najah213.com · نجاح 213

ثانوية المجاهد عبد القادر علام — السنة الدراسية 2024/ 2025

المستوى : 3 رياضي — المدة : 90 دقيقة

الفرض الأول للفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين

I) نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=e^{-x}+x-1$ و $h(x)=g(x)-\frac{x^2}{2}$

1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $0\le g(x)$

2) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة h على المجال $]0;+\infty[$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $h(x)\le 0$

3) استنتج مما سبق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $1-x\le e^{-x}\le \frac{x^2}{2}-x+1$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $\begin{cases} f(x)=(x+2)e^{\frac{-2}{x}} & ,\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستو ي المنسوب إلى المعلم التعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) بين أن الدالة مستمر في من اليمين

2) أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)}{x}$

ب) ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بيانيا.

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4) أ) بالإستعانة بالجزء **I)** السؤال **3)** بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $\frac{-4}{x}\le f(x)-x\le \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$.

ب) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]$

جـ) عين معادلة المستقيم المقارب المائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

5) مثل المستقيم المقارب المائل و المنحنى (C_f)

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ثانوية المجاهد عبد القادر علام **السنة الدراسية 2024/ 2025**

المستوى : 3 رياضي و3 تقني رياضي **المدة : 60 دقيقة**

تصحيح الفرض الأول للفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين

I) نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=e^{-x}+x-1$ و $h(x)=g(x)-\frac{x^2}{2}$

أ) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ومن أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)=-e^{-x}+1$

$0\le -e^{-x}+1$ يكافئ $-1\le -e^{-x}$ يكافئ $e^{-x}\le 1$ يكافئ $-x\le 0$ يكافئ $x\ge 0$ ومنه $x\in]0;+\infty[$

ومنه

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$

وعليه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $0\le g(x)$

بما أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن $g(0)=0$ قيمة حدية صغرى للدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $0\le g(x)$.

1) أ) دراسة اتجاه تغير الدالة h على المجال $]0;+\infty[$:

الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ومن أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$h'(x)=g'(x)-x=-e^{-x}+1-x=-\left(e^{-x}+x-1\right)=-g(x)$$

ومنه

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$

وعليه الدالة h متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $0\le h(x)$:

بما أن الدالة h متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن $h(0)=0$ قيمة حدية صغرى للدالة h على المجال $]0;+\infty[$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $h(x)\le 0$.

2) استنتاج مما سبق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $1-x\le e^{-x}\le \frac{x^2}{2}-x+1$

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

لدينا مما سبق من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $0 \le g(x)$ يكافئ $0 \le e^{-x} + x - 1$

يكافئ $1 - x \le e^{-x}$ .....(1)

لدينا مما سبق من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $h(x) \le 0$ يكافئ

$g(x) - \frac{x^2}{2} \le 0$ يكافئ $e^{-x} + x - 1 - \frac{x^2}{2} \le 0$ يكافئ $e^{-x} - \le \frac{x^2}{2} - x + 1$ .....(2)

من (1) و (2) نستنتج أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $1 - x \le e^{-x} \le \frac{x^2}{2} - x + 1$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}} & , x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستو ي المنسوب إلى

المعلم التعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) تبين أن الدالة f مستمر في 0 من اليمين:

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x+2)e^{\frac{-2}{x}} = 0$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x+2) = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{\frac{-2}{x}} = 0 \end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = f(0)$ ومنه الدالة f مستمر في 0 من اليمين.

2) أ) حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{(x+2)e^{\frac{-2}{x}}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{(x+2)}{x} e^{\frac{-2}{x}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{\frac{-2}{x}} = \lim_{t \to -\infty} (1-t)e^t = \lim_{t \to -\infty} e^t - te^t = 0$$

ب) الإستنتاج : الدالة f قابلة للإشتقاق في 0 من اليمين

✓ فسر النتيجة بيانيا: (C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة 0 نصف مماس معامل توجيهه 0 (موازي إلى محور الفواصل)

3) دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها :

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ومن أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = (1)\left(e^{\frac{-2}{x}}\right) + \left(\frac{2}{x^2}e^{\frac{-2}{x}}\right)(x+2) = e^{\frac{-2}{x}}\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = e^{\frac{-2}{x}}\left(\frac{x^2+2x+4}{x^2}\right)$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $\left[x^2+2x+4\right]$ لأن $\frac{e^{\frac{-2}{x}}}{x^2} > 0$ ، نحل المعادلة $x^2+2x+4=0$ نجد $\Delta < 0$ ومنه إشارة العبارة $\left[x^2+2x+4\right]$ من إشارة $a=1$ ومنه $x^2+2x+2>0$ وعليه ومن أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) > 0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0	$+\infty$

4) أ) بالإستعانة بالجزء I) السؤال 3) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $\frac{-4}{x} \le f(x)-x \le \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$:

من أجل $x>0$ فإن $\frac{2}{x}>0$ ولدينا من بالجزء I) السؤال 3) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ،

$1-x \le e^{-x} \le \frac{x^2}{2}-x+1$ منه نستبدل $\frac{2}{x}$ بـ x في العلاقة نجد $1-\frac{2}{x} \le e^{-\frac{2}{x}} \le \frac{\left(\frac{2}{x}\right)^2}{2}-\frac{2}{x}+1$ يكافئ $\frac{x-2}{x} \le e^{-\frac{2}{x}} \le \frac{x^2-2x+2}{x^2}$

بالضرب في العدد $(x+2)$ نجد $(x+2)\left(\frac{x-2}{x}\right) \le (x+2)e^{-\frac{2}{x}} \le (x+2)\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2}\right)$ بإضافة العدد $-x$ نجد

$(x+2)\left(\frac{x-2}{x}\right)-x \le (x+2)e^{-\frac{2}{x}}-x \le (x+2)\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2}\right)-x$ بعد النشر و التبسيط نجد $\frac{-4}{x} \le f(x)-x \le \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$

ب) استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$:

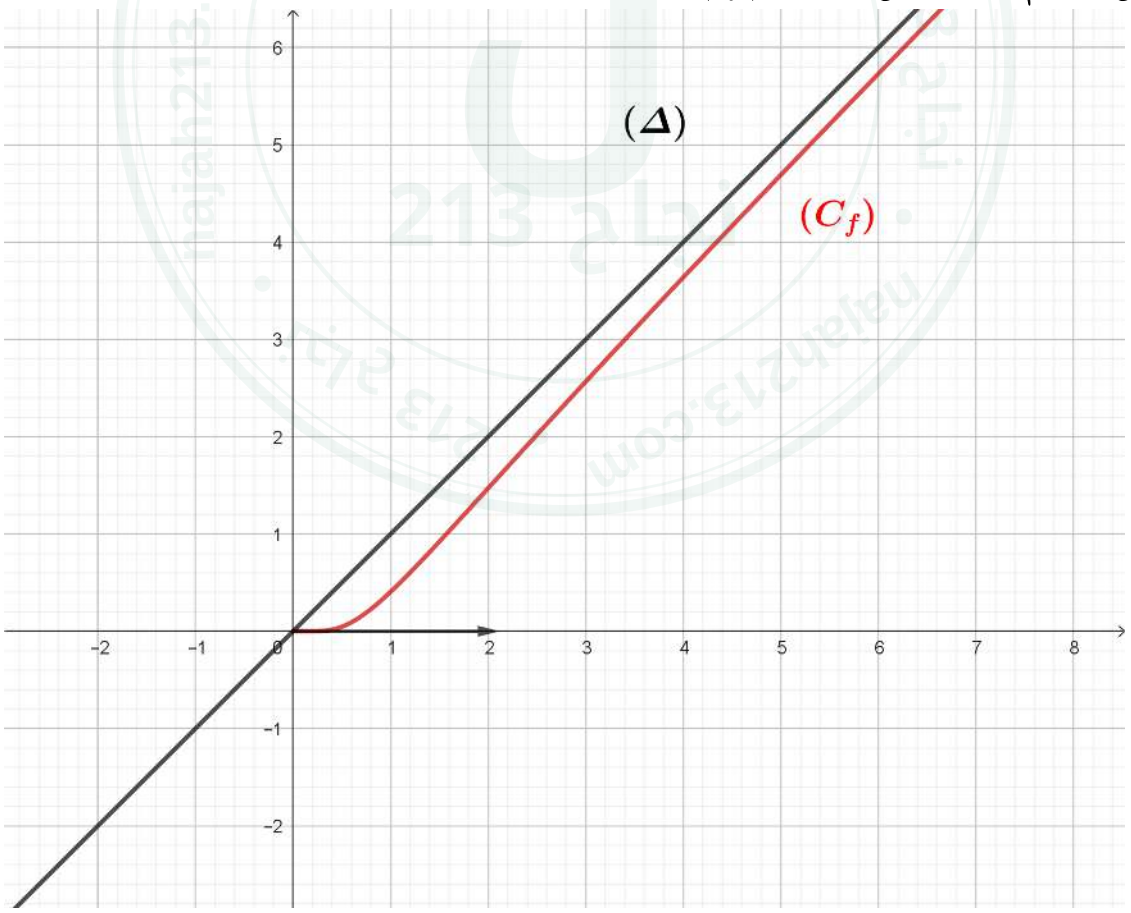
لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $\frac{-4}{x} \le f(x)-x \le \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}=0$

إذن بإستعمال النهاية بالحصر نجد $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$

جـ) عين معادلة المستقيم المقارب المائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

5) مثل المستقيم المقارب المائل و المنحنى (C_f)



إنتهى.....