najah213.com · نجاح 213

ثانوية : بوعزيز ربيعة (الياسمين) | الفرض الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات | السنة الدراسية : 2025 / 2024

القسم : 3 رياضيات | المدة : ساعتان

التمرين الأول (06 نقط) :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $u_1 = e^{-1}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_{n+1} = \frac{n+1}{en} u_n$.

1) أ) بين انه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_n > 0$.

ب) قارن بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و 1 ، ثم استنتج اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N^* ، $v_n = \frac{1}{en} u_n$ ، بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

3) جد بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، ثم استنتج عبارة u_n و احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4) أحسب بدلالة n المجموع T_n حيث : $T_n = \frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \frac{u_3}{v_3} + \ldots\ldots + \frac{u_n}{v_n}$.

5) أحسب بدلالة n العدد P_n حيث : $P_n = \ln(u_1 \times u_2 \times \ldots\ldots \times u_n)$.

التمرين الثاني (05 نقط) :

نعتبر التكاملين J و I حيث : $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} dx$ و $J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{x}}{e^{2x}-1} dx$.

1) بين أن : $I = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$.

2) أحسب $I - J$ ، ثم استنتج قيمة J.

3) n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$ ، نعتبر العدد الحقيقي K_n المعرف كما يلي : $K_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} e^{-x} \cdot \ln\left(e^{2x}-1\right) dx$.

باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب العدد K_2.

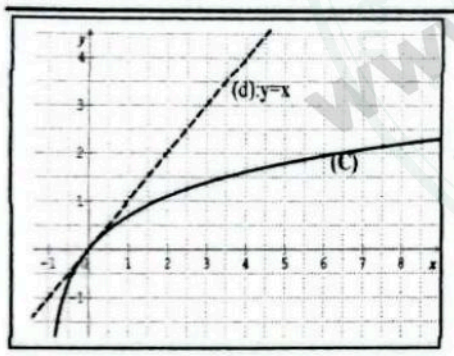
4) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم أن ، $\frac{2e^{x}}{e^{2x}-1} = \frac{e^{x}}{e^{x}-1} - \frac{e^{x}}{e^{x}+1}$.

ب) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = K_2 + K_3 + \ldots\ldots + K_n$ ، ثم عين $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

التمرين الثالث (09 نقط) :

(I) (C) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln(1+x)$ المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$

و (d) المستقيم ذو المعادلة $y = x$. كما هو موضح في الشكل المقابل



بقراءة بيانية ، برر أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ، $0 < \ln(1+x) < x$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R ب : $f(x) = \ln(e^{2x} + e^{-x})$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{2e^{3x}-1}{e^{3x}+1}$. ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = 2x + \ln(1+e^{-3x})$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته .

3) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + x]$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ') يطلب تعيين معادلته .

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيمين (Δ) و (Δ') .

5) أنشئ (Δ) ، (Δ') و (C_f) .

6) λ عدد حقيقي موجب تماما ، $A(\lambda)$ المساحة المحددة بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما : $x = 0$ و $x = \lambda$.

بين أن : $A(\lambda) < \frac{1}{3}$.

7) الدالة العددية h المعرفة على R ب : $h(x) = f(|x|-1)+1$ و (C_h) منحناها البياني في المعلم السابق .

أ) بين أن الدالة h زوجية . ب) اشرح كيف يتم إنشاء المنحنى (C_h) انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه.

www.dzexams.com

انتهى بالتوفيق

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين (ص06) (ق1)

$u_{n+1}=\frac{n+1}{en}u_n$: $n\in\mathbb{N}^*$ و $u_1=e^{-1}$

1) $u_n>0$: $n\in\mathbb{N}^*$ نبين

المرحلة 1 : من أجل $n=1$ نتحقق

$u_1=e^{-1}>0$ أي $u_1>0$ محققة

المرحلة 2 : نفرض أن $u_n>0$ من أجل n كيفي، ونبرهن أن $u_{n+1}>0$

لدينا $u_n>0$ و $\frac{n+1}{en}>0$

$\frac{n+1}{en}u_n>0$ ومنه

$u_{n+1}>0$

$u_n>0$: $n\in\mathbb{N}^*$ ومنه

ب) $\frac{u_{n+1}}{u_n}-1=\frac{n+1}{en}-1$

$\frac{u_{n+1}}{u_n}-1=\frac{(1-e)n+1}{en}$

$(1-e)n+1<0$ و $en>0$ من أجل $n\geq 1$ ومنه

$\frac{u_{n+1}}{u_n}-1<0$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$

ومنه (u_n) متناقصة تماما

ضرب طرفا في $u_n>0$

$u_{n+1}<u_n$ متناقصة تماما (u_n) أي

ج) (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ 0 فهي متقاربة حسب صرفة

$v_n=\frac{1}{en}u_n$, $n\in\mathbb{N}^*$ (2)

$v_{n+1}=v_n\times q$: $n\in\mathbb{N}^*$ لكل (v_n) هندسية

$v_{n+1}=\frac{1}{e(n+1)}u_{n+1}$

$v_{n+1}=\frac{1}{e(n+1)}\times\frac{n+1}{en}u_n$

$v_{n+1}=\frac{1}{e}\times\frac{1}{en}u_n=\frac{1}{e}v_n$

$q=\frac{1}{e}$ لدينا (v_n) هندسية

$v_1=\frac{1}{e}u_1=\frac{1}{e^2}$ حدها الأول

$v_n=v_1\times q^{n-1}$: $n\in\mathbb{N}^*$ لكل (3)

$v_n=e^{-2}\times(e^{-1})^{n-1}=e^{-n-1}$

د) $u_n=en\,v_n=n\,e^{-n}=\frac{n}{e^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}ne^{-n}=0$

هـ) $T_n=\frac{u_1}{v_1}+\frac{u_2}{v_2}+\cdots+\frac{u_n}{v_n}$ (4)

$\frac{u_n}{v_n}=en$ لدينا

$T_n=e(1+2+3+\cdots+n)$

$T_n=\frac{e}{2}n(n+1)=\frac{e(n^2+n)}{2}$

$P_n=\ln(u_1\times u_2\times u_3\times\cdots\times u_n)$ (5)

$P_n=\ln\left(\frac{1}{e}\times\frac{2}{e^2}\times\frac{3}{e^3}\times\cdots\times\frac{n}{e^n}\right)$

$P_n=\ln\left(\frac{1\times2\times3\times\cdots\times n}{e^{1+2+3+\cdots+n}}\right)$

$P_n=\ln(n!)-\ln\left(e^{\frac{n}{2}(n+1)}\right)$

$P_n=\ln(n!)-\frac{n}{2}(n+1)$

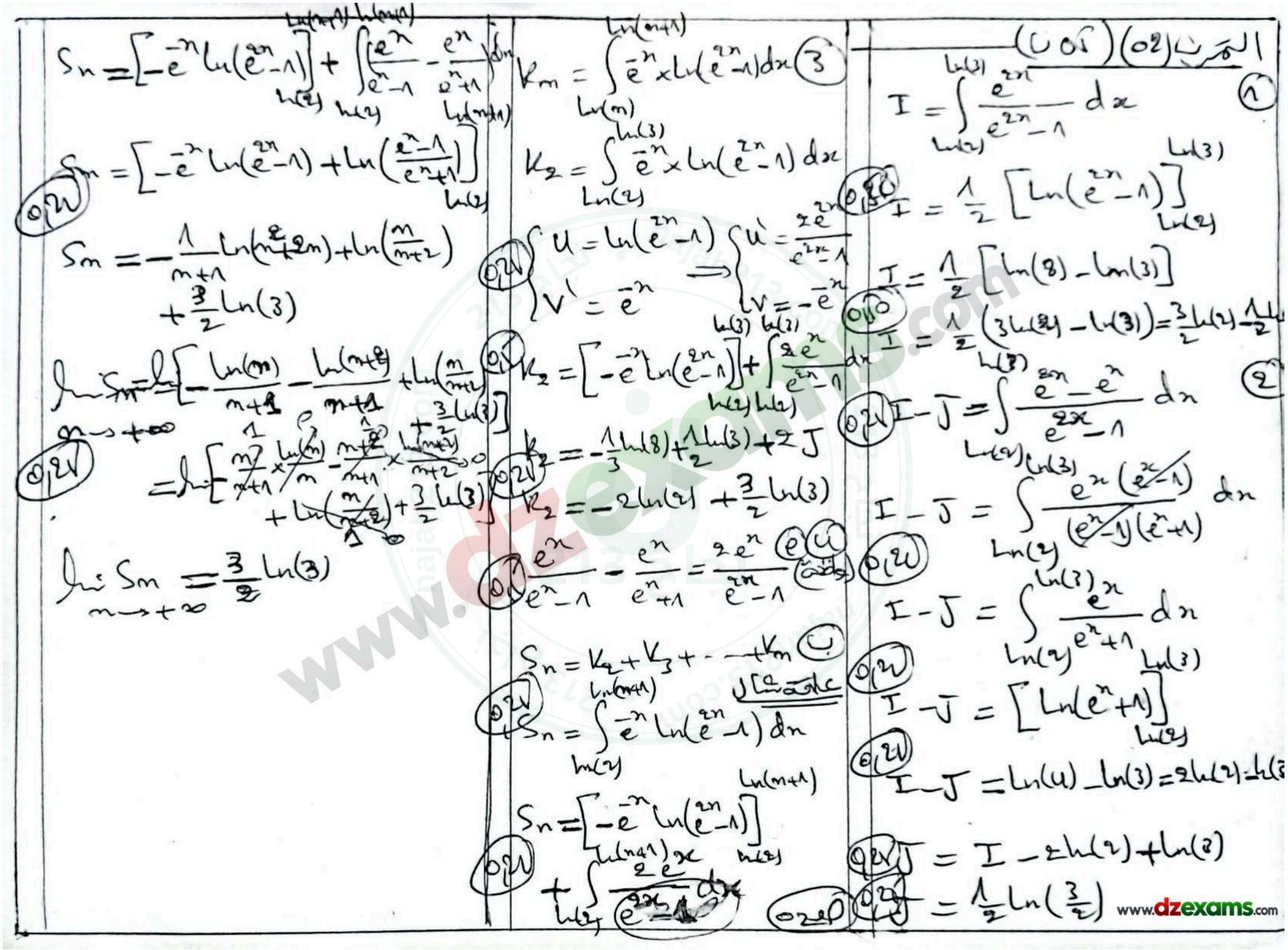
$P_n=\ln(n!)-\frac{n^2+n}{2}$

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213



فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً
www.dzexams.com
najah213.com

najah213.com · نجاح 213

التمرين (3) (ص ن)

I) من الرسم أن من أجل كل $x \in]0,+\infty[$ المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (D) ومن أجل كل $x \in]0,+\infty[$:

$0 < \ln(1+x) < x$

II) $f(x) = \ln(e^{2x} + e^{-x})$, $D_f = \mathbb{R}$

1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) $x \in \mathbb{R}$ لكل

$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^{-x}}{e^{2x} + e^{-x}} \times \frac{e^{x}}{e^{x}}$

$f'(x) = \frac{2e^{3x} - 1}{e^{3x} + 1}$

جدول إشارة $f'(x)$ من إشارة $2e^{3x} - 1$ لأن $e^{3x} + 1 > 0$

$f'(x) \geq 0$ أي $2e^{3x} - 1 \geq 0$

$e^{3x} \geq \frac{1}{2}$

$3x \geq -\ln(2)$

$x \geq -\frac{\ln(2)}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{\ln(2)}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\frac{3\ln(2)}{2}$	↗

f متناقصة تماما على $]-\infty, -\frac{\ln(2)}{3}]$

f متزايدة تماما على $[-\frac{\ln(2)}{3}, +\infty[$

$f(x) = \ln(e^{2x} + e^{-x})$

$f(x) = \ln[e^{2x}(1 + e^{-3x})]$

$f(x) = 2x + \ln(1 + e^{-3x})$

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-3x}) = 0$ ، $(\Delta): y = 2x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to -\infty} \ln(1 + e^{3x}) = 0$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ') بجوار $-\infty$ معادلته $(\Delta'): y = -x$

4) الوضع النسبي (C_f) و (Δ)

$f(x) - y = \ln(1 + e^{-3x}) > 0$

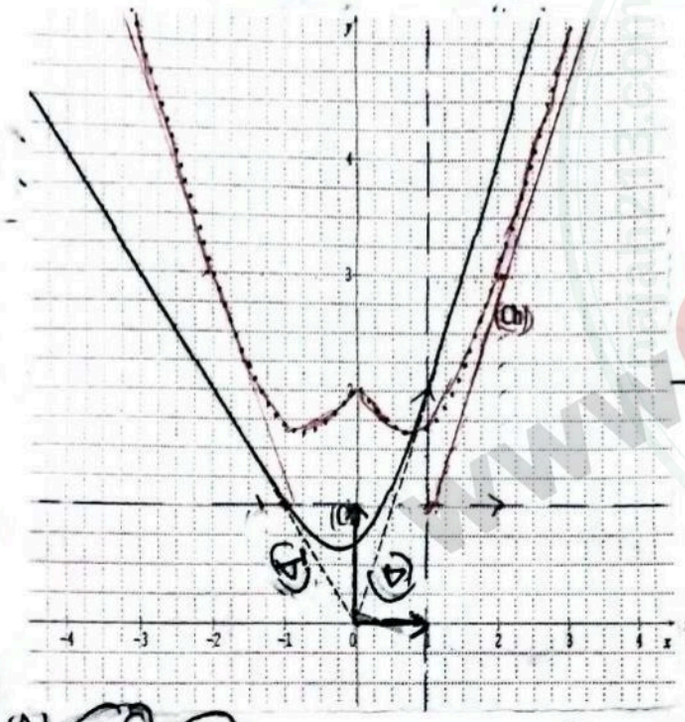
(C_f) فوق (Δ) على $\mathbb{R}$

الوضع النسبي (C_f) و (Δ')

$f(x) - y = \ln(1 + e^{3x}) > 0$

(C_f) فوق (Δ') على $\mathbb{R}$

5) رسم (Δ) و (Δ') و (C_f)



www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com

najah213.com · نجاح 213

ج) لكل $x \in [0, +\infty[$

$h(x) = f(x-1) + 1$

(Ch) هو صورة (C) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(1)$

(Ch) على المجال $[0, +\infty[$ بالتناظر محور التراتيب لأن دستور h زوجية

(Ch) موجود في نفس المعلم

د) $A(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x) - y \, dx$

$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} \ln(1+e^{-3x}) \, dx$

$x > 0$ لدينا من أجل كل

$\ln(1+x) < x$ (متراجحة) (هـ

$\ln(1+e^{-3x}) < e^{-3x}$ ومنه

$\int_0^{\lambda} \ln(1+e^{-3x}) \, dx < \int_0^{\lambda} e^{-3x} \, dx$

$A(\lambda) < -\frac{1}{3}\left[e^{-3x}\right]_0^{\lambda}$

$A(\lambda) < -\frac{1}{3}\left[e^{-3\lambda} - 1\right]$

$A(\lambda) < \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3\lambda}\right) < \frac{1}{3}$

إذن $A(\lambda) < \frac{1}{3}$

و) $h(x) = f(|x|-1)+1$ ، $\mathbb{R}$

ز) $x \in \mathbb{R}$ ، $-x \in \mathbb{R}$ (تحقق)

ح) $h(-x) = f(|-x|-1)+1$

$h(-x) = f(|x|-1)+1 = h(x)$

إذن h دالة زوجية

www.dzexams.com

فروض واختبارات مع الحلول لكل المستويات — مجاناً

najah213.com