+1} \leq \frac{6}{7} U_n$

وأثبتنا سابقاً أن

$0 \leq U_{n+1} \leq 3$

ومنه،

$0 \leq U_{n+1} \leq \frac{6}{7}.U_n$

ب- البرهان بالتراجع:

✓ $P(0)$ محققة

$0 \leq 3 \leq 3$

✓ نفرض $P(n)$ محققة

$0 \leq U_n \leq 3.\left(\frac{6}{7}\right)^n$

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي:

$0 \leq U_{n+1} \leq 3.\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$

لدينا: $0 \leq U_n \leq 3.\left(\frac{6}{7}\right)^n$

$0 \leq \frac{6}{7} U_n \leq 3.\left(\frac{6}{7}\right)^n.\left(\frac{6}{7}\right)^1$

من سؤال السابق: $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{6}{7}.U_n$

ومنه:

$0 \leq U_{n+1} \leq 3.\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$

معناه

$P(n+1)$ محققة

إذن

$0 \leq U_n \leq 3.\left(\frac{6}{7}\right)^n$.

ج- حساب نهاية U_n:

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} 3.\left(\frac{6}{7}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3.\left(\frac{6}{7}\right)^n = 0$

نهاية البرهان 1: $(\forall n)$ ، قيمة أصغر من 1 (0)

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq 0$

ومنه

حسب نظرية الحصر

نجد

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

لدينا:

$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} \end{cases}$

ولدينا:

$0 \leq U_n \leq 2$

متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى 2 ، $U_n \leq 2$.

• بين أن: $2 - U_{n+1} \leq \frac{2 - U_n}{2}$

• بين أن: $0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ثم إستنتج: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n =$.

1- البرهان: مهم.

$2 - U_{n+1} \leq \frac{2 - U_n}{2}$

• لدينا:

$2 - U_{n+1} = 2 - \sqrt{U_n + 2}$

$= \frac{(2 - \sqrt{U_n+2})(2 + \sqrt{U_n+2})}{2 + \sqrt{U_n+2}}$

إذن

$2 - U_{n+1} = \frac{2 - U_n}{2 + \sqrt{U_n+2}}$ ...(A)

• لدينا:

$0 \leq \sqrt{U_n + 2} \leq 2$

$2 \leq 2 + \sqrt{U_n+2} \leq 4$

$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2 + \sqrt{U_n+2}} \leq \frac{1}{2}$ ...(B)

ولدينا من جهة أخرى

$0 \leq U_n \leq 2$

$0 \leq 2 - U_n \leq 2$ ...②

الفكرة: نضرب ② في ①

[redacted] Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بإنضمامكم لي

$0 \times \frac{1}{4} \leq \frac{2 - U_n}{2 + \sqrt{U_n+2}} \leq \frac{2 - U_n}{2}$

من (A):

$0 \leq 2 - U_{n+1} \leq \frac{2 - U_n}{2}$

أي

$2 - U_{n+1} \leq \frac{2 - U_n}{2}$

2- البرهان:

$0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

الفكرة: البرهان بالتراجع:

• التحقق $P(1)$

$0 \leq 1 \leq 1$

محققة.

• نفرض أن $P(n)$ محققة:

$0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ونبرهن صحة $P(n+1)$

$0 \leq 2 - U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا $0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

نضرب في $\left(\frac{1}{2}\right)$:

$0 \leq \frac{2 - U_n}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

ولدينا:

من الجواب السابق: الفكرة.

$2 - U_{n+1} \leq \frac{2 - U_n}{2}$

ومنه

$0 \leq 2 - U_{n+1} \leq \frac{2 - U_n}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

إذن

$0 \leq 2 - U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

معناه

$P(n+1)$ محققة

ومنه

$0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

• إستنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

لدينا:

$0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty}(2-U_n)=0$

أي

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 2$$

لتكن (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$U_0=-1$ و $U_{n+1}=\frac{4}{4-U_n}$

وتعتبر المتتالية (v_n) حسابية.

• عين حدها الأول وأساسها $v_n=\frac{1}{U_n-2}$

• البرهان أن (v_n) متتالية حسابية:

الهدف: $v_{n+1}=v_n+r$

لدينا

$v_n=\frac{1}{U_n-2}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{U_{n+1}-2}-\frac{1}{U_n-2}$

$=\frac{4-U_n}{2(U_n-2)}-\frac{1}{U_n-2}$

$=\frac{2-U_n}{2(U_n-2)}$

$=-\frac{1}{2}\left(\frac{U_n-2}{U_n-2}\right)$

ومنه

$$v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{2}$$

$v_{n+1}=v_n-\frac{1}{2}$

حدها الأول:

$v_0=-\frac{1}{3}$

ومنه

$$v_{n+1}=-\frac{1}{3}-\frac{n}{2}$$

احسب نهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n=\lim_{n\to+\infty}\left(e^{\ln 3-n\ln 3}+3\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n=\lim_{n\to+\infty} e^{\ln 3-n\ln 3}+3$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\ln 3}}{e^{n\ln 3}}+3$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^1}{e^n}\right)^{\ln 3}+3$$

0

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=3$

المتتالية الهندسية

المجاميع: $S=U_0+U_1+U_2+\dots+U_n$

$q\neq 1$: $S=U_0.\frac{q^{n-0+1}-1}{q-1}$

$q=1$: $S=(n-1).U_n$

أحسب نهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n=\lim\frac{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{2}{7}\right)^n-6}{\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{2}{7}\right)^n-1}$$

استنتج أن (U_n) متقاربة.

1. حساب النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n=\lim\frac{(3\sqrt{8})(2\sqrt{7})^n-6}{(3\sqrt{8})(2\sqrt{7})^n-1}$$

بما أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n=0$

فإن

$$\lim_{n\to+\infty} U_n=6$$

2. استنتاج أن U_n متقاربة:

لأن نهايتها منتهية.

(U_n) متتالية هندسية غير منتهية

حدودها الموجبة تماما حيث:

$U_0=2$ و $U_3=9U_4$

① عين اساس المتتالية U_n.

② أحسب U_n بدلالة n.

③ احسب بدلالة n المجموع (S_n)

حيث: $S=U_0+U_1+\dots+U_n$

④ تعيين أساس U_n (هندسية):

$U_n=U_p.q^{n-p}$

$$\begin{cases}U_1=U_0.q^1\\U_3=U_0.q^3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}U_1=2.q\dots(1)\\U_3=2.q^3\dots(2)\end{cases}$$

الفكرة:

$\begin{cases}U_1=2.q\\U_3=2.q^3\end{cases}$

ومنه $q(2q)=2q^3$

أي $q^3=q$

لها حلين

$\begin{cases}q=3 & \checkmark\\ q=-3 & \times\end{cases}$ مرفوض

الحدود موجبة إذن الأساس موجب.

أي $\boxed{q=3}$

② حساب U_n: $U_n=2.3^n$

③ المجموع:

الحالة 1: $S=U_0+U_1+\dots+U_n$

$S=U_0.\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

$=2.\frac{3^{n+1}-1}{3-1}$

أي

$$S=3^{n+1}-1$$

الحالة 2: $S'=U_0^2+U_1^2+U_2^2+\dots+U_n^2$

الفكرة: ثابت.

$(U_1)^2=(U_0.q^1)^2$

$(U_2)^2=(U_0.q^2)^2$

$(U_3)^2=(U_0.q^3)^2$

$(U_4)^2=(U_0.q^4)^2$

$S'=U_0^2+(U_0.q)^2+(U_0.q^2)^2+\dots+(U_0.q^n)^2$

$=U_0^2+U_0^2.q^2+U_0^2.q^4+\dots+U_0^2.q^{2n}$

$=U_0^2[1+q^2+q^4+\dots+q^{2n}]$

متتالية حسابية جديدة.

$S'=U_0^2.\left[1.\frac{(q^2)^{n-0+1}-1}{q^2-1}\right]$

$$S'=\frac{q^{n+1}-1}{2}$$

[redacted] Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بانضمامكم لي

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الحالة 03:

$T_n = U_0 . U_1 . U_2 \dots U_n$

$U_1 = U_0 . q$

$U_2 = U_0 . q^2$

$U_3 = U_0 . q^3$

أي

$T_n = U_0 . (U_0 . q)(U_0 . q^1) \dots (U_0 . q^n)$

$T_n = (U_0 . U_0 . U_0 \dots U_0)(q . q^2 . q^3 . q^4 \dots q^n)$

فكرة: الفصل

$T_n = U_0^{n+1} \left(q^{1+2+3+\dots+n} \right)$

متتالية حسابية.

$T_n = 2^{n+1} \left(3^{\frac{n-1+1}{2} \cdot (1+n)} \right)$

$\boxed{T_n = 2^{n+1} \left(3^{\frac{n}{2} \cdot (n+1)} \right)}$

الحالة 04:

$S'' = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \dots + \frac{1}{U_n}$

$(U_1) = U_0 . q^1$

$(U_2) = U_0 . q^2$

$(U_3) = U_0 . q^3$

أي

$S'' = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_0 . q} + \dots + \frac{1}{U_0 . q^n}$

فكرة: $\frac{1}{U_0}$ عامل مشترك

$S'' = \frac{1}{U_0} \left[1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots \frac{1}{q^n} \right]$

$S'' = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \dots + \frac{1}{3^n} \right)$

$S'' = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$

متتالية هندسية.

$S'' = \frac{1}{2} \left(\frac{(1/3)^{n+1} - 1}{(1/3) - 1} \right)$

$S'' = \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1 \right)$

لدينا:

$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n - 1}{2} \end{cases}$

---

a عدد حقيقي غير معدوم

من أجل $n \in \mathbb{N}$ نضع:

$V_n = U_n + a$

عين قيمة العدد a التي يكون من أجلها (V_n) متتالية هندسية

لدينا: $v_n = U_n + a$

ومنه: $\boxed{U_n = v_n - a}$

ولدينا $v_{n+1} = v_n . q$

إذن:

$v_{n+1} = U_{n+1} + a$

$= \frac{U_n - 1}{2} + a$

$= \frac{v_n - a - 1}{2} + a$

$\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n - \frac{a}{2} - \frac{1}{2} + a}$

الهدف (متتالية)

$-\frac{a}{2} - \frac{1}{2} + a = 0$

ومنه

$\boxed{a = 1}$

المتتاليتان (U_n) و (v_n) معرفتان من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ بـ:

$U_n = \frac{n-1}{n}$; $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

أثبت أن المتتاليتان (U_n) و (v_n) متجاورتان ثم جد نهايتهما المشتركة.

إشارة U_n:

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n(n+1)} > 0$

إشارة v_n:

$v_{n+1} - v_n = \frac{-(2n+1)}{n^2 (n+1)^2} < 0$

وبما أن:

$\lim_{n \to +\infty} (U_n - v_n) = 0$

والمتتاليتان إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة فهما متجاورتان.

[redacted] Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بإنضمامكم لي

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

أفكار فيد يومات الأستاذ نور الدين

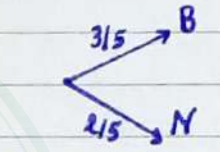
[redacted] Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بإنضمامكم لي

الإحتمالات

يحتوي كيس على 5 كريات (3 بيضاء و سوداوين) [لا نفرق بينها باللمس] نسحب كرية عشوائيا ونسجل لونها [B أبيض، N أسود].

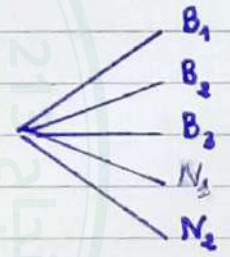
$\Omega = \{B, N\}$

$P(B) = \frac{3}{5}$; $P(N) = \frac{2}{5}$



أو

$\Omega = \{B_1, B_2, B_3, N_1, N_2\}$



صندوق 5 كريات مرقمة من 1 إلى 5.
نسحب على التوالي 3 كريات بالإرجاع.
① ما هو عدد الحالات الممكنة؟
نعيد التجربة دون إرجاع.
① ما هو عدد الحالات الممكنة؟
② ما هو إحتمال الحادثة "A".
"الكرية الثانية المسحوبة تحمل الرقم 4".

عدد القوائم الممكنة دون إرجاع:
$5 \times 4 \times 3 = 60$
عدد القوائم الممكنة بالإرجاع:
$5 \times 5 \times 5 = 125$
إحتمال:
$P(A) = \frac{4 \times 3}{60} = \frac{1}{5}$

قاعدة:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

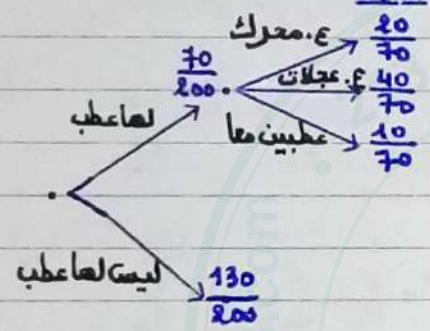
كيس A به أقلام: 6 زرقاء و 4 حمراء.
كيس B به أقلام: 9 زرقاء و 5 حمراء.
نسحب بطريقة عشوائية قلما من كل كيس
① عدد الحالات الممكنة Ω
② أحسب إحتمال كل حادثة من الحوادث التالية:
E: "الحصول على قلمين حمراوين"
F: "الحصول على قلم واحد أحمر"
G: "الحصول على الأقل على قلم أحمر".

عدد العناصر الممكنة:
$10 \times 14 = 140$
الإحتمالات:
إحتمال E:
$P(E) = \frac{4 \times 5}{140} = 0,14$
إحتمال F:
$P(F) = \frac{4 \times 9 + 5 \times 6}{140} = 0,47$
إحتمال G:
$P(G) = P(E) + P(F)$
$= 0,14 + 0,47$
$P(G) = 0,61$

في حظيرة للسيارات توجد 200 سيارة. 20 منها لها عطب في المحرك و 40 منها لها عطب في العجلات. و 10 منها فيها العطبين نختار عشوائيا سيارة من الحظيرة

A: هي الحادثة "سيارة فيها في محرك"
B: هي الحادثة "سيارة فيها عطب في العجلات"
① ما هو إحتمال أن السيارة يوجد فيها على الأقل واحد من العطبين.
② ما هو إحتمال أن السيارة لا يوجد فيها أي عطب.

الرسم:



1. ما هو إحتمال أن السيارة يوجد فيها على الأقل واحد من العطبين.
✓ من الرسم:
$= \frac{7}{20} \times \frac{6}{7} + \frac{7}{20} \times \frac{4}{7} + \frac{7}{20} \times \frac{1}{7} = 0,35$
✓ من الحساب:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A) = \frac{20}{200} = 0,1$
$P(B) = \frac{40}{200} = 0,2$
$P(A \cap B) = \frac{10}{200} = 0,05$
$P(A \cup B) = 0,1 + 0,2 - 0,05$
2. ما هو إحتمال أن السيارة لا يوجد فيها أي عطب
✓ من الرسم: $= \frac{130}{200} = 0,65$
✓ من الحساب:
$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

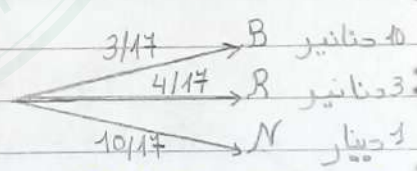
يحتوي كيس على 3 كريات بيضاء، 4 كريات حمراء، و 10 كريات سوداء، لا نميز بينها باللمس.

- نسحب عشوائيا كرية من الصندوق فيربح الساحب:
  - دينارا واحدا إذا كانت كرية سوداء.
  - ثلاثة دنانير إذا كانت كرية حمراء.
  - 10 دنانير إذا كانت كرية بيضاء.

نعرف المتغير العشوائي X الذي يأخذ قيمة الربح المحتمل في اللعبة.

1- عين القيم الممكنة للمتغير X.
2- عين قانون الإحتمال للمتغير X.
3- أحسب الأمل الرياضياتي.
4- أحسب التباين ثم الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي.

الأمل الرياضياتي:
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P_i$$
التباين:
$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x))^2 . P_i$$
الإنحراف المعياري:
$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$



① قيم المتغير العشوائي X:

$\{1, 3, 10\}$

1 DA → N
3 DA → R
10 DA → B

② قانون الإحتمال للمتغير X:

$x = 1$ $\quad P(X=1) = \frac{10}{17}$
$x = 3$ $\quad P(X=3) = \frac{4}{17}$
$x = 10$ $\quad P(X=10) = \frac{3}{17}$

x_i	1	3	10
$P(x=x_i)$	$\frac{10}{17}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{3}{17}$

③ حساب الأمل الرياضياتي:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i . P_i$$
$$= \sum_{i=1}^{3} 1\left(\frac{10}{17}\right) + 3\left(\frac{4}{17}\right) + 10\left(\frac{3}{17}\right)$$
$$E(x) = 3,06$$

④ حساب التباين:

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + E(x))^2 . P_i$$
$$= \sum_{i=1}^{3} (x_i - E(x))^2 . P_i$$
$$= (1-3,06)^2 . \frac{10}{17} + (3-3,06)^2 . \frac{4}{17} + (10-3,06)^2 . \frac{3}{17}$$
$$V(x) = \frac{3178}{289}$$

⑤ حساب الإنحراف المعياري:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$
$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{3178}{289}} = 3,32$$

يرمي لاعب زهري نرد رباعي الوجه $\{4, 3, 2, 1\}$

نعرف المتغير العشوائي X.

- مجموع الرقمين زوجيا ← يربح نفس مجموع الرقمين بالدينار.
- مجموع الرقمين فرديا ← يخسر نفس مجموع الرقمين بالدينار.

① عين قيم المتغير العشوائي X.
② عين قانون الإحتمال للمتغير.

① تعيين قيم المتغير X

الفكرة:

إنشاء جدول.

[redacted] Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بإنضمامكم لي

نرد 1 \ نرد 2	1	2	3	4
1	+2	-3	+4	-5
2	-3	+4	-5	+6
3	+4	-5	+6	-7
4	-5	+6	-7	+8

عدد الحالات الممكنة: 16 حالة.

قيم المتغير العشوائي.

$I = \{-7, -5, -3, +2, +4, +6, +8\}$

② تعيين قانون الإحتمال:

x_i	-7	-5	-3	+2	+4	+6	+8
$P(x=x_i)$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

زهرة نرد ذات أربعة أوجه $\{4, 3, 2, 1\}$

نرمز بالرمز P_i لاحتمال ظهور الوجه ذي الرقم i $\quad i \in \{1, 2, 3, 4\}$

- نعلم أن $P_2 = \frac{1}{5}$.
- الحدود P_4, P_3, P_2, P_1 تشكل حدود متتالية حسابية بهذا الترتيب.

① أحسب P_4, P_3, P_1.

② أحسب إحتمال ظهور رقم فردي.

① حساب الحدود: (متتالية حسابية)

$U_2 = U_1 + r$

$P_2 = P_1 + r \Rightarrow P_1 = P_2 - r$
$P_3 = P_2 + r$
$P_4 = P_3 + r \Rightarrow P_4 = P_2 + 2r$

الفكرة:

$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$

$\frac{1}{5} - r + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + r + \frac{1}{5} + 2r = 1$

$r = \frac{1}{10}$

ومنه:

$P_1 = \frac{1}{10}$.
$P_2 = \frac{1}{5}$.
$P_3 = \frac{3}{10}$.
$P_4 = \frac{4}{10}$.

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

8- حساب إحتمال ظهور رقم فردي
لتكن A الحادثة.
"ظهور رقم فردي"

$P(A) = P_1 + P_3$

$= \frac{1}{10} + \frac{3}{10}$

$P(A) = \frac{4}{10}$

كيس يحتوي على كرتين حمراوتين و ثلاث كرات سوداء وكرة بيضاء نسحب عشوائيا كرتين على التوالي بدون إرجاع، و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات السوداء المسحوبة.

① مثل النتائج بإستعمال
أ- شجرة الإحتمالات.
ب- جدول.

② عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X.

$x = \{0, 1, 2\}$

② تعيين قانون الإحتمال:

$x = \{0, 1, 2\}$

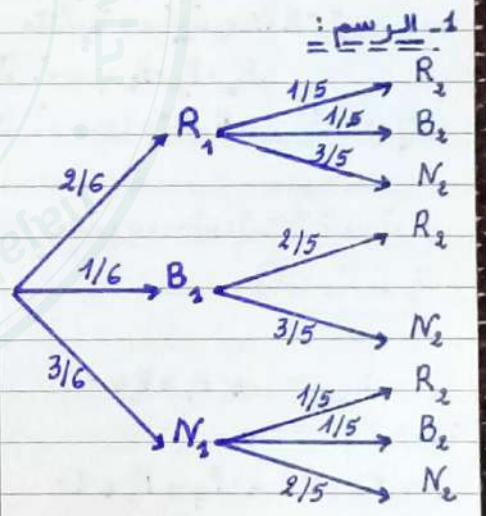
$P(x=0) = \frac{6}{30}$

$P(x=1) = \frac{18}{30}$

$P(x=2) = \frac{6}{30}$

x_i	0	1	2
$P(x=x_i)$	6/30	18/30	6/30

1- الرسم:



2- الجدول:

	R_1	R_2	B_1	N_1	N_2	N_3
R_1		0	0	1	1	1
R_2	0		0	1	1	1
B_1	0	0		1	1	1
N_1	1	1	1		2	2
N_2	1	1	1	2		2
N_3	1	1	1	2	2	

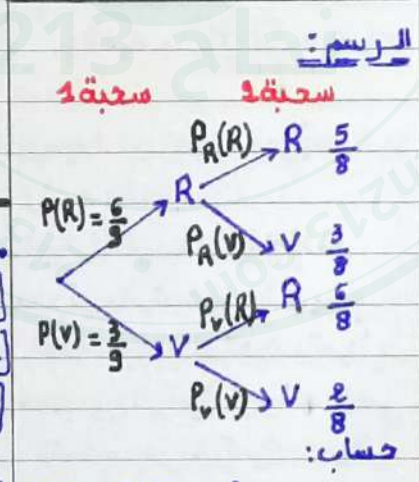
يحتوي صندوق على 5 كريات حمراء و 3 كريات خضراء. لا نميز بينها عند اللمس. نسحب كرتين على التوالي ودون إرجاع.

لتكن الحادثة A: "الكرة المسحوبة الأولى حمراء".

و الحادثة B: "الكرة المسحوبة الثانية خضراء".

أحسب $P(A)$، $P_A(B)$ ثم إستنتج $P(A \cap B)$

الرسم:



حساب: $P(A) = P(R) = \frac{5}{8}$

حساب: $P_A(B) = P_R(V) = \frac{3}{8}$

إستنتاج: $P(A \cap B) = P_A(B) \cdot P(A)$

$P(R \cap V) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$

الإحتمالات الشرطية

القانون:

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

إحتمال B علما أن A محققة:

$P_A(B) = P(A|B)$

قسم فيه 35 تلميذ. منهم 15 بنت، يختار كل تلميذ نوع الرياضة.

الأولاد: 75٪ كرة قدم، 15٪ كرة يد، 10٪ كرة طائرة

البنات: 60٪ كرة يد، 40٪ كرة طائرة

الرموز:

G: "التلميذ المختار ولد".

F: "التلميذة المختارة بنت".

T: "تلميذ يمارس كرة القدم".

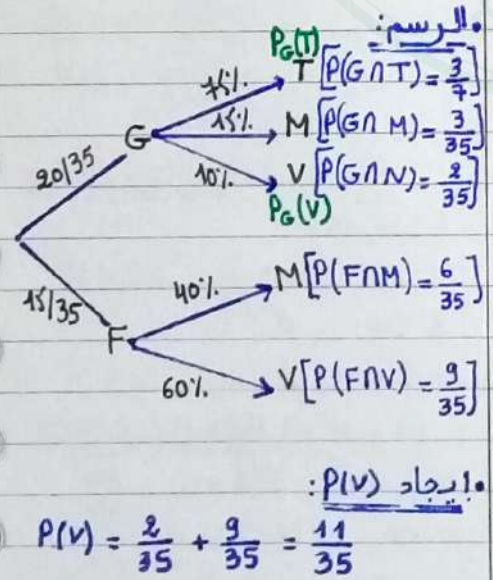
M: "تلميذ يمارس كرة اليد".

V: "تلميذ يمارس كرة الطائرة".

المطلوب:

- رسم الشجرة.
- أحسب احتمال $P(V)$ إحتمال أن تتحقق الحادثة V.
- أحسب الإحتمال الشرطي $P_V(G)$.
- أحسب إحتمال أن يكون التلميذ المختار لا يمارس كرة القدم.

الرسم:



إيجاد $P(V)$:

$P(V) = \frac{2}{35} + \frac{9}{35} = \frac{11}{35}$

[redacted] Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بإنضمامكم لي

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

• الاحتمال الشرطي:

$$P_V(G) = \frac{P(G \cap V)}{P(V)} = \frac{2135}{11135}$$

$$\boxed{P_V(G) = \frac{2}{11}}$$

• $\overline{T}$ تلميذ لا يمارس كرة القدم:

$$P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - \frac{3}{7}$$

$$= \frac{4}{7}$$

ملاحظة:

ما إحتمال أن يكون التلميذ ضعيف في الفيزياء أو في الرياضيات

$$P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F)$$

أو — و

[redacted] Bac Rymo

www.facebook.com/bac.rymo

سعيدة بإنضمامكم لي

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

أنكار فيديوهات الأستاذ نور الدين

الأعداد المركبة

ليكن z و z' عددان مركبان حيث: $z=\frac{2+i}{1-i}$ و $z'=\frac{2-i}{1+i}$

بين بدون حساب أن $z+\overline{z'}$ حقيقي و $z-\overline{z'}$ تخيلي صرف.

لدينا $\overline{z}=\frac{2-i}{1+i}=z'$

$z+\overline{z'}=\overline{z}+\overline{z'}=z'+\overline{z'}=2Re(z')$

$z-\overline{z'}=\overline{z}-\overline{z'}=z'-\overline{z'}=2iIm(z')$

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$z\overline{z}+z-\overline{z}-5-2i=0$

الفكرة: نضع $\begin{cases}z=x+iy\\ \overline{z}=x-iy\end{cases}$

$(x+iy)(x-iy)+x+iy-x+$

$iy-5-2i=0$

$\underbrace{x^2+y^2-5}_{Re}\underbrace{-2yi-2i}_{Im}=0$

$\begin{cases}x^2+y^2-5=0\\ -2y-2=0\end{cases}$

$S=\{2+i;-2+i\}$

نضع: $z'=\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}+i\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}$

- عين مجموعة النقط M حيث يكون z' حقيقي.
- عين مجموعة النقط M حيث يكون z' تخيلي صرف.

1- مجموعة النقط حتى يكون z' حقيقي يجب: $\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}=0$

ومنه $\begin{cases}-2y=0\\ (x-1)^2+y^2\neq 0\end{cases}$

أي $\begin{cases}y=0\\ (1,0)\neq 0\end{cases}$

مجموعة النقط هي المستقيم ذو المعادلة $y=0$ أي موازي لـ $(x'x)$ ماعدا $A(1,0)$

2- مجموعة النقط حتى يكون z' تخيلي يجب: $\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}=0$

ومنه $\begin{cases}x^2-y^2-1=0\\ (x-1)^2+y\neq 0\end{cases}$

الفكرة:

$x^2-y^2=1$

$(x-0)^2-(y-0)^2=1^2$

مجموعة النقط هي دائرة مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها $r=1$ باستثناء $A(1,0)$

لدينا: $z_A=\sqrt{3}+i$; $z_B=-\sqrt{3}-i$

$z_C=2i$; $z_D=\sqrt{3}+3i$

أحسب $|z_A|$ ، $|z_B|$ ، $|z_C|$

ماذا تستنتج ؟

الحساب:

$|z_A|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=2$

$|z_B|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$

$|z_C|=\sqrt{(0)^2+(2)^2}=2$

ومنه:

$|z_A|=|z_B|=|z_C|$

القاعدة

نستنتج أن النقط تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $r=2$.

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z

أ- $|z+1+2i|=|z+4|$

ب- $|2z-i|=2$

ج- $|\overline{z}+i|=2$

أ- $|z-(-1-2i)|=|z-4|$

$|z-z_A|=|z-z_B|$

حيث: $\begin{cases}z_A=-1-2i\\ z_B=4\end{cases}$

أي: $AM=BM$

مجموعة النقط M هي مستقيم محوري للقطعة $[AB]$.

ب- $|2z-i|=2$

$|2\left|z-\frac{1}{2}i\right|=2$

$|2|\left|z-\frac{1}{2}i\right|=2$

ومنه

$\left|z-\frac{1}{2}i\right|=1$

$|z-z_A|=1$ حيث $z_A=\frac{1}{2}i$

أي:

مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A $A(0,\frac{1}{2})$ ونصف قطرها $r=1$

ج- $|\overline{z}+i|=2$

$|\overline{z+i}|=2$

$|\overline{z}-\overline{i}|=2$

حيث: $z_B=i$

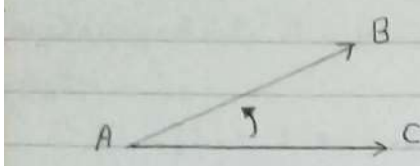
أي:

مجموعة النقط M هي دائرة مركزها B $B(0,1)$ ونصف قطرها $r=2$. مع

[redacted] Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بإنضمامكم لي

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213



$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=(\vec{OI},\vec{AB})-(\vec{OI},\vec{AC})=(\vec{AC},\vec{AB})$

ج- طبيعة المثلث ABC:

حساب الطويلة:

$\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right| = 1-\frac{AB}{AC}$

حساب العمدة:

$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right) = -\frac{\pi}{3}+2K\pi \mid K\in\mathbb{Z}$

ومنه:

المثلث ABC متقايس الأضلاع.

ما هي مجموعة النقط لعمدة:

$\arg(z-1)=\frac{\pi}{2}+2K\pi$

$\arg(z-2i)=-\frac{\pi}{4}+2K\pi \mid K\in\mathbb{Z}$

---

1. $\arg(z-1)=\frac{\pi}{2}+2K\pi \mid K\in\mathbb{Z}$

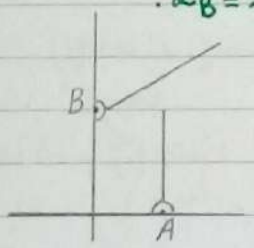
مجموعة النقط M هي نصف مستقيم $[AM)-\{A\}$ ويميل بدرجة 90°.

و $z_A=1$.

2. $\arg(z-2i)=\frac{\pi}{4}+2K\pi$

مجموعة النقط M هي نصف مستقيم $[BM)-\{B\}$ ويميل بدرجة 45°.

و $z_B=2i$.



Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بانضمامكم لي

$\frac{\pi}{2}=\frac{180°}{2}=90°$

$\begin{cases}\cos\frac{-1111\pi}{2}=0\\ \sin\frac{-1111\pi}{2}=1\end{cases}$

$-1\leqslant\cos x\leqslant 1$

$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$

$-x$

$\begin{cases}\cos(-x)=\cos x\\ \sin(-x)=-\sin x\end{cases}$

$\pi+x$

$\begin{cases}\cos(\pi+x)=-\cos x\\ \sin(\pi+x)=-\sin x\end{cases}$

$\pi-x$

$\begin{cases}\cos(\pi-x)=-\cos x\\ \sin(\pi+x)=\sin x\end{cases}$

في مستوى $(o,\vec{OI},\vec{OJ})$ لدينا النقط:

$z_A=-i\sqrt{3}$; $z_B=3+2i\sqrt{3}$

$z_C=-3+2i\sqrt{3}$

1. أعط تفسيرا هندسيا لطويلة و عمدة العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$.

2. ما طبيعة المثلث ABC.

---

1. التفسير الهندسي للطويلة

$\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=\frac{|z_B-z_A|}{|z_C-z_A|}=\frac{AB}{AC}$

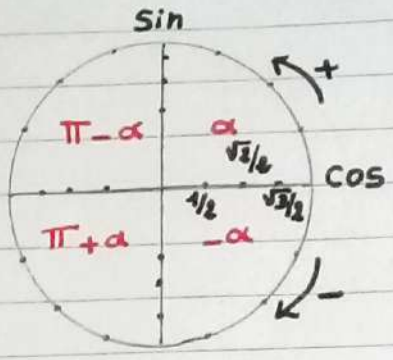
التفسير الهندسي للعمدة:

$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\arg(z_B-z_A)-\arg(z_C-z_A)$

معناه:

$(\vec{AC},\vec{AB})$

الفكرة: الزاوية الموجهة (المقام ثم البسط)



مثل على الدائرة المثلثية النقط:

$\frac{1111\pi}{3}$; $\frac{-1111\pi}{2}$

---

① $\frac{1111\pi}{3}$

لدينا:

$1111=370(3)+1$

معناه:

$(3(370)+1)\pi\div 3$

أي:

$\frac{3(370)\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$

$\frac{370\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$

لأنه زوجي.

$\frac{180°}{3}=60°$

الفكرة:

$\begin{cases}\cos\frac{1111\pi}{3}=\frac{1}{2}\\ \sin\frac{1111\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

---

② $\frac{-1111\pi}{2}$

لدينا:

$-1111=-555(2)-1$

معناه:

$-(-2(555)-1)\pi+2$

أي:

$\frac{-2(555)\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$

$-555\pi-\frac{\pi}{2}$

الفكرة: تفكك

$(-556+1)\pi-\frac{\pi}{2}$

$-556\pi+\pi-\frac{\pi}{2}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

عين مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$|z-1+i| = |z-1-i|$

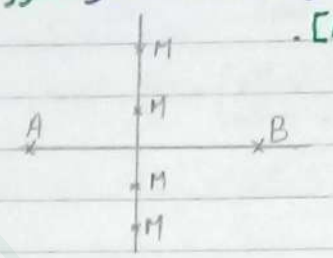
$|z-1+i| = |z-1-i|$

$|z-(1-i)| = |z-(1+i)|$

$|z-z_A| = |z-z_B|$

$AM = BM$

مجموعة النقط M هو محور القطعة $[AB]$.



عين طويلة وعمدة العدد المركب z:

$z = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$z = \sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)$

$z = \sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}$

1. $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

الفكرة:

$-3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$

ومنه

$z = 3(\cos\pi + i\sin\pi)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$z = 3\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$z = 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

2. $z = \sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)$

فكرة 1: $1 = -i^2$

نعوضها أمام $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$:

$z = \sqrt{5}\left(-i^2\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)$

ومنه

$z = i\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

فكرة 2: $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

ومنه:

$z = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

$z = \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

ومنه

$z = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

3. $z = \sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}$

$z = -i^2\sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}$

$z = -i\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i.\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$

$-i = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

$z = \cos\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

ومنه

$z = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$

أعط الشكل الجبري:

$z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{1111\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{1111\pi}{4}\right)\right)$

الفكرة: هي التبسيط.

$\frac{1111\pi}{4} = 277\pi + \frac{3\pi}{4}$

$= 276\pi + \pi + \frac{3\pi}{4}$

$= \frac{7\pi}{4} = 315°$ (بالدرجات)

$\begin{cases}\cos\frac{\pi}{4} = +\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

ومنه

$z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

إذن

$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

عين شكلا أسيا لكل من الأعداد المركبة التالية:

$z_1 = -\sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$z_1 = -\sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$-1 = e^{i\pi}$ الفكرة هي:

$z_1 = \sqrt{2}.e^{i\pi}.e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$= \sqrt{2}.e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)}$

$= \sqrt{2}.e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

[redacted] Bac Rymo

www.facebook.com/bac.rymo

سعيدة بانضمامكم لي

لدينا: $z = z_0 + Ke^{i\theta}$

حالة: لما يكون θ متغير

$\theta = [0, 2\pi]$ يمسح

$z = 1 + i + 5.e^{i\theta}$

مجموعة النقط M هي دائرة

مركزها A، نصف قطرها $r = 5$

حالة: لما يكون K متغير

$K \in \mathbb{R}_+^*$ يمسح

$z = 1 + i + K.e^{i.\frac{\pi}{4}}$

مجموعة النقط M هو نصف مستقيم مبدؤه A وميله $\frac{\pi}{4}$

دستور موافر

من أجل $n \in \mathbb{Z}$

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

من أجل $\theta \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{Z}$

$(e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

$(e^{i\theta})^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

لدينا: $z = \sqrt{2}.\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

• عين قيم الصحيحة n في كل حالة:

أ- z^n حقيقيا.

ب- z^n تخيليا صرفا

أ- z^n حقيقي:

لدينا: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z^n = (\sqrt{2})^n.\left(\cos n.\frac{\pi}{4} + i.\sin n.\frac{\pi}{4}\right)$

حتى يكون z^n حقيقيا يجب أن تكون

$\sin\frac{n\pi}{4} = 0$

الفكرة:

$\frac{n\pi}{4} = K\pi \;/\; K \in \mathbb{Z}$

ب- z^n تخيلي صرف:

$\cos\frac{n\pi}{4} = 0$

الفكرة:

$\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + K\pi$

$\frac{n}{4} = \frac{1}{2} + K$

$n = 4K + 2 \;/\; K \in \mathbb{Z}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بانضمامكم لي

لدينا:
$\begin{cases} z = (3+\sqrt{3}) + i(-3+\sqrt{3}) \\ z = 2\sqrt{6}.e^{-i\frac{\pi}{12}} \end{cases}$
$\begin{cases} u = 3 + i\sqrt{3} \\ u = 2\sqrt{3}.e^{i\frac{\pi}{6}} \end{cases}$
$\begin{cases} v = 1 - i \\ v = \sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{cases}$
أ- استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

الاستنتاج
$z = 2\sqrt{6}.e^{-i\frac{\pi}{12}}$
$= 2\sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right)$
الفكرة: المطابقة بين
$\begin{cases} z = 2\sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right) \\ z = (3+\sqrt{3}) + i(-3+\sqrt{3}) \end{cases}$
نجد:
$\begin{cases} \cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \\ \sin\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \frac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \end{cases}$
ومنه:
$\begin{cases} \cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ \sin\left(\frac{-\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \end{cases}$

حل المعادلة:
$z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 = 0$

المعادلة
$\Delta = [-2.\cos(\theta)]^2 - 4(1)(1)$
$= 4.\cos^2\theta - 4$
$= 4(\cos^2\theta - 1)$
الفكرة: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
$= -4.\sin^2\theta$
$= 4i^2.\sin^2\theta$

الحلول:
$z_1 = \cos\theta - i\sin\theta$
$z_2 = \cos\theta + i\sin\theta$

لدينا: $P(z) = z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i$
بين أن المعادلة $P(z) = 0$ لها حل حقيقي.

الفكرة نضع α ثم نعزل Re و Im:
$\alpha^3 - 2\alpha^2 - i\alpha + 3 - i = 0$
$\alpha^3 - 2\alpha^2 + 3 + (-\alpha - 1)i = 0$
$\begin{cases} \alpha^3 - 2\alpha^2 + 3 = 0 \\ -\alpha - 1 = 0 \end{cases}$ و
ومنه: $\alpha = -1$
أي أن الحل حقيقي.
وهو جذر للمعادلة:
$P(z) = (z+1)(az^2 + bz + c)$

لدينا: $P(z) = z^3 - iz^2 + 3z - 3i$
بين أن المعادلة $P(z) = 0$ لها حل تخيلي صرف.

الفكرة نضع αi (حل تخيلي صرف)
$(\alpha i)^3 - i(\alpha i)^2 + 3(\alpha i) - 3i = 0$
$-\alpha^3 i + \alpha^2 i + 3\alpha i - 3i = 0$
$i(-\alpha^3 + \alpha^2 + 3\alpha - 3) = 0$
مع $i \neq 0$
الفكرة: مجموع المعاملات $= 0$.
$-1 + 1 + 3 - 3 = 0$
إذن للمعادلة جذر وهو: "1".
ومنه نجد.
$\alpha i = 1.i$
$\alpha i = i$
إذن i عدد تخيلي وهو جذر للمعادلة:
$P(z) = (z-i)(az^2 + bz + c)$

عين الجذرين التربعيين للأعداد المركبة التالية: $z = -8 + 6i$

الفكرة: نضع
$\begin{cases} z = w^2. \\ w = x + iy. \end{cases}$

$-8 + 6i = w^2$
$= (x+iy)^2$
$-8 + 6i = \underbrace{x^2 - y^2}_{Re} + \underbrace{2xyi}_{Im}$

الفكرة: الطويلة. $|-8+6i| = 10$
$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2x.y = 6 \end{cases}$
$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \quad \ldots\ldots (1) \\ x^2 - y^2 = -8 \quad \ldots\ldots (2) \\ 2x.y = 6 \quad \ldots\ldots (3) \end{cases}$
$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -3 \end{cases}$
ومنه
كل عدد مركب يقبل جذرين تربعيين متناظرين
$\begin{cases} w_1 = 1 + 3i \quad (x_1 + iy_1) \\ w_2 = -1 - 3i \end{cases}$

لكن لدينا
$P(z) = z^4 - 2\sqrt{3}z^3 + 8.z^2 - 8\sqrt{2}z + 16$
مع $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$
وتقبل الحلين: $P(\sqrt{3}+i) = P(-2i) = 0$
. إستنتج الحلين الآخرين.

لدينا: $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$
أي: $\overline{P(-2i)} = P(2i)$
$2i$ جذر لـ $P(z)$.
ولدينا $\overline{P(\sqrt{3}+i)} = P(\sqrt{3}-i)$
$\sqrt{3}-i$ جذر لـ $P(z)$.
ومنه:
$S = \{2i; -2i; \sqrt{3}+i; \sqrt{3}-i\}$

لدينا: $z_B = -4+3i$; $z_A = -1+2i$
$z_C = 3i$; $z_D = 4-3i$
مع: $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = \frac{-i}{5}$; $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = \frac{-2}{3}i$

المثلثين: ACD قائم في A
BCD قائم في B

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

• بين أن النقط A، B، C، D تقع على دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

• بما أن ACD قائم في A
فإن النقط A، D، C تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها I منتصف القطعة [DC].

الفكرة ربط إستنتاج 1 باستنتاج 2

لكن

لكي تنتمي B إلى الدائرة (C)
يكفي ان نبين (IB = IA)

$z_I = \frac{z_C + z_D}{2} = 2$

ومنه:
$\begin{cases} IB = \sqrt{13} \\ IA = \sqrt{13} \end{cases}$

إذن B ينتمي إلى (C).

وعليه:
A، B، C، D نقط تنتمي لنفس الدائرة.

A و B نقطتان متمايزتان.
• لتكن النقطة K حيث أن:
$\vec{AK} = \frac{-8}{3}\vec{AB}$
أثبت أن K مرجح النقطين A و B مرفقتين بمعاملين صحيحين يطلب تعيينهما.

لدينا
$3\vec{AK} = -8\vec{KB}$
$-3\vec{KA} + 8\vec{KB} = \vec{0}$
$-3 + 8 \neq 0$
الجملة تقبل مرجح $\{(A,-3);(B,8)\}$

$\begin{cases} \alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0} \\ \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB} \end{cases}$

$\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} = (\alpha+\beta)\vec{MG}$

إحداثيات مرجح:
$z_G = \frac{\alpha.z_A + \beta.z_B + \gamma.z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

$\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$

المرجح و مجموعة النقط:

حالة 1:
$\|-2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}\| = \sqrt{5}$
$-2+1-3 = -4 \neq 0$
الجملة تقبل مرجح H
$\|-2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}\| = \|-4\vec{MH}\|$
ومنه:
$\|-4\vec{MH}\| = \sqrt{5}$
$MH = \frac{\sqrt{5}}{4}$
دائرة مركزها H حيث:
$z_H = \frac{-2.z_A + z_B - 3z_C}{-2+1-3}$
ونصف قطرها:
$r = \frac{\sqrt{5}}{4}$

حالة 2:
$\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MD} - \vec{ME}\|$
لا تقبل مرجح تقبل مرجح
ومنه:
$\|\vec{MG}\| = \|-\vec{DM} - \vec{ME}\|$
$= \|-(\vec{DM} + \vec{ME})\|$
$= \|-\vec{DE}\|$
$MG = DE$
دائرة مركزها G ونصف قطرها $r = DE$.

حالة 3:
$\|\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$
الفكرة نفكك وندرس كل جزء على حدى.

أول جزء:
$\|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$
$1 - 2 + 1 = 0$
الجملة تقبل مرجح.
الفكرة:
برهان أن الشعاع $\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$ مستقل على النقطة M.

$\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MA} + 2\vec{BM} + \vec{MC}$
$= \vec{MA} + \vec{BM} + \vec{BM} + \vec{MC}$
$= \vec{BC} - \vec{AB}$
$= \vec{BC} + \vec{BA}$
$1 + 1 \neq 0$
الجملة تقبل مرجح.
ومنه $\|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{BH}\|$

ثاني جزء:
$\|\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}\|$
$1 - 4 + 1 \neq 0$
الجملة تقبل مرجح
$\|\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|-2\vec{MG}\|$

إذن $\|-2\vec{MG}\| = \|2\vec{BH}\|$
$MG = BH$
دائرة مركزها G نصف قطرها BH

حالة 4:
$\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 2\|\vec{MA} + \vec{MC}\|$
$\|4\vec{MG}\| = 2\|2\vec{MH}\|$
$4MG = 4MH$
$MG = MH$
مستقيم محوري للقطعة [GH]

حالة 5:
$(\vec{MD} + \vec{MA} + 3\vec{MC}).(\vec{MD} + \vec{MA} - 3\vec{MC}) = 0$
$(5\vec{MG})(-\vec{MH}) = 0$
$-5(\vec{MG}.\vec{MH}) = 0$
$-5 \neq$
دائرة قطرها [GH].

المناقشة
نناقش وجود النقطة G مرجح الجملة:
$\{(A; m^2+2); (B; m^2+m-3)\}$

[redacted] Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بإنضمامكم لي

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بانضمامكم لي

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ نضع:
$\Delta_n = |z_{n+1} - z_n|$
أحسب Δ_{n+1} بدلالة Δ_n.

$\Delta_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}|$
$= \left|\frac{1}{2}(1+i)z_{n+1} - \frac{1}{2}(1+i)z_n\right|$
$= \left|\frac{1}{2}(1+i)\right| |z_{n+1} - z_n|$
$\Delta_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\Delta_n$

بين أن المتتالية (Δ_n) هندسية يطلب إيجاد حدها الأول وأساسها.

لدينا المساواة:
$\Delta_{n+1} = \Delta_n . \frac{\sqrt{2}}{2}$
ومنها نستنتج:
أن (Δ_n) متتالية هندسية أساسها $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$
وحدها الأول:
$\Delta_0 = |z_1 - z_0|$
$\Delta_0 = 2\sqrt{2}$

أحسب (Δ_n) بدلالة n

لدينا (Δ_n) متتالية هندسية
$\Delta_n = \Delta_0 . r^n$
$= 2\sqrt{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

إستنتج $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث لما $n \geq n_0$ يكون $\Delta_n < 10^{-2}$

$\Delta_n < 10^{-2}$
$2\sqrt{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n < 10^{-2}$
$2\sqrt{2}.(\sqrt{2})^n.\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-2}$
$2\sqrt{2}.\sqrt{2}^n.2^{-n} < 10^{-2}$
$2.2^{1/2}.2^{n/2}.2^{-n} < 10^{-2}$

$\overrightarrow{MA}^2 = (\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2})^2$
$= x^2+(y-1)^2$
$\overrightarrow{MB}^2 = (\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2})^2$
$= (x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2$
ومنه
$\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 1$
$2x\sqrt{3} - 4y - 4 = 0$
مستقيم.

(z_n) متتالية الأعداد المركبة معرفة:
$\begin{cases} z_0 = 4 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}(1+i).z_n \end{cases}$
أوجد طويلة وعمدة كل من:
z_1, z_2

① نحسب
$\begin{cases} |z_0| = 4 \\ \arg(z_0) = 0 \end{cases}$

نضع: $\alpha = \frac{1}{2}(1+i)$
$\begin{cases} |\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \arg(\alpha) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$z_1 = \alpha . z_0$
الطويلة:
$|z_1| = |\alpha| . |z_0|$
$= 4.\frac{\sqrt{2}}{2}$
$|z_1| = 2\sqrt{2}$
العمدة:
$\arg(z_1) = \arg(\alpha . z_0)$
$= \arg(\alpha) + \arg(z_0)$
$= \frac{\pi}{4} + 0$
$\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$
ومنه:
$\begin{cases} |z_1| = 2\sqrt{2} \\ \arg(z_1) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} |z_2| = 2 \\ \arg(z_2) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$m^2+2+m^2+m-3 \neq 0$
$2m^2+m-1 \neq 0$
$m_1 \neq -1$ $m_2 \neq \frac{1}{2}$
حتى تقبل الجملة مرجع يجب:
$m \neq \frac{1}{2}$ و $m \neq -1$
أي
$S = \mathbb{R} - \{-1, \frac{1}{2}\}$

حالة ع:
$(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$
$(-\overrightarrow{MG})(-\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{MC}) = 0$
$(-\overrightarrow{MG})(-\overrightarrow{BC}) = 0$
$\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{BC} = 0$
مستقيم يشمل G ويعامد الشعاع $\overrightarrow{BC}$.

عبارتي لايبنتز
لدينا: $\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MC}^2 = 4$
عين مجموعة النقط.

فكرة ①: تفكيك الجزء (1)
$\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MC}^2 = 5\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GO}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{GC}^2$
فكرة (2):
$5\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GO}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{GC}^2 = 4$
$5\overrightarrow{MG}^2 = 4 - (\overrightarrow{GO}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{GC}^2)$
$\overrightarrow{MG}^2 = \frac{4 - (\overrightarrow{GO}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{GC}^2)}{5}$
ندخل الجذر:
$\overrightarrow{MG} = \sqrt{\frac{4 - (\overrightarrow{GO}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{GC}^2)}{5}} > 0$
$\overrightarrow{MG} = K$
دائرة مركزها G و $r = K$.

$\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 1$

$1 - 1 = 0$
الجملة لا تقبل مرجع نستعمل طريقة حساب الأطوال.
النكرة ←
$\begin{cases} z_1 = i \\ z_2 = -\sqrt{3} - i \\ z_3 = -\sqrt{3} + i \end{cases}$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

$2^{1-n} \cdot 2^{\frac{1+n}{2}} < 10^{-2}$

$2^{-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}} < 10^{-2}$

$\ln 2^{-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}} < \ln 10^{-2}$

$\left(-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}\right)\ln 2 < -2\ln 10$

$-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2} < -2\cdot\frac{\ln 10}{\ln 2}$

$-\frac{1}{2}n < -8{,}15$

ومنه: $n > 17$

الأعداد المركبة وطبيعة الرباعي.

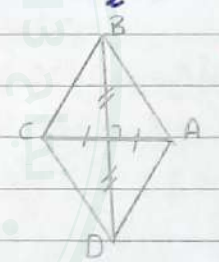
متوازي الأضلاع:



الأقطار متناصفة:

$\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{z_B+z_D}{2}$

المعين:

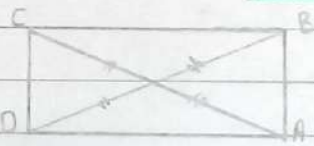


الأقطار متناصفة ومتعامدة:

$\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{z_B+z_D}{2}$

$(AC) \perp (BD)$

المستطيل:

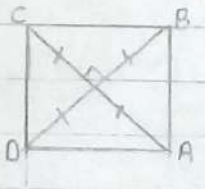


الأقطار متناصفة ومتقايسة

$\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{z_B+z_D}{2}$

$|z_C - z_A| = |z_D - z_B|$

المربع:



الأقطار متناصفة ومتعامدة ومتقايسة

$\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{z_B+z_D}{2}$

$(AC) \perp (BD)$

$|z_C - z_A| = |z_D - z_B|$

شبه المنحرف:

يجب إثبات: $(CB) \parallel (DA)$

النسبة ومجموعة النقط:

حالة 1:

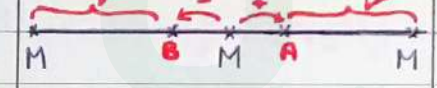
حقيقي $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in \mathbb{R}^*$

مجموعة النقط مستقيم (AB) بإستثناء النقطة B أي $(AB) - \{B\}$

حالة 2:

حقيقي موجب $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in \mathbb{R}_+^*$

مجموعة النقط مستقيم (AB) بإستثناء القطعة $[AB]$ أي $(AB) - [AB]$.



حالة 3:

حقيقي سالب $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in \mathbb{R}_-^*$

مجموعة النقط القطعة المفتوحة $]AB[$



الحالة 4:

تخيلي صرف $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in$

مجموعة النقط دائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة B.

الحالة 5:

تخيلي صرف موجب $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in$

مجموعة النقط هي نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ في الإتجاه المباشر (العلوي) ζ

الحالة 6:

تخيلي صرف سالب $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in$

مجموعة النقط هي نصف الدائرة قطرها $[AB]$ في الإتجاه السفلي ζ

التحويلات النقطية:

الإنسحاب:

الشرط $a = 1$

شعاعه b

مثل: $z' = z + 1 - 2i$

$\begin{cases} \vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} & \text{الشعاع} \\ z_{\vec{u}} = 1-2i & \text{أو} \end{cases}$

التحاكي:

الشرط $a \in \mathbb{R} - \{1\}$

مركزه $z_\omega = \frac{b}{1-a}$

ونسبته $k = a$

مثل: $z' = 3z - 5i$

$\begin{cases} z_\omega = \frac{-5}{2}i & \text{المركز} \\ k = 3 & \text{نسبته} \end{cases}$

الدوران:

الشرط: $a \in \mathbb{C}$ و $|a| = 1$

زاويته $\arg(a)$

مركزه $z_\omega = \frac{b}{1-a}$

مثل:

$z' = iz + 1 - i$

$\begin{cases} |a| = |i| = 1 \\ z_\omega = \frac{b}{1-a} = 1 \\ \arg(i) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

التشابه:

الشرط: $a \in \mathbb{C}$ و $|a| \neq 1$

نسبته $k = |a|$

زاويته $\arg(a)$

مركزه $z_\omega = \frac{b}{1-a}$

[redacted] Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بإنضمامكم لي

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

مثال :

$z' = (1+i)z + i$

$\begin{cases} |a| = |1+i| = \sqrt{2} \neq 1 \\ K = |a| = \sqrt{2} \quad \text{نسبته} \\ \arg(a) = \frac{\pi}{4} \quad \text{زاويته} \end{cases}$

نعتبر التشابه المستوي المباشر S الذي يرفق بالنقطة A ذات اللاحقة $1+2i$، النقطة A' ذات اللاحقة $-4+2i$ وبالنقطة B ذات اللاحقة $i+\sqrt{3}$ النقطة B' ذات اللاحقة $2i\sqrt{3}-2$.

1. عرف عبارة التشابه في المستوى المركب معينا عناصره المميزة.
2. عين عبارة التشابه بإستعمال الشكل الأسي.
3. أكتب العبارة التحليلية لهذا التشابه.

1. عبارة التشابه:

$z' = az + b$

التعيين:

$\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = a \cdot z_B + b \end{cases}$

$\begin{cases} -4+2i = a(1+2i) + b \\ -2+2i\sqrt{3} = a(\sqrt{3}+i) + b \end{cases}$

بالطرح نجد (بالحساب)

$a = 2i$

ثم نعوض

$-4+2i = (2i)(1+2i) + b$

$b = -4+2i-2i+4$

$b = 0$

إذن العبارة هي:

$z' = 2iz$

عناصرها المميزة:

$\begin{cases} |a| = |2i| = 2 \quad \text{نسبته} \\ \theta = \arg(2i) = \frac{\pi}{2} \quad \text{زاويته} \\ z_\Omega = 0 \quad \text{مركزه } \Omega \end{cases}$

2. الشكل الأسي:

$z' = 2iz$

$z' = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot z$

3. العبارة التحليلية:

$z' = 2iz$

$x' + iy' = 2i(x+iy)$

$x' + iy' = 2ix - 2y$

$\begin{cases} x' = -2y \\ y' = 2x \end{cases}$

نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بالنقطة $M(x,y)$ النقطة $M'(x',y')$ بحيث:

$x' = x + y + 1$

$y' = -x + y + 1$

أدرس طبيعة التحويل S.

لدينا: $z' = az + b$

$\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} z' = x' + iy' \\ z = x + iy \end{cases}$

$z' = [x+y+1] + i[-x+y+1]$

$= x + y + 1 - xi + yi + i$

$= z + y + 1 - xi + i$

$= z - i^2 y + 1 - xi + i$

$= z - i(x+iy) + 1 + i$

$= z - iz + 1 + i$

$\begin{cases} z' = (1-i)z + 1 + i \\ z' = az + b \end{cases}$

بالمطابقة:

$\begin{cases} a = 1-i \\ b = 1+i \end{cases}$

العبارة المركبة لتحويل نقطي:

$z' - z_\omega = K \cdot e^{i\theta}(z - z_\omega)$

لدينا العبارة لـ(S) التشابه المباشر

$z' = (i+1)z + 2 - i$

عين صورة بالتشابه (S) لـ الدائرة (C) ذات المركز $\Omega(2,2)$ ونصف القطر 3.

لإيجاد صورة دائرة بتحويل نقطي: مركزها هو صورة المركز الأول بالتحويل (S)

$z_{\Omega'} = (1+i) \cdot z_\Omega + 2 - i$

$= (1+i)(2+2i) + 2 - i$

$= 2 + 3i$

ومنه $\Omega'(2,3)$

و نصف قطرها:

$r' = K \cdot r$

$r' = \sqrt{2} \cdot 3$

$r' = 4,24$

[redacted] Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بإنضمامكم لي

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com