najah213.com · نجاح 213

ثانوية عبد الحق بن حمودة - سيرات- مستغانم
المستـــوى: 3 تقني رياضي

السنة الدراسية : 2020/2019
سلم يوم: 2019/11/10
يعاد يوم: 2019/11/17

الواجب المنزلي الثاني

التمرين الأول

الجزء الأول

1. عين حلول المعادلة التفاضلية : $(1)\cdots\cdots y'-2y=0$.
2. a و b عددان حقيقيان و u دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $u(x)=(ax+b)e^x$.
   أ- عين العددين a و b حتى تكون الدالة u حلا للمعادلة $(2)\cdots\cdots y'-2y=xe^x$.
   ب- برهن أن v تكون حل للمعادلة (1) إذا وفقط إذا كان $(v+u)$ حل للمعادلة (2).
   ج- استنتج جميع حلول المعادلة (2).
   د- عين الحل الخاص للمعادلة (2) و الذي ينعدم من أجل $x=0$.

الجزء الثاني

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2e^x-x-2$.

1. أدرس تغيرات الدالة g.
2. برهن أن للمعادلة $g(x)=0$ حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث $-1.6<\alpha<-1.5$.
3. استنتج إشارة $g(x)$.

الجزء الثالث

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ (فسر النتيجة هندسيا) و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^x g(x)$ ، استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن $f(\alpha)=-\dfrac{\alpha^2+2\alpha}{4}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.
4. أرسم (C_f).
5. لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=e^{-2x}-(1-x)e^{-x}$ و (C_h) تمثيلها البياني.
   - بين كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f).
6. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)+m=0$.



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين الثاني

الجزء الأول

لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0,1[$ بـ : $g(x)=(1-x)ln(1-x)-x\ ln(x)$

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\overrightarrow{i}\|=10cm$.

1. أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} g(x)$.

2. أحسب من أجل كل x من $]0,1[$: $g'(x)$ ثم بين أن $g''(x)=\dfrac{2x-1}{x(1-x)}$ ، عين إشارة $g''(x)$.

3. أدرس تغيرات الدالة g'.

4. استنتج أن المعادلة $g'(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $(\alpha<\beta)$ ثم استنتج إشارة $g'(x)$.

5. شكل جدول تغيرات الدالة g.

6. أحسب $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

7. أرسم (C_g) ، يعطى $g(\alpha)\approx 0.15$ و $g(\beta)\approx -0.15$.

8. لتكن الدالة φ المعرفة على المجال $]0,1[$ بـ: $\varphi(x)=-g(x)$.

- بين كيف يمكن رسم (C_φ) انطلاقا من (C_g).

الجزء الثاني

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0,1]$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=ln(x)\times ln(1-x)\ ;\ x\in]0,1[\\ f(0)=f(1)=0 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\overrightarrow{i}\|=10cm$.

1. بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ ، ماذا تستنتج؟.

2. بين أنه من أجل كل $x\in[0,1]$: $f(1-x)=f(x)$ ، ماذا تستنتج؟.

3. أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$.

4. بين أنه من أجل كل x من $]0,1[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1-x)}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

5. أرسم (C_f).

قل لا يبلغ المرء الفجر إلا عن طريق الليل

الأستاذ: قفلول . ع



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التصحيح

التمرين الأول

الجزء الأول

1. تعيين حلول المعادلة التفاضلية $y'-2y=0$: **هي الدوال** $x\mapsto Ce^{2x}$ **حيث** $C\in\mathbb{R}$.

2. -أ- تعيين العددين a **و** b: u **حلا للمعادلة** $y'-2y=xe^x$ **معناه** $u'(x)-2u(x)=xe^x$ **أي**

$ae^x+(ax+b)e^x-2(ax+b)e^x=xe^x$ **أي** $(-ax+a-b)e^x=xe^x$ **بالمطابقة نجد:** $a=-1$ **و** $b=-1$.

ومنه $u(x)=(-x-1)e^x$.

-ب- برهان أن v **حل للمعادلة** (1): $(v+u)$ **حل للمعادلة** (2) **معناه** $(u+v)'-2(u+v)=xe^x$ **أي**

$u'-2u+v'-2v=xe^x$ **و منه نستنتج أن** $v'-2v=0$ **أي** v **حل للمعادلة** (1).

-ج- استنتاج جميع حلول المعادلة (2): **نضع** $f=u+v$ **ومنه مجموعة حلول المعادلة** (2):

$f(x)=\overbrace{(-x-1)e^x}^{u}+\overbrace{Ce^{2x}}^{v}$ **حيث** $C\in\mathbb{R}$.

-د- تعيين الحل الخاص: $f(0)=(-0-1)e^0+Ce^{2\times0}=0$ **أي** $C=1$ **ومنه** $f(x)=(-x-1)e^x+e^{2x}$.

الجزء الثاني

1. دراسة تغيرات الدالة g:

-أ-النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{2e^x}_{0}\underbrace{-x}_{-(-\infty)}-2=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{x}_{+\infty}\left(2\underbrace{\frac{e^x}{x}}_{+\infty}-1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{0}\right)=+\infty$ **أو** $\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{e^x}_{+\infty}\left(2-\underbrace{\frac{x}{e^x}}_{0}-\underbrace{\frac{2}{e^x}}_{0}\right)=+\infty$

-ب-اتجاه تغير الدالة: $g'(x)=2e^x-1$ **ومنه** $g'(x)=0$ **معناه** $2e^x-1=0$ **أي** $e^x=\frac{1}{2}$ **أي** $x=ln\left(\frac{1}{2}\right)=-ln\,2$.

-ج-جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$-ln2$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$g(-ln2)$	↗ $+\infty$

$$\begin{aligned}g(-ln\,2)&=2e^{-ln\,2}-(-ln\,2)-2\\&=2e^{ln\frac{1}{2}}-(-ln\,2)-2\\&=1+ln\,2-2\\&=-1+ln\,2\approx-0.31\end{aligned}$$

2. برهان أن للمعادلة $g(x)=0$ **حلين:** **حل معدوم أي** $g(0)=2e^0-0-2=0$ **و الآخر** $-1.6<\alpha<-1.5$ **لدينا الدالة** g **مستمرة و متناقصة تماما على المجال** $]-\infty,-ln\,2[$ **فهي كذلك على المجال** $]-1.6,-1.5[$ **و** $g(-1.6)\times g(-1.5)=(0.004)\times(-0.05)<0$ **ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة** $g(x)=0$ **تقبل حل وحيد** $-1.6<\alpha<-1.5$ **يحقق** $g(\alpha)=0$.

3. استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α		0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

الجزء الثالث

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

1. تبيان أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}-(x+1)e^{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{e^{2x}}_{0}-\underbrace{xe^{x}}_{0}+\underbrace{e^{x}}_{0}=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}-(x+1)e^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}\left[1-\underbrace{\frac{x}{e^{x}}}_{0}-\underbrace{\frac{1}{e^{x}}}_{0}\right]=+\infty$

التفسير الهندسي : وجود مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) معادلته $y=0$ بجوار $-\infty$.

2. تبيان أن : $f'(x)=2e^{2x}-\left[e^{x}+e^{x}(x+1)\right]=2e^{2x}-xe^{x}-2e^{x}=e^{x}\underbrace{\left(e^{x}-x-2\right)}_{g(x)}=e^{x}\times g(x)$

و منه إشارة المشتقة من إشارة $g(x)$ لأن $e^{x}>0$.

جدول تغيرات الدالة :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

3. تبيان أن : $f(\alpha)=-\dfrac{\alpha^2+2\alpha}{4}$ لدينا: $g(\alpha)=2e^{\alpha}-\alpha-2=0$ أي $e^{\alpha}=\dfrac{\alpha+2}{2}$ و لدينا من جهة أخرى :

$$f(\alpha)=e^{2\alpha}-(\alpha+1)e^{\alpha}=\left(e^{\alpha}\right)^2-(\alpha+1)e^{\alpha}=\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2-(\alpha+1)\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)=-\left(\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}\right)$$

حصر $f(\alpha)$: $-1.6<\alpha<-1.5$ أي $\begin{cases}(-1.6)^2>\alpha^2>(-1.5)^2\\ 2(-1.5)>2\alpha>2(-1.6)\end{cases}$ أي

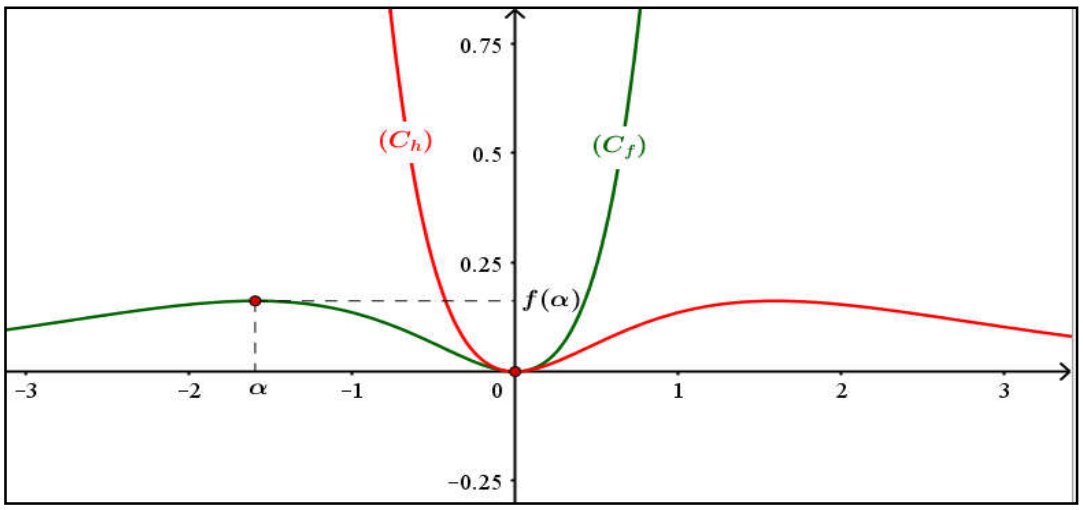
$$-\left(\frac{-3+(-1.6)^2}{4}\right)<-\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}<-\left(\frac{-3.2+(-1.5)^2}{4}\right)$$ أي $0.11<f(\alpha)<0.24$.

4. الرسم:

5. نلاحظ أن $h(x)=e^{-2x}-(1-x)e^{-x}=e^{2(-x)}-(1+(-x))e^{(-x)}=f(-x)$ **ومنه** (C_h) **نظير** (C_f) **بالنسبة لمحور التراتيب.**

6. المناقشة البيانية: $f(x)+m=0$ أي $f(x)=-m$ ومنه إيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $y=-m$

- $-m<0$ أي $m>0$: **لا توجد حلول** ◆ $m=0$: **حل مضاعف** ◆ $0<-m<f(\alpha)$ أي $-f(\alpha)<m<0$: **ثلاث حلول** ◆ $-m=f(\alpha)$ أي $m=-f(\alpha)$: **حلين أحدهما موجب و الآخر حل مضاعف سالب** ◆ $-m>f(\alpha)$ أي $m<-f(\alpha)$: **حل وحيد موجب.**



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

التمرين الثاني

الجزء الأول

1. حساب : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \underbrace{(1-x)ln(1-x)}_{0} - \underbrace{x\ ln(x)}_{0} = 0$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \underbrace{(1-x)ln(1-x)}_{0^+\ ln\ 0^+=0} - \underbrace{x\ ln(x)}_{1ln\,1=0} = 0$.

2. تبيان أن : $g'(x) = \left[-1ln(1-x) + \left(\frac{-1}{1-x}\right)\times\left(1-x\right)\right] - \left[ln(x) + \frac{1}{x}\times x\right] = -ln(1-x) - ln(x) - 2$

و $g''(x) = -\left(\frac{-1}{1-x}\right) - \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x-(1-x)}{x(1-x)} = \frac{2x-1}{x(1-x)}$.

إشارة $g''(x)$: إشارة $g''(x)$ من إشارة $2x-1$ لأن $x(1-x)>0$ في المجال $]0,1[$ ومنه $2x-1=0$ أي $x=\frac{1}{2}$.

3. دراسة تغيرات الدالة g' :

النهايات: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \left(\underbrace{-\ln\overbrace{(1-x)}^{0^+}}_{+\infty} - \underbrace{ln(x)}_{ln(1)=0} - 2\right) = +\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\underbrace{-ln(1-x)}_{-ln(1-0)=0} - \underbrace{ln(x)}_{-\infty} - 2\right) = +\infty$

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{1}{2}\right) &= -ln\left(1-\frac{1}{2}\right) - ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \\ &= ln(2) + ln(2) - 2 \\ &= -2 + 2ln\,2 \approx -0.61 \end{aligned}$$

جدول تغيرات الدالة g' :

x	0		$1/2$		1
$g''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-2+2ln2$	↗	$+\infty$

4. استنتاج أن المعادلة $g'(x)=0$ تقبل حلين :

الدالة g' مستمرة و متناقصة تماما على $]0,\frac{1}{2}[$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g'(x) = +\infty$ و $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -2+2ln\,2 < 0$ ، فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حل وحيد $0<\alpha<0.5$ يحقق $g'(\alpha)=0$.

الدالة g' مستمرة و متزايدة تماما على $]\frac{1}{2},1[$ ، $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -2+2ln\,2 < 0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} g'(x) = +\infty$ ، فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حل وحيد $0.5<\beta<1$ يحقق $g'(\beta)=0$.

إشارة $g'(x)$:

x	0		α		β		1
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

5. جدول تغيرات الدالة g :

x	0		α		$\frac{1}{2}$		β		1
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ 0	↗	$g(\alpha)$	↘	0	↘	$g(\beta)$	↗	0

6. حساب $g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)ln\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ، **إشارة** $g(x)$:

x	0		$1/2$		1
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

7. $\varphi(x)=-g(x)$ معناه أن (C_φ) نظير (C_g) بالنسبة لمحور الفواصل.

الجزء الثاني

1. **تبيان أن :** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{ln(x)\times ln(1-x)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\underbrace{ln(x)}_{-\infty}\times\underbrace{\dfrac{ln(1-x)}{x}}_{-1}=+\infty$.

لاحظ : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1-x)}{x}=\left[ln(1-x)\right]'=\dfrac{-1}{1-\underbrace{x}_{0}}=-1$ ، باستعمال تعريف العدد المشتق للدالة $x\mapsto ln(1-x)$ عند 0.

نستنتج : أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند العدد 0 من اليمين.

2. **تبيان أن :** في المجال $]0,1[$: $f(1-x)=ln(1-x)\times ln\left(1-(1-x)\right)=ln(x)\times ln(1-x)=f(x)$

و لدينا من أجل $x=0$ أو $x=1$ تبقى المساواة محققة : $f(1-0)=f(0)=0$ ومنه من أجل $x\in[0,1]$:

$f(1-x)=f(x)$ **إذن نستنتج** أن (C_f) يقبل محور تناظر معادلته $x=\dfrac{1}{2}$.

لاحظ : $x=\dfrac{1}{2}$ محور تناظر معناه : $f\left(2\times\dfrac{1}{2}-x\right)=f(x)$ أي $f(1-x)=f(x)$.

3. **حساب :** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(ln(x)\times ln(1-x)\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\dfrac{x}{x}\times ln(x)\times ln(1-x)\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\underbrace{x\ ln(x)}_{0}\times\underbrace{\dfrac{ln(1-x)}{x}}_{-1}\right)=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(ln(x)\times ln(1-x)\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(\dfrac{x-1}{x-1}\times ln(x)\times ln(1-x)\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(\underbrace{\dfrac{ln(x)}{x-1}}_{1}\times\left[\underbrace{-(1-x)ln(1-x)}_{0}\right]\right)=0$

لاحظ : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ln(x)}{x-1}=\left[ln(x)\right]'=\dfrac{1}{\underbrace{x}_{1}}=1$ ، باستعمال تعريف العدد المشتق للدالة $x\mapsto ln(x)$ عند 1.

4. **تبيان أن :** $f'(x)=\dfrac{1}{x}\times ln(1-x)+\left(\dfrac{-1}{1-x}\right)\times ln\,x=\dfrac{(1-x)ln(1-x)-x\ ln(x)}{x(1-x)}=\dfrac{g(x)}{x(1-x)}$.

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $x(1-x)>0$ في المجال $]0,1[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	‖	↗	$(ln2)^2$	↘	‖
	0				0

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=ln\left(\frac{1}{2}\right)\times ln\left(1-\frac{1}{2}\right)=\left(-ln(2)\right)\times\left(-ln(2)\right)=(ln\,2)^2\approx 0.48$$

الرسم

