najah213.com · نجاح 213

الشعبة : الثالثة ثانوي
علوم تجريبية 3ASS

إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

فيفري 2010

المدة: 03سا

الموضوع الأول

التمرين الأول (06 نقاط)

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = -1 + x + 2\ln(x)$.

1) أ ـ ادرس تغيرات الدالة g على $]0,+\infty[$

ب ـ ضع جدول تغيرات الدالة g .

2) أ ـ احسب $g(1)$ ثم حدد إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

$g\left(\frac{1}{x}\right)<0$ ⊔ $x>1$

ب ـ استنتج أن :

$g\left(\frac{1}{x}\right)>0$ ⊔ $0<x<1$.

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على R^* بما يلي : $\begin{cases} f(x)=x-x^2\ln x \quad ; \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $\left(o\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1) بين أن f دالة مستمرة في النقطة 0 على اليمين .

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة 0 على اليمين . ما هو التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عنها ؟

3) ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4) أ ـ بين أن : $f'(x)=x.g\left(\frac{1}{x}\right)$ مهما يكن $x\in\ ]0\ ;+\infty[$

ب ـ ضع جدول تغيرات الدالة f .

5) بين أن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$ و أن $1<\alpha<2$.

6) أ ـ تحقق أن معادلة نصف المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0 هي $y=x$.

ب ـ بين انه لما $x\in\ ]0,1[$ فإن $f(x)>x$

ج ـ استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (T) .

7) أنشئ المنحنى (C) .

التمرين الثاني (06 نقاط)

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر المستقيمين (Δ) و (Δ') المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين الآتيين :

$$(\Delta):\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=-2-2\lambda \end{cases} ;\lambda\in\mathbb{R} \qquad (\Delta'):\begin{cases} x=6+\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=5+\alpha \end{cases} ;\alpha\in\mathbb{R}$$

1. بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي .
2. A نقطة كيفية من (Δ) و B نقطة كيفية من (Δ') .
   - عين إحداثيات النقطتين A و B بحيث يكون المستقيم (AB) عمودياً على كل من (Δ) و (Δ')
   - أحسب الطول AB .
3. عين معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (Δ') .
4. أحسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') و المستوي (P) . ما ذا تلاحظ ؟

التمرين الثالث (08 نقاط)

في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

$z_A=1-i$ و $z_B=3+i$ و $z_C=-3$ و $z_D=2$.

نعتبر التطبيق f الذي يرفق كل نقطة M ذات اللاحقة z بالنقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث :

$z'=z^2-4.z$.

1. حدد A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي .
2. أ ـ بين أن $OMCM'$ متوازي الأضلاع إذا و فقط إذا كان : $z^2-3z+3=0$.

   ب ـ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-3z+3=0$.
3. أ ـ عبر عن : $z'+4$ بدلالة $z-2$.

   ب ـ استنتج أن : $|z'+4|=|z-2|^2$ ثم عبر عن $\arg(z'+4)$ بدلالة $\arg(z-2)$.

ج ـ بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها 2 فإن النقطة M' صورة النقطة بالتطبيق f تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و نصف قطرها .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

المؤسسة : الجمع الدرسي الخاص المعتمد – سليم –
المستوى : الثالثة ثانوي علوم تجريبية

السنة الدراسية : 2010/2009
المدة : 3 ساعات و نصف

تصحيح إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = -1 + x + 2\ln(x)$

أ - دراسة تغيرات الدالة g على $]0,+\infty[$

الدالة المشتقة $g'(x) = 1 + \frac{2}{x} = \frac{x+2}{x}$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	+	+
$g(x)$	$\|$ $-\infty$	0	$+\infty$

ب) جدول تغيرات الدالة g

جـ) حساب $g(1)$: $g(1) = -1 + 1 + 2\ln(1) = 0$

- إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$:

$g(x) < 0 \leftarrow 0 < x < 1$ لما : $x = 1$ و لما : $g(x) > 0 \leftarrow x > 1$

$g(1) = 0 \leftarrow x = 1$

ب - استنتاج : لما : $g(\frac{1}{X}) < 0 \leftarrow 1 < X \leftarrow 0 < \frac{1}{X} < 1 \leftarrow x = \frac{1}{X}$ نقوم بتغيير المتغير :

$g(\frac{1}{X}) > 0 \leftarrow 1 > X > 0 \leftarrow \frac{1}{X} > 1 \leftarrow x = \frac{1}{X}$ نقوم بتغيير المتغير :

الجزء الثاني :

الدالة f المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x \quad ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) بين أن f دالة مستمرة في النقطة 0 على اليمين.

علما أن : $\lim_{x\to 0^+} (x\ln x) = 0$

$\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x - x^2\ln x) = \lim_{x\to 0^+} x(1 - x\ln x) = \lim_{x\to 0^+} (1 - x(\ln x)) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ ومنه f دالة مستمرة على اليمين 0

2) دراسة قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة 0 على اليمين.

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x-x^2\ln x)-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-x^2\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(1-x\ln x)}{x}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} (1 - x\ln x) = 1$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين النقطة 0 .

● التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها ؟ نقول أن المنحنى يقبل نصف مماس على اليمين النقطة 0 ميله 1

3) حساب $\lim_{x\to +\infty} f(x)$:

$\begin{cases} \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (x - x^2\ln x) = \lim_{x\to +\infty} x(1 - x\ln x) = -\infty \\ \lim_{x\to +\infty} x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} (1 - x\ln x) = -\infty \end{cases}$

4) أ- تبيان أن : $f'(x) = x.g(\frac{1}{x})$ مهما يكن $x \in]0;+\infty[$

$\begin{cases} f'(x) = (x)' - (x^2\ln x)' = 1 - \left[(2x)\times\ln x + (x^2)\times(\frac{1}{x})\right] \\ f'(x) = 1 - [(2x)\ln x + x] = 1 - x - 2x\ln x = \\ f'(x) = 1 - x + 2x\ln x = x(\frac{1}{x} - 1 - 2\ln x) = x(\frac{1}{x} - 1 + 2\ln\frac{1}{x}) \\ f'(x) = x.g(\frac{1}{x}) \end{cases}$

ب - جدول تغيرات الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(\frac{1}{x})$ على المجال $]0,+\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\|$ +	0	−
$f(x)$	$\|$ 0	1	$-\infty$

5) تبيان أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$ و أن $1 < \alpha < 2$

- الدالة f معرفة و مستمرة على المجال $]0,+\infty[$ فهي مستمرة على المجال $]1;2[$
- الدالة f رتيبة (متزايدة تماما) على المجال $]1;2[$
- و أن : $f(1) \times f(2) < 0$ مع : $f(1) = 0$ و $f(2) = -0,77 < 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فإن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1;2[$

6) أ- التحقق أن معادلة نصف المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0 هي : $y = x$.

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

معادلة المماس :

$y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1.(x-0) + 0$

$y = x$

ب - تبيان أنه : $x \in]0,1[$ فإن $f(x) > x$

نعلم أنه لما : $1 > x > 0 \leftarrow Ln(x) < 0 \leftarrow x^2.Ln(x) < 0$

و منه : $1 > x > 0 \leftarrow -x^2.Ln(x) > 0$

و منه $1 > x > 0 \leftarrow x - x^2.Ln(x) > x$

$f(x) > x \leftarrow 1 > x > 0$

جـ - الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (T) :

لدينا ما سبق $f(x) > x \leftarrow 1 > x > 0$ في : $f(x) - x > 0$

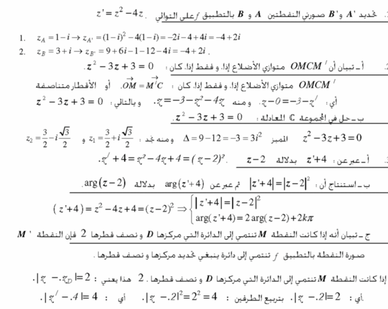
و من جهة : $x > 1 \leftarrow Ln(x) > 0 \leftarrow x^2.Ln(x) > 0$

$x > 1 \leftarrow Ln(x) < 0 \leftarrow x^2.Ln(x) < 0$

و منه نستنتج أن المنحنى (C) فوق المماس (T) : $f(x) - x < 0 \leftarrow x > 1$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-x$	$\|$ +	0	−
الوضع النسبي	$\|$ (C) فوق (T)	(C) يقطع (T)	(C) تحت (T)

7) المنحنى (C) :



التمرين الثاني

(Δ') : $\begin{cases} x = 6 + \alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = 5 + \alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad$ (Δ) : $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + \frac{1}{2}\lambda \\ z = -2 - 2\lambda \end{cases}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

1. تبيان أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوى :

$\vec{u_1}\begin{pmatrix}+1\\-2\\+1\end{pmatrix}$ و $\vec{u_2}\begin{pmatrix}+1\\+\frac{1}{2}\\-2\end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطيا $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ $\quad$ $1 \neq \frac{-2}{+\frac{1}{2}}$

خلل الجملة $\begin{cases} 6+\alpha = 3+\lambda \\ 5+\alpha = -2-2\lambda \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} \lambda = \frac{-4}{3} \\ \alpha = \frac{-13}{3} \end{cases}$

النقطة من (Δ_1) من أجل $\lambda = \frac{-4}{3}$ هي $(\frac{5}{3};\frac{4}{3};\frac{2}{3})$ و النقطة من (Δ_2) من أجل $\alpha = \frac{-13}{3}$ هي $(\frac{5}{3};\frac{29}{3};\frac{2}{3})$

إذن المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) ليسا من نفس المستوى

2. A نقطة كيفية من (Δ) و B نقطة كيفية من (Δ') .

- تعيين إحداثيات النقطتين A و B حتيث يكون المستقيم (AB) عموديا على كل من (Δ) و (Δ')

شعاع توجيه المستقيم (AB) هو الشعاع $\vec{AB}\begin{pmatrix}3+\alpha-\lambda\\-1-2\alpha-\lambda\\7+\alpha+2\lambda\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$

$\begin{cases} \vec{u_1}.\vec{AB} = 0 \\ \vec{u_2}.\vec{AB} = 0 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} \vec{u_1}.\vec{AB} = 0 \\ \vec{u_2}.\vec{AB} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (3+\alpha-\lambda)(1)+(-1-2\alpha-\lambda)(-2)+(7+\alpha+2\lambda)(1) = 0 \\ (3+\alpha-\lambda)(1)+(-1-2\alpha-\lambda)(-2)+(7+\alpha+2\lambda)(1) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha - \lambda + 2\alpha + \lambda + 4 = 0 \\ \alpha - \lambda + 2\alpha + \lambda + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 4 = 0 \\ 3\alpha + 4 = 0 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-4}{3} \\ \alpha = \frac{-4}{3} \end{cases}$ $\quad$ $A(\frac{5}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3})$, $B(\frac{14}{3};\frac{11}{3};\frac{11}{3})$

- حساب الطول AB : $AB = \sqrt{(\frac{14}{3}-\frac{5}{3})^2 + (\frac{11}{3}-\frac{2}{3})^2 + (\frac{11}{3}-\frac{2}{3})^2} = 3\sqrt{3}$.

3. عين معادلة للمستوى (P) الذي يشمل المستقيم (Δ') و يوازي المستقيم (Δ) :

أي المستوي الذي شعاعه الناظمي يكون مواز لـ $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ و يشمل النقطة $A(\frac{5}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3})$ مثلا

$(P)/\ x + y + z - 3 = 0$ أي : $(P)/\ 3(x-\frac{5}{3}) + 3(x-\frac{2}{3}) + 3(x-\frac{2}{3}) = 0$ / $\vec{AM}.\vec{AB} = 0$

4. حساب المسافة بين النقطة كيفية من (Δ') و المستوي (P) :

$d(N;(P)) = \frac{|(6+\alpha)+(1-2\alpha)+(5+\alpha)-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$

نلاحظ أنها تبقى ثابتة و مساوية لـ الطول AB

التمرين الثالث

1. تحديد A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتطبيق S على التوالي :

$z' = z^2 - 4z$:

1. $z_A = 1 - i \rightarrow z_{A'} = (1-i)^2 - 4(1-i) = -2i - 4 + 4i = -4 + 2i$
2. $z_B = 3 + i \rightarrow z_{B'} = 9 + 6i - 1 - 12 - 4i = -4 + 2i$.

2. أ- تبيان أن $OMCM'$ متوازي الأضلاع إذا و فقط إذا كان : $z^2 - 3z + 3 = 0$

$OMCM'$ متوازي الأضلاع إذا و فقط إذا كان : $\vec{OM} = \vec{M'C}$ أو الأقطار متناصفة

أي : $z_C - z_O = z_M - z_{M'}$ ومنه : $z_C = -3 - z^2 - 4z$ وبالتالي : $z^2 - 3z + 3 = 0$

ب - حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 3z + 3 = 0$

المميز $\Delta = 9 - 12 = -3 = 3i^2$ ومنه حد : $z^2 - 3z + 3 = 0$

$z_1 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_2 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. أ- عين $z'+4$ بدلالة $z-2$:

$z'^2 + 4 = z^4 - 4z + 4 = (z-2)^2$.

ب - استنتاج أن : $|z'+4| = |z-2|^2$ ثم عين $\arg(z'+4)$ بدلالة $\arg(z-2)$

$\begin{cases} |z'+4| = |z-2|^2 \\ \arg(z'+4) = 2\arg(z-2) + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow (z'+4) = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$

جـ - تبيان أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها 2 فإن النقطة M' صورة النقطة بالتطبيق S تنتمي إلى دائرة يتعين تحديد مركزها و نصف قطرها :

إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها 2 هذا يعني : $|z_D - z_M| = 2$.

أي : $|z_D - z_M|^2 = 2^2 = 4$ بتربيع الطرفين : $|z_C - z_A| = 4$ أي : $AC = 4$.

ومنه فإن النقطة M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها النقطة $H(4;0)$ و نصف قطرها 4