najah213.com · نجاح 213



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية مفدي زكرياء – الأزهرية
إمتحانات بكالوريا تجريبية



الشعبة : عـلوم تـجريبية
دورة مـاي 2021

إختبارفي مادة: الرياضيات
المـدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعــين التــاليين :

## الموضوع الأول

### التمرين الأول: ( 04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة كما يلي : $u_0 = -3$ و من أجل كلّ كلّ عدد طبيعي $n$ ؛
$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3n - 1$ .

1/ أ) أحسب $u_1, u_2, u_3$ .

ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n \geq 3$ ؛ $u_n > 0$ .

ج) استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n \geq 4$ ؛ $u_n > 3n - 4$ ، ثمّ استنتج نهاية المتتالية $(u_n)$ .

2/ لتكن المتتالية العددية $(v_n)$ من أجل كلّ عدد طبيعي ؛ $v_n = u_n - 9n + 30$ .

أ) برهن أنّ $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول $v_0$ .

ب) أكتب $v_n$ بدلالة $n$ ، ثمّ استنتج $u_n$ بدلالة $n$ .

3/ أ) أحسب بدلالة $n$ الجداء : $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1+1} \times e^{v_2+2} \times \cdots \times e^{v_n+n}$ .

ب) أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ .

### التمرين الثاني: ( 04 نقاط)

صندوق به ثلاث كريات خضراء تحمل الرقم 0 و كريتان حمروان تحملان الرقم 5 و كرية بيضاء تحمل الرقم $\alpha$ ($\alpha$ عدد طبيعي يختلف عن 5 و 10) ، سحب لاعب ثلاث كريات في آن واحد (الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس) .

1/ أحسب إحتمال الحوادث التالية :

$A$ : اللاعب يسحب ثلاث كريات من نفس اللون .

$B$ : اللاعب يسحب ثلاث كريات من ألوان مختلفة .

$C$ : اللاعب يسحب كريتين من نفس اللون .

2/ اللاعب يربح مجموع الأعداد المسجلة على الكريات الثلاثة ، نعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب ثلاث كريات الربح بالدينار الذي يتحصل عليه اللاعب .

أ) عيّن قيم $X$ و بيّن أنّ $P(X = \alpha) = \frac{3}{20}$ .

ب) عيّن قانون إحتمال $X$ .



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213



ج) أحسب بدلالة $\alpha$ الأمل الرياضي $E(X)$ ، ثمّ عيّن قيمة $\alpha$ حتى يربح اللاعب 20 دينارا .

## التمرين الثالث: ( 04 نقطة)

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=iz_A$ ، و $z_C=\overline{z_A}$ .

1/ أكتب كلا من $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ على الشكل الجبري و الأسي .

2/ أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية : $\cdots(E)$ $\dfrac{1+i-z}{-1+i-z}=2e^{i\pi}$ .

ب) استنتج أنّ النقطة $A$ هي صورة النقطة $B$ بالتشابه $S$ الذي مركزه $\Omega$ ذات اللاحقة $z_\Omega$ ($z_\Omega$ هو حل المعادلة $(E)$) يطلب تعيين نسبته و زاويته .

3/ عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يكون $\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا موجبا تماما .

4/ أ) عيّن $(\Gamma_1)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ حيث : $z=z_C-k\dfrac{z_A}{z_C}$ ، لما $k$ يمسح $\mathbb{R}_+^*$ .

ب) عيّن $(\Gamma_2)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ حيث ؛ $\arg\left[\left(\dfrac{z_A-z}{z_B-z}\right)^2\right]=\pi+2\pi k$ .

## التمرين الرابع: ( 08 نقطة)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بالعبارة : $f(x)=x+\ln|e^x-1|$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1/ أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ .

ب) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}f(x)$ ، فسّر النتيجتين بيانيا .

2/ بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ غير معدوم : $f'(x)=\dfrac{2e^x-1}{e^x-1}$ .

ب) أدرس إتجاه تغير $f$ و شكّل جدل تغيراتها .

3/ أ) بيّن أنّ $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل $(\Delta)$ عند $-\infty$ ، يطلب تعيين معادلة له .

ب) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ من المجال $[0;+\infty[$ : $f(x)=2x+\ln\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)$ .

ج) استنتج أنّ $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل $(\Delta')$ عند $+\infty$ ، يطلب تعيين معادلة له .

د) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ مع المستقيم ذو المعادلة $y=x$ .

هـ) عيّن معادلة المماس $(T)$ لـ $(C_f)$عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 2$ .

4/ أ) برهن انّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0.4<\alpha<0.5$ ، ثمّ استنتج إشارة $f(x)$ .

ب) أثبت أنّ $\alpha$ يحقق : $e^{2\alpha}-e^{\alpha}-1=0$ ، ثمّ أبشئ كلا من $(C_f)$ ، $(\Delta)$ ، $(\Delta')$ .

5/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=|m|x$ .

6/ $h$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ : $h(x)=-2|x|+\ln\left|1-e^{|x|}\right|$ .

أ) تحقق أنّ : $h(x)=f(-|x|)$ ، ثمّ بيّن أنّ $h$ دالة زوجية .

ب) اشرح كيف يمكن رسم $(C_h)$ إنطلاقا من $(C_f)$ ، ثمّ أرسمه في نفس المعلم ($(C_h)$ منحنى الدالة $h$) .



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213



## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: ( 04 نقطة)

لتكن المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n^2}{2}}$ .

1/ أ) أحسب $u_1, u_2$ ، ثمّ برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ ؛ $u_n > 1$ .

ب) بيّن أنّ $(u_n)$ متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ .

ج) استنتج أنّ $(u_n)$ متقاربة ، ثمّ أحسب نهايتها .

2/ لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n^2 - 1$ .

أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ ؛ $2v_{n+1} = v_n$ .

ب) استنتج أنّ $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول $v_0$ .

ج) أكتب $v_n$ بدلالة $n$ ، ثمّ استنتج $u_n$ بدلالة $n$ ، ثمّ أحسب من جديد نهاية المتتالية $(u_n)$ .

3/ أحسب بدلالة $n$ المجاميع التالية :

$S_n = u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2$ ، $S'_n = v_0 + 2v_1 + 2^2 v_2 + \cdots + 2^n v_n$ ، $S''_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \cdots + \ln(v_n)$ .

### التمرين الثاني: ( 04 نقطة)

1/ $\alpha$ عدد مركب ، $\overline{\alpha}$ مرافقه ، أثبت أنّ $\alpha + \overline{\alpha} = 0$ معناه $\alpha$ تخيلي صرف .

2/ $a$ عدد مركب يختلف عن 0 ، نرفق بكلّ عدد مركب $z$ يختلف عن $a$ العدد المركب $f(z)$ حيث :

$f(z) = \dfrac{az}{z-a}$ .

◁ أثبت أنّ $f(z)$ تخيلي صرف معناه : $|z|^2 \times Re(a) = |a|^2 \times Re(z)$ ($Re$ يرمز إلى الجزء الحقيقي و $|.|$ ترمز إلى الطويلة) .

3/ نضع : $a = -1 + i$ .

أ) عيّن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ حيث ؛ $f(z)$ تخيلي صرف .

ب) نعتبر $(\Delta)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ حيث : $\arg(f(z) - a) = \dfrac{9\pi}{4}$ .

◁ بيّن أنّ $(\Delta)$ هي نصف مستقيم باستثناء النقطة $A$ ذات اللاحقة $a$ ، أكتب معادلته الديكارتية .

4/ أكتب $f(z)$ على الشكل الجبري ، ثمّ عيّن $B$ نقطة تقاطع $(\Gamma)$ و $(\Delta)$ .

### التمرين الثالث: ( 04 نقطة)

يحتوي صندوق على كريات متماثلة ، منها $n$ كرية بيضاء تحمل العدد $\pi$ ($n$ عدد طبيعي ، $n \geq 2$) ، و أربع كريات حمراء تحمل الأعداد $\pi, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}$ و كرتين خضراوين تحملان العددين $\dfrac{\pi}{2}$ و $\dfrac{\pi}{3}$ ، نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الصندوق (الكريات لانفرق بينها عند اللمس) .

**1** أ) أحسب إحتمال كل من الحدثين $A$ و $B$ حيث ؛ $A$ : سحب كرتين من نفس اللون ، $B$ : سحب كرتين تحملان نفس العدد .

ب) عيّن $n$ حتى يكون $P(A) = \dfrac{17}{55}$ .

**2** نفرض أنّ $n = 5$ و نسمي $\alpha$ و $\beta$ العددين الظاهرين على الكرتين المسحوبتين ، نعتبر $X$ المتغير العشوائي



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213



الذي يربط بكل نتيجة سحب العدد $\cos(\alpha)\cos(\beta)$ .

أ) برر أنّ قيم $X$ هي $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}; 1$ .

ب) بيّن أنّ $P(X=0)=\frac{27}{55}$ .

ج) عرّف قانون إحتمال $X$ ، ثمّ أحسب أمله الرياضي $E(X)$ .

## التمرين الرابع: ( 08 نقطة)

**I**) لتكن الدالة $f$ المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln x-\frac{1}{\ln x}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني و $(\Gamma)$ المنحنى الذي معادلته $y=\ln x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

1/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ .

2/ بيّن أنّه من أجل كلّ $x$ من المجال $]1;+\infty[$ ؛ $f'(x)=\frac{1+(\ln x)^2}{x(\ln x)^2}$ .

3/ أدرس إتجاه تغير $f$ و شكّل جدول تغيراتها .

4/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$ ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا .

5/ أدرس الوضع النسبي بين $(C_f)$ و $(\Gamma)$ .

**II**) نريد البحث عن المماسات للمنحنى $(C_f)$ المارة من المبدأ $O$ ، ليكن $a$ عدد حقيقي من المجال $]1;+\infty[$ .

1/ برهن أنّ المماس $(T_a)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $a$ يمر من المبدأ $O$ معناه $f(a)-af'(a)=0$ .

2/ لتكن الدالة $g$ المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالعبارة $g(x)=f(x)-xf'(x)$ .

◁ برهن أنّه على المجال $]1;+\infty[$ المعادلتين $g(x)=0$ و $(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1=0$ لهما نفس الحلول .

3/ لتكن الدالة $u$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $u(t)=t^3-t^2-t-1$ .

أ) أدرس تغيرات الدالة $u$ و شكّل جدول تغيراتها .

ب) بيّن أنّ الدالة $u$ تنعدم مرة واحدة فقط على $\mathbb{R}$.

ج) استنتج وجود مماس وحيد للمنحنى $(C_f)$ يمر من المبدأ .

د) أثبت أنّ الحل الوحيد $\alpha$ للمعادلة $u(x)=0$ يحقق : $1.83<\alpha<1.84$ .

هـ) استنتج أنّ معادلة المماس $(T_{e^\alpha})$ المار من المبدأ هي : $y=\left(\frac{1+\alpha^2}{e^\alpha\alpha^2}\right)x$ .

**III**) 1/ أنشئ $(C_f)$ ، $(\Gamma)$ ، و $(T_{e^\alpha})$ (يعطى : $\alpha=1.8$ ، $e^\alpha=6.26$) .

2/ $m$ وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة $f(x)=mx$ .

بالتوفيق في إمتحان شهادة البكالوريا إن شاء الله



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213



الملف موجود في: مجموعة الطريق المهيع البين لتعلم LaTeX

# الحل المفصل للبكالوريا التجريبية 2021 شعبة علوم تجريبية

## حل التمرين الأول : (04 نقاط)

1/ أ) $u_1 = 0, u_2 = 5, u_3 = \frac{34}{3}$ .

ب) نضع : $P(n) : u_n > 0$ .

◁ من أجل $n = 3$ لدينا $u_3 = \frac{34}{3}$ و $\frac{34}{3} > 0$ و منه $P(3)$ صحيحة .

◁ نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل $n \geq 3$ و نثبت أنّ $P(n+1)$ صحيحة $(n \geq 3)$ .

$u_n > 0$ و $3n - 1 > 0$ و منه $\frac{2}{3}u_n + 3n - 1 > 0$ من أجل $n \geq 3$ و منه $u_{n+1} > 0$ من أجل كلّ $n \geq 3$ و منه $P(n+1)$ صحيحة $(n \geq 3)$ ، ذن و منه $u_n > 0$ من أجل كلّ عدد طبيعي $n \geq 3$ .

ج) لدينا $u_n - 3n + 4 = \frac{2}{3}u_n + 3$ ، لكن $u_n > 0$ و منه $u_n - 3n + 4 > 0$ و منه $u_n > 3n - 4$ من أجل كلّ عدد طبيعي $n \geq 4$ ، لدينا $\lim\limits_{n \to +\infty}(3n - 4) = +\infty$ و منه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ .

2/ أ) $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ و منه $(v_n)$ هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_0 = 27$ .

ب) $v_n = 27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ، $u_n = 27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9n - 30$ .

3/ أ) $P_n = e^{v_0 + v_1 + \cdots v_n + 1 + 2 + \cdots + n}$ ، $P_n = e^{71 \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + \frac{n(n+1)}{2}}$ .

ب) $S_n = (v_0 + 9 \times 0 - 30) + (v_1 + 9 \times 1 - 30) + \cdots + (v_n + 9 \times n - 30)$ و منه

$S_n = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + 9 \times (1 + 2 + \cdots + n) - 30(n+1)$ و منه

$S_n = 71 \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + \frac{9n(n+1)}{2} - 30(n+1)$ .

## حل التمرين الثاني : (04 نقاط)

1/ $P(A) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}$ ، $P(B) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_6^3} = \frac{6}{20}$ ، $P(C) = \frac{C_3^2 \times C_3^1 + C_2^2 \times C_4^1}{20} = \frac{10}{20}$ .

2/ أ) $X = \{0, 5, 10, \alpha, \alpha + 5, \alpha + 10\}$ ، $P(X = \alpha) = \frac{C_1^1 \times C_3^2}{20} = \frac{3}{20}$ .

ب)

| $X$ | 0 | 5 | 10 | $\alpha$ | $\alpha + 5$ | $\alpha + 10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{6}{20}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{6}{20}$ | $\frac{1}{20}$ |

ج) $E(X) = \frac{30}{20} + \frac{30}{20} + \frac{3\alpha}{20} + \frac{6\alpha + 30}{20} + \frac{\alpha + 10}{20} = \frac{100 + 10\alpha}{20}$ و منه $E(x) = 20$ و منه $\frac{100 + 10\alpha}{20} = 20$

و منه $\alpha = 30\mathbf{DA}$

## حل التمرين الثالث : (04 نقاط)

1/ $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، $z_C = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}}$ .

$z_A = 1 + i$ ، $z_B = -1 + i$ ، $z_C = 1 - i$ .

2/ أ) $\frac{1 + i - z}{-1 + i - z} = 2e^{i\pi}$ و منه $1 + i - z = 2 - 2i + 2z$ و منه $3z = 3i - 1$ و منه $z = -\frac{1}{3} + i$ .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213



الملف موجود في: مجموعة الطريق المهيع البين لتعلم LaTeX

ب) لدينا $z_\Omega = -\frac{1}{3} + i$ و يحقق المعادلة $(E)$ أي $\frac{1+i-z}{-1+i-z} = 2e^{i\pi}$ و منه $\frac{z_A - z_\Omega}{z_B - z_\Omega} = 2e^{i\pi}$ و منه $z_A - z_\Omega = 2e^{i\pi}(z_B - z_\Omega)$ و من $A$ صورة $B$ بالتشابه $S$ الذي مركزه $\Omega$ و نسبته $k = 2$ و زاويته $\theta = \pi$ .

$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ 3 ، $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي موجب تماما و منه $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \pi k$ و $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) > 0$ و منه $\frac{n\pi}{2} = 2\pi k$ ومنه $n = 4k$ مع $k \in \mathbb{N}$ .

4/ أ) $z - z_C = \sqrt{2}ki$ و منه $\overrightarrow{CM} = k\sqrt{2}\overrightarrow{w}$ حيث : $\overrightarrow{w} = (0,1)$ و منه $(\Gamma_1)$ هي نصف المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مع $y > -1$ (نصف المستقيم $[CE]$ ، حيث $z_E = 1$ .

ب) $\arg\left(\frac{z_A - z}{z_B - z}\right)^2 = \pi + 2\pi k$ ومنه $\arg\left(\frac{z_A - z}{z_B - z}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ومنه $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + \pi k$ و منه $(\Gamma_2)$ هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ .

## حل التمرين الرابع : (08 نقاط)

1/ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ .

ب) $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = -\infty$ ، التفسير : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي لـ $(C_f)$ .

2/ أ) $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$ أي $f'(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$ .

ب) إشارة $f'(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\ln 2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2e^x - 1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $e^x - 1$ | | $-$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |

و منه الدالة $f$ متزايدة تماما على المجالين $]-\infty, -\ln 2[$ ، $]0, +\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]-\ln 2, 0[$ .

جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\ln 2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(-\ln 2)$ | ↘ | ‖ | ↗ | $+\infty$ |

3/ أ) لدينا $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - x] = 0$ و منه المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ عند $-\infty$ .

ب) $f(x) = x + \ln e^x + \ln\left|1 - \frac{1}{e^x}\right|$ و منه $f(x) = x + \ln\left|e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right|$ لكن $e^x - 1 > 0$ على المجال $]0;+\infty[$ و منه $\left|1 - \frac{1}{e^x}\right| = \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$ و منه $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$ .

ج) لدينا $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - 2x] = 0$ و منه المستقيم $(\Delta')$ ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ عند $+\infty$ .

د) $f(x) = x$ إذن $\ln|e^x - 1| = 0$ و منه $|e^x - 1| = 1$ و منه $e^x - 1 = 1$ أو $e^x - 1 = -1$ و منه $e^x = 2$ أو $e^x = 0$ و منه $x = \ln 2$ ، إذن $(C_f)$ قطع $(\Delta)$ في النقطة $(\ln 2, \ln 2)$ .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com · نجاح 213

najah213.com · نجاح 213



الملف موجود في: مجموعة الطريق المهيع البين لتعلم LaTeX

هـ) معادلة $(T)$ هي $y = f'(\ln 2)(x-2) + f(\ln 2)$ ، لدينا $f'(\ln 2) = 3$ و $f(\ln 2) = \ln 2$ و منه $(T) : y = 3x - 2\ln 2$ .

4/ أ) $f$ مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و خاصة على المجال $[0.4, 0.5]$ و $f(0.4) \times f(0.5) < 0$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0.4 < \alpha < 0.5$ أما على المجال $]-\infty, 0[$ المعادلة $f(x) = 0$ لا تقبل حلا لأنّ $f(x) < 0$ .

إشارة $f(x)$ كما يلي :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

ب) لدينا $f(\alpha) = 0$ و منه $\alpha + \ln|e^{\alpha} - 1| = 0$ و منه $|e^{\alpha} - 1| = e^{-\alpha}$ لكن $\alpha > 0.4$ و منه $e^{\alpha} - 1 > 0$ و منه $e^{\alpha} - 1 = e^{-\alpha}$ و منه $e^{\alpha} - 1 - \frac{1}{e^{\alpha}} = 0$ و منه $\frac{e^{2\alpha} - e^{\alpha} - 1}{e^{\alpha}} = 0$ و منه $e^{2\alpha} - e^{\alpha} - 1 = 0$ .

الرسم في آخر الورقة .

5/ حلول المعادلة $f(x) = |m|x$ بيانيا هي فوصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع المستقيم الذي معادلته : $y = |m|x$ هذا المستقيم يشمل المبدأ مهما تغير $m$ ، من البيان نجد :

إذا كان $|m| \leq 1$ أي $-1 \leq m \leq 1$ فإنّ المعادلة $f(x) = |m|x$ تقبل حلا وحدا موجبا .

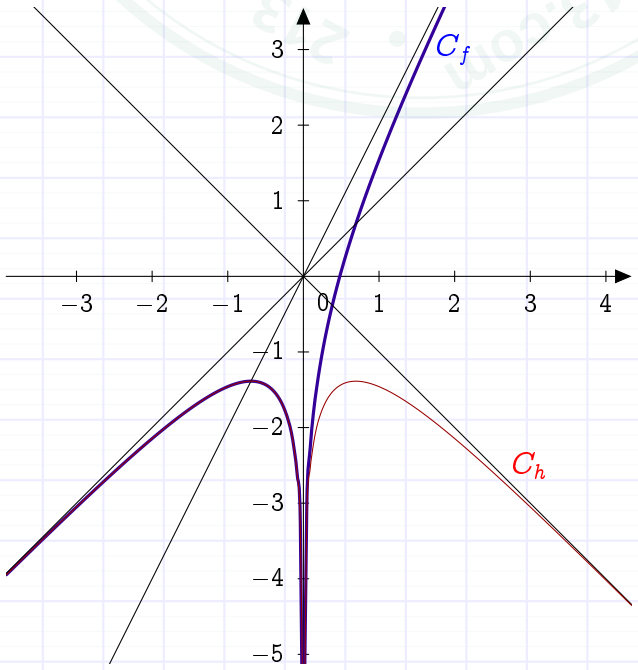
ذا كان $1 < |m| < 2$ أي $m \in ]-2, -1[\cup]1, 2[$ المعادلة $f(x) = |m|x$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

إذا كان $|m| \geq 2$ أي $m \in ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ المعادلة $f(x) = |m|x$ تقبل حلا وحدا سالبا .

6/ أ) لدينا $f(-|x|) = -|x|\ln|e^{-|x|} - 1|$ و منه $f(-|x|) = -|x|\ln|e^{-|x|}|\ln|1 - e^{|x|}|$ و من $f(-|x|) = h(x)$ .

، من أجل كلّ $x \neq 0$ ، $-x \neq 0$ و $h(-x) = f(-|-x|)$ أي $h(x) = f(-|x|)$ لأنّ $|-x| = |x|$ و منه $h(x) = h(-x)$ ، إذن $h$ زوجية .

ب) لدينا من أجل $x \in ]-\infty, 0[$ ، $h(x) = f(x)$ و منه $(C_h)$ ينطبق على $(C_f)$ في المجال $]-\infty; 0[$ ، ثمّ نناظر هذا الجزء بالنسبة إلى حامل محور التراتيب لنتحصل على الجزء الباقي من $(C_h)$ .




فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213



الملف موجود في: مجموعة الطريق المهيع البين لتعلم LaTeX

## حل التمرين الأول : (04 نقاط)

1/ أ) $u_1 = \sqrt{5}$ ، $u_2 = \sqrt{3}$ .

$P(n) : u_n > 1$ .

◁ من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 3$ و $3 > 1$ و منه $P(0)$ صحيحة .

◁ نفرض أنّ $P(n)$ و نثبت أنّ $P(n+1)$ صحيحة حيث $n$ عدد طبيعي .

$P(n)$ صحيحة معناه $u_n > 1$ و منه $u_n^2 > 1$ و منه $\frac{1+u_n^2}{2} > \frac{2}{2}$ و منه $\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} > 1$ و منه $u_{n+1} > 1$ ،

إذن $P(n+1)$ صحيحة .

إذن $u_n > 1$ من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ .

ب) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} - u_n = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)}$ ، لدينا $1 - u_n < 0$ و $u_n > 0$ و منه

$u_{n+1} - u_n < 0$ من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ و منه $(u_n)$ متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ .

ج) $(u_n)$ محدودة من الأسفل بـ 1 و متناقصة تماما فهي متقاربة نضع : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ، و منه

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ و منه $\ell = \sqrt{\frac{1+\ell^2}{2}}$ مع $\ell \geq 1$ و منه $\ell^2 = \frac{1+\ell^2}{2}$ و منه $\frac{(\ell+1)(\ell-1)}{2} = 0$ و منه

$\ell = 1$ ، إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

2/ أ) $v_n = u_n^2 - 1$ ، $2v_{n+1} = 2u_{n+1}^2 - 2 = u_n^2 - 1 = v_n$ .

ب) $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ و منه $(v_n)$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = 8$ .

ج) $v_n = v_0 \times q^n$ و منه $v_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، $u_n^2 = v_n + 1$ و منه $u_n = \sqrt{v_n + 1} = \sqrt{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$ ،

$(u_n > 0)$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ .

3/ لدينا $v_n = 8 \times 2^n$ من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ و منه $S'_n = 8 + 8 + \cdots + 8 = 8(n+1)$ ،

$S_n = (v_0 + 1) + (v_1 + 1) + \cdots + (v_n + 1)$ و منه $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n + n + 1$ و منه

$S_n = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} + n + 1$ و منه $S_n = 16 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + n + 1$ ، $S''_n = \ln(v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n)$

و منه $S''_n = \ln\left[(8)^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right]$ .

## حل التمرين الثاني : (04 نقاط)

1/ $\alpha$ تخيلي صرف معناه $Re(\alpha) = 0$ ، معناه $2Re(\alpha) = 0$ معناه $\alpha + \overline{\alpha} = 0$ لأنّ $\alpha + \overline{\alpha} = 2Re(\alpha)$ .

($Re(.)$ يرمز إلى الجزء الحقيقي ) .

2/ $f(z)$ تخيلي صرف معناه $f(z) + \overline{f(z)} = 0$ و منه $\frac{az}{z-a} + \overline{\left(\frac{az}{z-a}\right)} = 0$ و منه $\frac{az}{z-a} + \frac{\overline{az}}{\overline{z}-\overline{a}} = 0$

و منه $\frac{az\overline{z} - a\overline{a}z + \overline{a}z\overline{z} - a\overline{az}}{(z-a)(\overline{z}-\overline{a})} = 0$ و منه $z\overline{z}(a+\overline{a}) = a\overline{a}(z+\overline{z})$ لكن $z\overline{z} = |z^2|$ و $a\overline{a} = |a|^2$ و منه

$|z|^2(a+\overline{a}) = |a|^2(z+\overline{z})$ لكن $z + \overline{z} = 2Re(z)$ و $a\overline{a} = 2Re(a)$ معناه :

$|z|^2 \times Re(a) = |a|^2 \times Re(z)$ .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

5 naam-corbac-3lmy-2021P5

# الموضوع الثاني

الملف موجود في: مجموعة الطريق المهيع البين لتعلم LaTeX

3/ $a=-1+i$ .

أ) $f(z)$ تخيلي صرف معناه $|a|^2\times Re(z)=|z|^2\times Re(a)$ ، نضع $z=x+iy$ و منه $(x^2+y^2)\times(-1)=2x$ و منه $x^2+y^2+2x=0$ و منه $(x+1)^2+y^2=1$ و منه $(\Gamma)$ هي الدائرة الت مركزها $(-1,0)$ و نصف قطرها $r=1$ .

ب) لدينا $f(z)-a=\dfrac{a^2}{z-a}$ و منه $\arg(f(z)-a)=\arg\left(\dfrac{a^2}{z-a}\right)=2\arg(a)-\arg(z-a)$ و منه

$\arg(f(z)-a)=\dfrac{9\pi}{4}$ معناه : $2\dfrac{3\pi}{4}-\arg(z-a)=\dfrac{9\pi}{4}$ و منه $\arg(z-a)=-\dfrac{3\pi}{4}$ و منه

$(\overrightarrow{u},AM)=-\dfrac{3\pi}{4}$ و منه $(\Delta)$ هو نصف المستقيم $[AC)$ حيث $z_C=-2$ معادلته الديكارتية هي $y=x+2$ حيث $x<-1$ .

4/ نضع $z=x+iy$ و منه $f(z)=\dfrac{az}{z-a}=\dfrac{az(\overline{z}-\overline{a})}{(z-a)(\overline{z}-\overline{a})}$ و منه $f(z)=\dfrac{az\overline{z}-a\overline{a}z}{|z-a|^2}$ ، لدينا

$z-a=(x+1)+i(y-1)$ و منه $|z-a|^2=(x+1)^2+(y-1)^2$ و $z\overline{z}=x^2+y^2$ و $a\overline{a}=2$ و منه

$$f(z)=-\frac{x^2+y^2+2x}{(x+1)^2+(y-1)^2}+i\frac{x^2+y^2-2y}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

لدينا $x^2+y^2+2x=0$ و $y=x+2$ مع $x<-1$ و منه $x^2+3x+2=0$ و $x<-1$ و منه $x=-2$ و $y=0$ ، إذن $B(-2,0)$ .

## حل التمرين الثالث : (04 نقاط)

1/ أ) $P(A)=\dfrac{C_n^2+C_4^2+C_2^2}{C_{n+6}^2}=\dfrac{14+n^2-n}{n^2+11n+30}$ ، $P(B)=\dfrac{C_{n+1}^2+C_2^2+C_3^2}{C_{n+6}^2}=\dfrac{10+n^2+n}{n^2+11n+30}$ .

ب) $P(A)=\dfrac{17}{55}$ معناه $\dfrac{14+n^2-n}{n^2+11n+30}=\dfrac{17}{55}$ و منه $19n^2-121n+130=0$ حلول هذه المعادلة في $\mathbb{N}$ هي $n=5$ .

2/ نفرض أنّ $n=5$ .

أ) $\alpha,\beta\in\left\{\pi,\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right\}$ .

الجدول الموالي يبيّن القيم الممكنة لـ $\cos\alpha\cos\beta$ .

| $\cos\beta$ \ $\cos\alpha$ | $-1$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $0$ |
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |

.

و منه القيم الممكنة لـ $X$ هي $\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},0,1\right\}$ .

ب) $P(X=0)=\dfrac{C_3^2+C_3^1\times C_8^1}{C_{11}^2}$ أي $P(X=0)=\dfrac{27}{55}$ .

ج) .

| $x$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{27}{55}$ | $\frac{12}{55}$ | $\frac{1}{55}$ | $\frac{15}{55}$ |

$E(X)=\dfrac{1-24+60}{220}=\dfrac{37}{220}$ .

## حل التمرين الرابع : (04 نقاط)

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

6 naam-corbac- 3lmy-2021P6

# الموضوع الثاني

الملف موجود في: مجموعة الطريق المهيع البين لتعلم LaTeX

**I)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ .

ب) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=-\infty$ .

2/ $f$ قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x(\ln)^2}$ و منه $f'(x)=\dfrac{(\ln x)^2+1}{x(\ln x)^2}$ .

3/ لدينا $f'(x)>0$ من أجل كلّ $x$ من المجال $]1;+\infty[$ و منه $f$ متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ .

جدول التغيرات :

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

4/ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]=0$ و منه $(C_f)$ و $(\Gamma)$ متقاربان عند $+\infty$ .

$f(x)-\ln x=-\dfrac{1}{\ln x}$ و $-\dfrac{1}{\ln x}<0$ على المجال $]1;+\infty[$ و منه $(C_f)$ يقع تحت $(\Gamma)$ على المجال $]1;+\infty[$ .

**II)** 1/ $(T_a)$ معادلته $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ ، $(T_a)$ يشمل المبدأ معناه $0=f'(a)(-a)+f(a)$ و منه $f(a)-af'(a)=0$ .

2/ $g(x)=0$ معناه $\ln x-\dfrac{1}{\ln x}+\dfrac{1+(lnx)^2}{(\ln x)^2}=0$ و منه $\dfrac{(\ln x)^2-(\ln x)-1-(\ln x)^2}{(\ln x)^2}=0$ و منه $(\ln x)^3-(\ln x)^2-(\ln x)-1=0$ .

و منه المعادلتين $g(x)=0$ و $(\ln x)^3-(\ln x)^2-(\ln x)-1=0$ لهما نفس الحلول .

3/ أ) $u'(t)=3t^2-2t-1$ و إشارة $u'(t)$ كما يلي :

| $t$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

و منه $u$ متزايدة تماما على المجالين $\left]-\infty;-\dfrac{1}{3}\right[$ و $]1,+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $\left]-\dfrac{1}{3};1\right[$ .

جدول التغيرات :

| $t$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $u(t)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(-\frac{1}{3})$ | ↘ | $f(1)=-1$ | ↗ | $+\infty$ |

ب) الدالة $u$ مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و $]-1;+\infty[$ و $0\in]-1;+\infty[$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $u(t)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ ، أما على المجال $]-\infty;1[$ المعادلة $u(t)=0$ لا تقبل حلا لأنّ $u(t)<0$ و منه $u$ تنعدم مرة واحدة على $\mathbb{R}$ .

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

7 naam-corbac- 3lmy-2021P7

# الموضوع الثاني

الملف موجود في: مجموعة الطريق المهيع البين لتعلم LaTeX

ج) بوضع $t = \ln x$ تصبح المعادلة $u(t) = 0$ هي $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - (\ln x) - 1 = 0$ لها حل وحيد $a$ و منه المعادلة $g(x) = 0$ لها حل وحيد $a$ أي $f(a) - f'(a)a = 0$ ، إذن يوجد مماس وحيد لـ $(C_f)$ يمر من المبدأ .

د) لدينا $u(1.84) \times u(1.83) < 0$ و منه $1.83 < \alpha < 1.84$ .

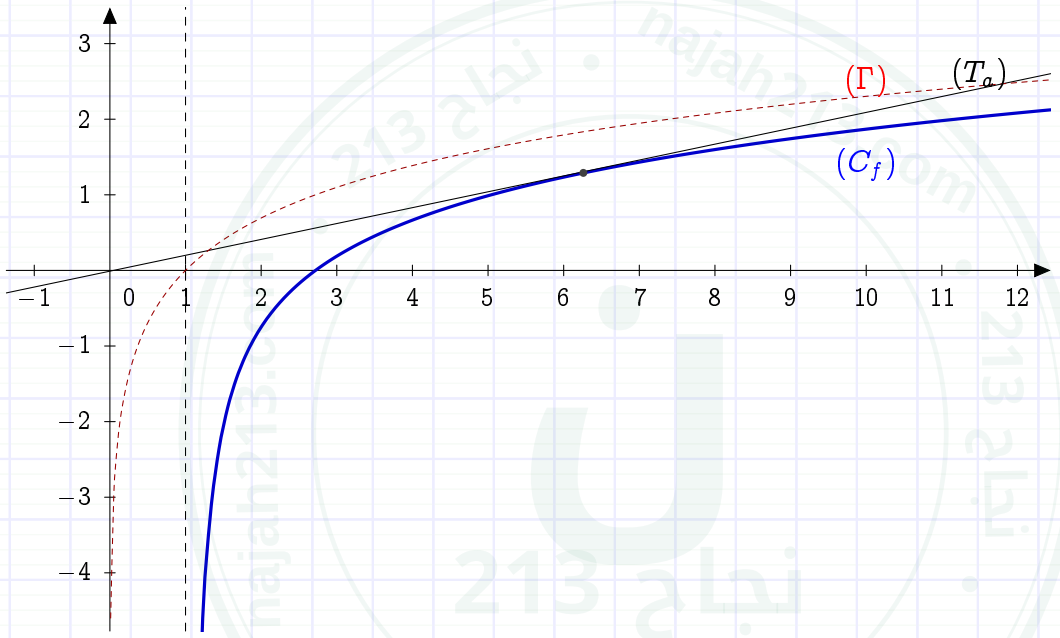
هـ) لدينا $\ln a = \alpha$ و منه $a = e^\alpha$ و منه معادلة المماس $(T_a)$ هي $y = f'(e^\alpha)x$ أي $y = \left(\frac{1+\alpha^2}{e^\alpha \alpha^2}\right) x$ .

**III**) 1/ الرسم في أخر الورقة

2/ حلول المعادلة $f(x) = mx$ بيانيا هي فوصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع المستقيم الذي معادلته : $y = mx$ هذا المستقيم يشمل المبدأ مهما تغير $m$ ، من البيان نجد :

إذا كان $m > \frac{1+\alpha^2}{e^\alpha \alpha^2}$ المعادلة $f(x) = mx$ لا تقبل حلا .

إذا كان $m \leq \frac{1+\alpha^2}{e^\alpha \alpha^2}$ المعادلة $f(x) = mx$ تقبل حلا واحدا موجبا .




بالتوفيق في إمتحان شهادة البكالوريا ، التركيز و الثقة في النفس عاملان أساسيان في النجاح

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com