najah213.com · نجاح 213

ثانوية سريج الربيع بسوق الخميس — السنة الدراسية: 2023 / 2024

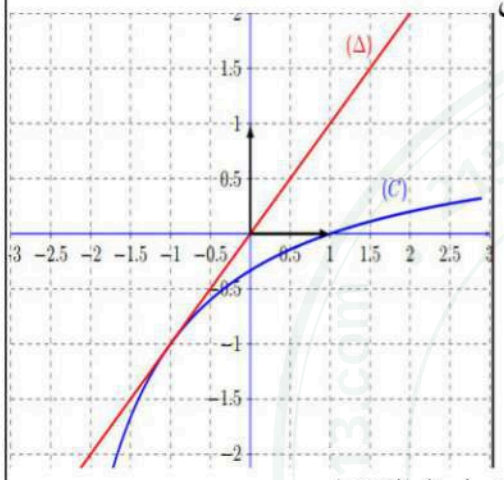
المستوى: السنة الثالثة علوم تجريبية — يعاد يوم: 01-02-2024

سلم يوم:28-01-2024 — يناقش يوم: 07-02-2024

الواجب المنزلي رقم 03 في مادة الرياضيات

التمرين الأول (12 نقطة)

✍ لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-3;+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{x-1}{x+3}$، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ كما هو موضح في الشكل المقابل



I) عين العددين الحقيقين a وb بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-3;+\infty[$:$f(x)=a+\frac{b}{x+3}$.

✍ α عدد حقيقي (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$u_{n+1}=f(u_n)$.

II) عين قيمة α بحيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

✍ نضع في كل ما يلي $\alpha=0$

1. (ا) على الوثيقة المرفقة مثّل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) (دون حسابها) مع توضيح خطوط الإنشاء.

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n $\quad -1\le u_n\le 0$

3. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثم برر تقاربها.

III) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\frac{1}{u_n+1}$

1. برهن أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول.

2. اكتب عبارة كل من v_n و u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$S_n=ln(\frac{v_1}{v_0})+ln(\frac{v_2}{v_1})+ln(\frac{v_3}{v_2})+...+ln(\frac{v_n}{v_{n-1}})$$

$$T_n=\frac{2024}{u_0+1}+\frac{2024}{u_1+1}+\frac{2024}{u_2+1}+...+\frac{2024}{u_n+1}$$

احسب بدلالة n كل من S_n وT_n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

✍ بالتوفيق — ✍ الصفحة 2-1 — ✍ اقلب الورقة

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين الثاني

✍ f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^{2x}+ae^{x}+b}{e^{x}-1}$ حيث a و b عددان حقيقيان، (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=1cm$

I) عين العددين الحقيقين a و b حتى تكون الدالة f حلا للمعادلة التفاضلية $y'-e^{x}+\dfrac{e^{x}}{(e^{x}-1)^{2}}=0$ وتحقق $f(ln3)=\dfrac{7}{2}$

II) نضع $a=-1$ و $b=1$

1. بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ فإن: $f(x)=e^{x}-1+\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}$
2. عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقق $F(ln2)=2$.
3. لتكن A مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات التي معادلتها $y=0$ ، $x=1$ و $x=2$ علما أنّ الدالة f موجبة تماما على المجال $[1;2]$ احسب بـ cm^2 المساحة A.

✍ بالتوفيق 🙂 ✍ الصفحة 2-2 ✍ أستاذ المادة: بوقرومي

www.dzexams.com
فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

الأستاذ: بوقرومي محمد — السنة الدراسية: 2023 / 2024

الإجابة النموذجية للواجب المنزلي رقم 03 في مادة الرياضيات لقسم الثالثة علوم تجريبية

التمرين الأول (12 نقطة)

(I ✍) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$, $x\in\,]-3;+\infty[$

تعيين العددين الحقيقين a و b بحيث من أجل كل x من المجال $]-3;+\infty[$ فإن: $f(x)=a+\dfrac{b}{x+3}$

لدينا من أجل كل x من $]-3;+\infty[$:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+3}=\frac{x-1+3-3}{x+3}=1+\frac{-4}{x+3}$$

ومنه: $a=1$ و $b=-4$

(II $\begin{cases} u_0=\alpha \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{u_n+3} \end{cases}$, $n\in\mathbb{N}$

تعيين قيمة α بحيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة:

(u_n) ثابتة معناه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n=\alpha$$

بالتعويض في العلاقة التراجعية نجد:

$$\frac{\alpha-1}{\alpha+3}=\alpha$$

ومنه: $\alpha(\alpha+3)=\alpha-1$

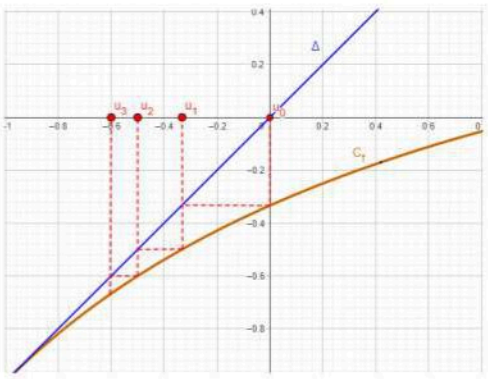
وبالتالي: $\alpha^2+2\alpha+1=0$

أي: $(\alpha+1)^2=0$

إذن: $\alpha=-1$

✍ نضع: $\alpha=-1$

① أ- تمثيل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n):



ب- التخمين:

نلاحظ أنّ: $u_0>u_1>u_2>u_3$ ومنه نخمن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ومتقاربة نحو نقطة تقاطع (C) و(Δ).

②البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1\le u_n\le 0$:

نضع الخاصية: $p(n):\ -1\le u_n\le 0$

نتحقق من صحة الخاصية $p(0)$

لدينا: $u_0=0$ و منه : $-1\le 0\le 0$

و منه الخاصية $p(0)$ صحيحة.

نفرض أن الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي: $-1\le u_n\le 0$

ونبرهن صحة الخاصية $p(n+1)$ أي نبرهن أنّ :

$$-1\le u_{n+1}\le 0$$

لدينا: $-1\le u_n\le 0$

بإضافة العدد 3 إلى أطراف المتباينة نجد:

$$2\le u_n+3\le 3$$

بقلب أطراف المتباينة تصبح:

$$\frac{1}{3}\le\frac{1}{u_n+3}\le\frac{1}{2}$$

بضرب أطراف المتباينة في العدد -4 نجد:

$$-2\le -4\frac{1}{u_n+3}\le -\frac{4}{3}$$

بإضافة العدد 1 إلى أطراف المتباينة نجد:

$$-1\le -4\frac{1}{u_n+3}+1\le -\frac{4}{3}+1$$

وبالتالي: $-1\le u_{n+1}\le -\frac{1}{3}$

أي: $-1\le u_{n+1}\le 0$

و منه الخاصية $p(n+1)$ صحيحة.

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $-1\le u_n\le 0$

③ دراسةاتجاه تغير المتتالية (u_n) :

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n-1}{u_n+3}-u_n$$
$$=\frac{u_n-1-{u_n}^2-3u_n}{u_n+3}$$
$$=\frac{-{u_n}^2-2u_n-1}{u_n+3}$$
$$=\frac{-(u_n+1)^2}{u_n+3}$$

$u_{n+1}-u_n\leq 0$

لأن: $-(u_n+1)^2\leq 0$ و $u_n+3>0$ و منه المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

التقارب: المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

(III) $v_n=\frac{1}{u_n+1}$; $n\in\mathbb{N}$

① برهان أن (v_n) متتالية حسابية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}+1}$$
$$=\frac{1}{\frac{u_n-1}{u_n+3}+1}$$
$$=\frac{1}{\frac{u_n-1+u_n+3}{u_n+3}}$$
$$=\frac{1}{\frac{2u_n+2}{u_n+3}}$$
$$=\frac{1}{\frac{2u_n+2}{u_n+3}}$$
$$=\frac{u_n+3}{2u_n+2}$$
$$=\frac{u_n+1+2}{2(u_n+1)}$$
$$=\frac{u_n+1}{2(u_n+1)}+\frac{2}{2(u_n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{}{u_n+1}$$

$v_{n+1}=\frac{1}{2}+v_n$

و منه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ و حدها الأول v_0 حيث:

$v_0=\frac{1}{u_0+1}-1$

② كتابة عبارة v_n بدلالة n:

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$v_n=v_0+nr$

$v_n=1+\frac{1}{2}n$

كتابة عبارة u_n بدلالة n: من أجل كل عدد طبيعي n

لدينا: $v_n=\frac{1}{u_n+1}$

بالتالي: $\frac{1}{v_n}=u_n+1$

أي أنّ: $u_n=\frac{1}{v_n}-1$

ومنه: $u_n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}n}-1$

إذن: $u_n=\frac{-n}{2+n}$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-n}{2+n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-1$

③ حساب بدلالة n كل من S_n و T_n:

$$S_n=ln(\frac{v_1}{v_0})+ln(\frac{v_2}{v_1})+ln(\frac{v_3}{v_2})+\ldots+ln(\frac{v_n}{v_{n-1}})$$
$$=ln(\frac{v_1}{v_0}\times\frac{v_2}{v_1}\times\ldots\times\frac{v_n}{v_{n+1}})$$
$$=ln(\frac{v_n}{v_0})$$
$$=ln(\frac{1+\frac{1}{2}n}{1})$$

إذن: $S_n=ln(1+\frac{1}{2}n)$

$$T_n=\frac{2024}{u_0+1}+\frac{2024}{u_1+1}+\frac{2024}{u_2+1}+\ldots+\frac{2024}{u_n+1}$$
$$=2024(\frac{1}{u_0+1}+\frac{1}{u_1+1}+\frac{1}{u_2+1}+\ldots+\frac{1}{u_n+1})$$
$$=2024(v_0+v_1+\ldots+v_n)$$
$$=2024(\frac{n+1}{2})(v_0+v_n)$$

$T_n=2024\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{4+n}{2}\right)$

$T_n=506(n+1)(n+4)$

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} ln(1+\frac{1}{2}n)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

التمرين الثاني (08 نقطة)

I) $f(x)=\dfrac{e^{2x}+ae^x+b}{e^x+1}$ $\quad D_f=]0;+\infty[$

❶ تعيين العددين الحقيقيين a و b:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و مشتقتها معرفة بالعبارة:

$$f'(x)=\frac{(e^{2x}+ae^x)(e^x+1)-e^x(e^{2x}+ae^x+b)}{(e^x+1)^2}$$

ومنه:

$$f'(x)=\frac{e^{3x}-2e^{2x}+e^x(-a-b)}{(e^x+1)^2} \qquad (*)$$

ولدينا أيضا: $y'-e^x+\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}=0$

ومنه: $y'=e^x-\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

وبالتالي: $y'=\dfrac{e^{3x}-2e^{2x}}{(e^x+1)^2}$

و منه f حل للمعادلة التفاضلية معناه:

$$f'(x)=\frac{e^{3x}-2e^{2x}}{(e^x+1)^2} \qquad (**)$$

بالمطابقة بين $(*)$ و $(**)$ نجد: $-a-b=0$

و من جهة أخرى لدينا: $f(ln3)=\dfrac{7}{2}$ إذن:

$3a+b=-2$

و بالتالي:

$$\begin{cases} -a-b=0 \\ 3a+b=-2 \end{cases}$$

إذن:

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

II) نضع $a=-1$ و $b=1$ أي أن: $f(x)=\dfrac{e^{2x}-e^x+1}{e^x+1}$

①تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ فإن: $f(x)=e^x-1+\dfrac{e^x}{e^x-1}$:

لدينا:

$$\begin{aligned} e^x-1+\frac{e^x}{e^x-1} &= \frac{(e^x-1)(e^x-1)+e^x}{e^x-1} \\ &= \frac{e^{2x}+1-2e^x+e^x}{e^x-1} \\ &= \frac{e^{2x}-e^x+1}{e^x+1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

و منه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$

فإن: $f(x)=e^x-1+\dfrac{e^x}{e^x-1}$

②تعيين الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق: $F(ln2)=2$:

لدينا: $f(x)=e^x-1+\dfrac{e^x}{e^x-1}$

ومنه مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ هي:

$$F: x\longmapsto e^x-x+ln(e^x-1)+c \qquad ;c\in\mathbb{R}$$

و بما أنّ: $F(ln2)=2$ فإنّ: $c=ln2$

إذن: $F(x)=e^x-x+ln(e^x-1)+ln2$

③ حساب المساحة A:

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)dx &= [F(x)]_1^2 \\ &= F(2)-F(1) \\ &= e^2-e+ln(e+1)-1 \end{aligned}$$

إذن: $A=2(e^2-e+ln(e+1)-1)cm^2$

"إذا توقفت عن المحاولة فستتوقف عن الإبداع..."

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com